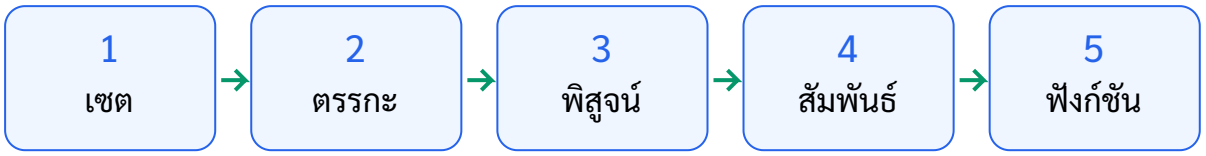
DES201 · หนังสือติวกลางภาค

เช็กลิสต์ขอบเขตสอบ: Week 1–6 · อ่านจากศูนย์ พร้อมเฉลย In-Class และข้อสอบฝึกในขอบเขต



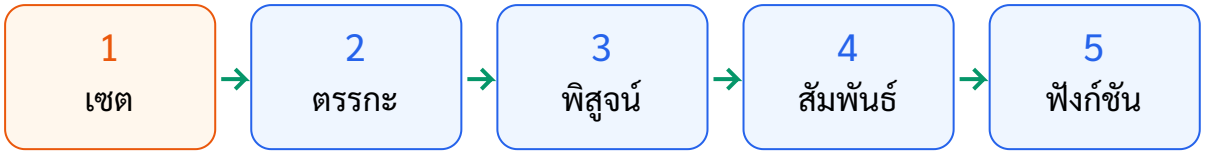
เช็ก	เนื้อหาในเล่ม	เปิดหน้า
□	บทที่ 1 · เซต	19
□	บทที่ 2 · ตรรกศาสตร์และตัวบ่งปริมาณ	80
□	บทที่ 3 · วิธีพิสูจน์ · Assume / IH / Prove	148
□	บทที่ 4 · ความสัมพันธ์	224
□	บทที่ 5 · ฟังก์ชันและความสัมพันธ์สมมูล	291
□	ภาคผนวก ก · In-Class Week 1–2	360
□	ภาคผนวก ข · In-Class Week 3–4	377
□	ภาคผนวก ค · In-Class Week 5–6	398
□	ภาคผนวก ง · ข้อสอบฝึก Topic 1–3	434
□	สรุปนิยาม กฎ และขั้นตอนหนึ่งหน้า	607

ถ้าเหลือเวลาน้อยและติด Assume / IH / Prove: อ่านหน้าที่แยกสามหน้าที่ 184 แล้วตามภาพอุปนัยในบทที่ 3 จากนั้นทำ In-Class 4.2–4.3 และข้อสอบฝึก Topic 2 ข้อ 15–17 ทีละข้อ โดยปิดเฉลยก่อนลองเอง

อ่านครบจากศูนย์ให้ไล่บทที่ 1→5 ตารางหน้าถัดไปชี้ทุกหัวข้อย่อยกับหน้าเปิดอ่าน เลขหน้าอ้างหน้าของ PDF เล่มนี้และคลิกเปิดได้

ไม่รวม Algorithms/Week 7 รวมถึง Topic 4 หน้า 15–16 ของไฟล์ข้อสอบฝึก ขอบเขตเฉลยจึงเป็น Topic 1–3 ทั้งหมด ไม่ใช่เนื้อหานอกสอบ

เช็กลิสต์ · บทที่ 1 เซต

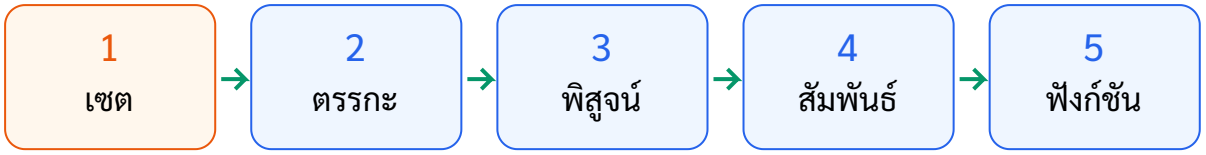


□ ติ๊กเมื่ออธิบายเหตุผลและทำตัวอย่างใกล้เคียงได้เอง · คอลัมน์ต้นทางอ้างหน้า PDF เลกเชอร์

เช็ก	เปิดหัวข้อนี้เมื่อ...	ต้นทาง	หน้า
□	1.1 มีอะไรอยู่ในกล่อง?	2	19
□	1.2 บอกรายชื่อ หรือบอกกติกา?	3	21
□	1.3 เลขตัวเดียวอยู่ได้หลายกล่อง	4	23
□	1.4 ไม่มีของ กับมีเลขศูนย์	4, 6	25
□	1.5 เท่ากันต้องตรวจสองทาง	5	27
□	1.6 กล่องที่นิยามด้วยสมการ	5	29
□	1.7 อยู่ข้างในทั้งกลุ่ม	6, 7	31
□	1.8 กล่องว่างอยู่ข้างในได้อย่างไร?	7	33
□	1.9 เก็บกล่องที่เลือกได้ทุกแบบ	7, 8	35
□	1.10 รับอย่างน้อยหนึ่งกล่อง	9	37

ภาพฟ้า = สิ่งที่มีอยู่ · ส้ม = กำลังเปลี่ยนหรือพจน์ใหม่ · เขียว = ผลที่พิสูจน์ถึงแล้ว · กรอบเป้าหมายเส้นประ = ยังใช้เป็นเหตุผลไม่ได้

เช็กลิสต์ · บทที่ 1 เซต

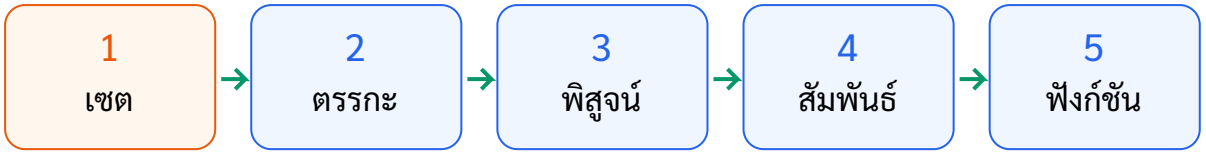


□ ติ๊กเมื่ออธิบายเหตุผลและทำตัวอย่างใกล้เคียงได้เอง · คอลัมน์ต้นทางอ้างหน้า PDF เลกเชอร์

เช็ก	เปิดหัวข้อนี้เมื่อ...	ต้นทาง	หน้า
□	1.11 ต้องอยู่ทั้งสองกล่อง	9	39
□	1.12 เริ่มจากกล่องซ้ายแล้วตัดออก	10	41
□	1.13 อยู่นอกกล่อง แต่ยังอยู่ในกรอบใหญ่	10	43
□	1.14 ไม่มีสมาชิกตรงกันเลย	11	45
□	1.15 เปลี่ยนกติกา โดยไม่ย้ายสมาชิกผิดที่	12	47
□	1.16 เปลี่ยนลำดับกล่องได้เมื่อไร?	13	49
□	1.17 เปลี่ยนว่าจะทำกลุ่มไหนก่อน	13	51
□	1.18 ทำกับกล่องเดิมซ้ำแล้วเกิดอะไร?	13	53
□	1.19 เพิ่มศูนย์ชิ้น กับคัดด้วยกรอบทั้งหมด	14	55
□	1.20 เต็มกรอบ หรือไม่เหลือเลย	13	57

ภาพฟ้า = สิ่งที่มีอยู่ · ส้ม = กำลังเปลี่ยนหรือพจน์ใหม่ · เขียว = ผลที่พิสูจน์ถึงแล้ว · กรอบเป้าหมายเส้นประ = ยังใช้เป็นเหตุผลไม่ได้

เช็กลิสต์ · บทที่ 1 เซต

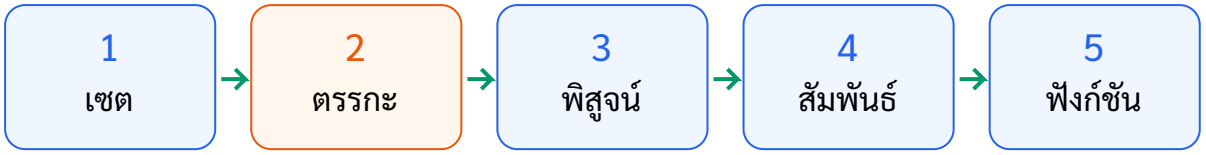


□ ติ๊กเมื่ออธิบายเหตุผลและทำตัวอย่างใกล้เคียงได้เอง · คอลัมน์ต้นทางอ้างหน้า PDF เลกเชอร์

เช็ก	เปิดหัวข้อนี้เมื่อ...	ต้นทาง	หน้า
□	1.21 สองฝั่งที่เติมกันพอดี	13	59
□	1.22 กลับด้านสองครั้ง	14	61
□	1.23 เพิ่มของที่มีแล้ว คัดด้วยกล่องที่ครอบอยู่	13	63
□	1.24 แยกคัดเป็นสองทาง	14	65
□	1.25 กลับคำว่า “อย่างน้อยหนึ่ง” และ “ทั้งสอง”	14	68
□	1.26 ตำแหน่งเป็นส่วนหนึ่งของคำตอบ	15	71
□	1.27 จับทุกตัวกับทุกตัว	15	73
□	1.28 สลับกล่องและจับกล่องกับตัวเอง	15	75
□	1.29 เพิ่มตำแหน่งโดยไม่ทำทางเลือกหาย	16	77

ภาพฟ้า = สิ่งที่มีอยู่ · ส้ม = กำลังเปลี่ยนหรือพจน์ใหม่ · เขียว = ผลที่พิสูจน์ถึงแล้ว · กรอบเป้าหมายเส้นประ = ยังใช้เป็นเหตุผลไม่ได้

เช็กลิสต์ · บทที่ 2 ตรรกศาสตร์และตัวบ่งปริมาณ

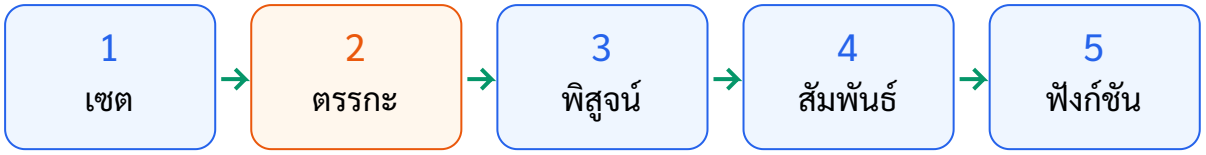


□ ติ๊กเมื่ออธิบายเหตุผลและทำตัวอย่างใกล้เคียงได้เอง · คอลัมน์ต้นทางอ้างหน้า PDF เลกเชอร์

เช็ก	เปิดหัวข้อนี้เมื่อ...	ต้นทาง	หน้า
□	2.1 ประโยคแบบไหนตัดสินจริงหรือเท็จได้	W1:17	80
□	2.2 เอาข้อความมาต่อกัน: ไม่ / และ / หรือ	W1:18, W1:19	82
□	2.2ก แปลข้อความเป็นสัญลักษณ์: ตัวอย่าง 1.7	W1:18	84
□	2.3 ถ้า...แล้ว... ผิดสัญญาได้กรณีเดียว	W1:20	86
□	2.4 แปลเงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอให้ลูกศรไม่กลับ	W1:20	88
□	2.5 ต้องได้ทั้งขาไปและขากลับ	W1:18, W1:21	90
□	2.6 จากประโยคยาวไปสู่คำตอบ: ตัวอย่าง 1.8 ข้อ 1–3	W1:22	92
□	2.7 ประโยคซ้อนและตารางสามตัว: ตัวอย่าง 1.8 ข้อ 4–5	W1:22	95
□	2.8 สองรูปเขียนแทนกันได้เมื่อเท่ากันทุกแถว	W1:23	98
□	2.9 เปลี่ยนลูกศรเป็น “หรือ” และเปลี่ยนสองทางเป็นสองขา	W1:24	100

ภาพฟ้า = สิ่งที่มีอยู่ · ส้ม = กำลังเปลี่ยนหรือพจน์ใหม่ · เขียว = ผลที่พิสูจน์ถึงแล้ว · กรอบเป้าหมายเส้นประ = ยังใช้เป็นเหตุผลไม่ได้

เช็กลิสต์ · บทที่ 2 ตรรกศาสตร์และตัวบ่งปริมาณ

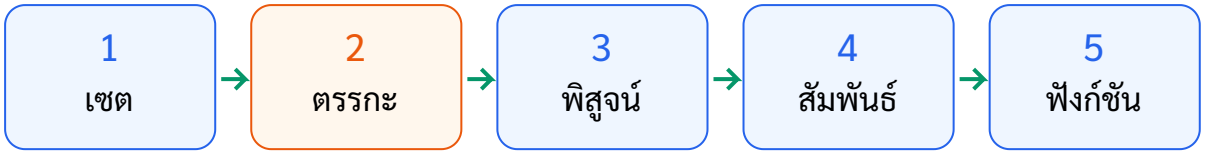


□ ติ๊กเมื่ออธิบายเหตุผลและทำตัวอย่างใกล้เคียงได้เอง · คอลัมน์ต้นทางอ้างหน้า PDF เลกเชอร์

เช็ก	เปิดหัวข้อนี้เมื่อ...	ต้นทาง	หน้า
□	2.10 ปฏิเสธทั้งกลุ่มต้องเปลี่ยนตัวเชื่อมด้วย	W1:24, W1:26	**102**
□	2.11 สลับที่กับย้ายวงเล็บ: อะไรเปลี่ยนได้	W1:24, W1:25	**104**
□	2.12 กระจายตัวเชื่อมให้เงื่อนไขยังครบ	W1:24	**106**
□	2.13 พิสูจน์สมมูลด้วยกฎทีละบรรทัด: ตัวอย่าง 1.10	W1:24, W1:25	**109**
□	2.14 ปฏิเสธ “ถ้า...แล้ว...”: ตัวอย่าง 1.11	W1:26	**112**
□	2.15 ประโยคที่รอเติมตัวเลข: ตัวอย่าง 2.1	W2:2, W2:3	**114**
□	2.16 คำว่า “ทุกตัว” แพ้เพียงตัวเดียว: ตัวอย่าง 2.2	W2:4, W2:5	**116**
□	2.17 “ทุกจำนวนจริง” ต้องมีเหตุผลครอบคลุม: ตัวอย่าง 2.3	W2:6	**118**
□	2.18 คำว่า “มีอย่างน้อยหนึ่ง” ชนะได้ตัวเดียว: ตัวอย่าง 2.4	W2:7, W2:8	**121**
□	2.19 สร้างพยานแล้วแทนกลับ: ตัวอย่าง 2.5	W2:9	**124**

ภาพฟ้า = สิ่งที่มีอยู่ · ส้ม = กำลังเปลี่ยนหรือพจน์ใหม่ · เขียว = ผลที่พิสูจน์ถึงแล้ว · กรอบเป้าหมายเส้นประ = ยังใช้เป็นเหตุผลไม่ได้

เช็กลิสต์ · บทที่ 2 ตรรกศาสตร์และตัวบ่งปริมาณ



□ ติ๊กเมื่ออธิบายเหตุผลและทำตัวอย่างใกล้เคียงได้เอง · คอลัมน์ต้นทางอ้างหน้า PDF เลกเชอร์

เช็ก	เปิดหัวข้อนี้เมื่อ...	ต้นทาง	หน้า
□	2.20 เลือกหลักฐานให้ตรงกับคำว่า “ทุก” หรือ “มี”	W2:10	**127**
□	2.21 ปฏิเสธ “ทุก” เป็น “มีตัวที่ไม่”: ตัวอย่างหน้า 11	W2:11	**129**
□	2.22 จะบอกว่าไม่มีเลย ต้องปิดทุกทาง: ตัวอย่าง 2.6	W2:12	**131**
□	2.23 เมื่อข้อความมีสองช่องว่าง	W2:13, W2:15	**133**
□	2.24 อ่านสี่รูปด้วยตารางเดียว: ตัวอย่างคนในห้อง	W2:14, W2:15	**135**
□	2.25 รหัสของแต่ละบัญชี กับรหัสเดียวของทุกบัญชี	W2:14, W2:16	**137**
□	2.26 แปลคำว่า “จำนวนบวกสองจำนวนใด ๆ”	W2:13	**139**
□	2.27 จำนวนเต็มบวกไม่มีตัวที่เล็กกว่า 1: ตัวอย่าง 2.7 ข้อ 1–3	W2:17	**141**
□	2.28 y เปลี่ยนตาม x ได้หรือถูกล็อกไว้: ตัวอย่าง 2.7 ข้อ 4–5	W2:17	**144**

ภาพฟ้า = สิ่งที่มีอยู่ · ส้ม = กำลังเปลี่ยนหรือพจน์ใหม่ · เขียว = ผลที่พิสูจน์ถึงแล้ว · กรอบเป้าหมายเส้นประ = ยังใช้เป็นเหตุผลไม่ได้

เช็กลิสต์ · บทที่ 3 วิธีพิสูจน์ · Assume / IH / Prove



□ ติ๊กเมื่ออธิบายเหตุผลและทำตัวอย่างใกล้เคียงได้เอง · คอลัมน์ต้นทางอ้างหน้า PDF เลกเชอร์

เช็ก	เปิดหัวข้อนี้เมื่อ...	ต้นทาง	หน้า
□	3.1 เห็นหลายครั้ง ยังไม่เท่ากับจริงทุกครั้ง	W3:1, W3:2	148
□	3.2 เริ่มจากสิ่งที่โจทย์ให้: คู่ คี่ และการพิสูจน์ตรง	W3:3, W3:4, W3:5	150
□	3.3 สองจำนวนไม่จำเป็นต้องใช้ตัวแทนเดียวกัน	W3:6	152
□	3.4 ทางเดียวไปไม่ถึงทุกจำนวน: แยกให้ครบสองกรณี	W3:7	154
□	3.5 ต้องสร้างตัวที่ใช้ได้ ไม่ใช่บอกว่าคงมี	W3:8	156
□	3.6 ค่าที่เล็กกว่าเป็นจุดเชื่อมอสมการ	W3:9	158
□	3.7 เริ่มจากปลายทางที่ไม่เกิด: แย้งสลับที่	W3:10, W3:11	160
□	3.8 ปฏิเสธ “หรือ” ต้องปฏิเสธให้ครบทั้งคู่	W3:12	162
□	3.9 ลองเปิดกรณีที่โจทย์พัง แล้วชนข้อขัดแย้ง	W3:13, W3:14	164
□	3.10 โจทย์เดิม เปลี่ยนสิ่งที่รับไว้ตอนเริ่ม	W3:15	166

ภาพฟ้า = สิ่งที่มีอยู่ · ส้ม = กำลังเปลี่ยนหรือพจน์ใหม่ · เขียว = ผลที่พิสูจน์ถึงแล้ว · กรอบเป้าหมายเส้นประ = ยังใช้เป็นเหตุผลไม่ได้

เช็กลิสต์ · บทที่ 3 วิธีพิสูจน์ · Assume / IH / Prove



□ ติ๊กเมื่ออธิบายเหตุผลและทำตัวอย่างใกล้เคียงได้เอง · คอลัมน์ต้นทางอ้างหน้า PDF เลกเชอร์

เช็ก	เปิดหัวข้อนี้เมื่อ...	ต้นทาง	หน้า
□	3.11 เศษส่วนที่ถูกต้องต้องมีตัวส่วนไม่เป็นศูนย์	W3:16	**168**
□	3.12 ถุงซ้อนกัน: เลือกสมาชิกที่หลุดมาสักตัว	W3:17	**170**
□	3.13 เงื่อนไขทั้งหมดจริงแล้ว ข้อสรุปหลุดได้ไหม	W3:18, W3:19	**172**
□	3.14 เปลี่ยนคำเชื่อมหนึ่งตัว ผลเปลี่ยนได้	W3:20, W3:21	**174**
□	3.15 ตัดทางเลือกตรงข้าม แล้วเก็บทางที่เหลือ	W4:3, W4:4	**176**
□	3.16 ต่อคลอสสองครั้ง: อย่ากระโดดข้ามผลกลาง	W4:5, W4:6	**178**
□	3.17 ก่อนตัด ต้องทำให้เงื่อนไขเป็นคลอส	W4:7, W4:8	**180**
□	3.18 จากสามก้อนไปสี่ก้อน: เห็นสิ่งที่เพิ่มก่อน	W4:9	**182**
□	3.19 Assume, IH, Prove: สามป้ายนี้ทำงานคนละอย่าง	W4:9	**184**
□	3.20 ฐานกับสะพาน: ทำไมต้องมีครบทั้งคู่	W4:9	**186**

ภาพฟ้า = สิ่งที่มีอยู่ · ส้ม = กำลังเปลี่ยนหรือพจน์ใหม่ · เขียว = ผลที่พิสูจน์ถึงแล้ว · กรอบเป้าหมายเส้นประ = ยังใช้เป็นเหตุผลไม่ได้

เช็กลิสต์ · บทที่ 3 วิธีพิสูจน์ · Assume / IH / Prove



□ ติ๊กเมื่ออธิบายเหตุผลและทำตัวอย่างใกล้เคียงได้เอง · คอลัมน์ต้นทางอ้างหน้า PDF เลกเชอร์

เช็ก	เปิดหัวข้อนี้เมื่อ...	ต้นทาง	หน้า
□	3.21 ผลบวก 1 ถึง n: เตรียมฐาน, IH และเป้าหมาย	W4:10, W4:11	188
□	3.22 ใช้ IH ตรงไหน: วงก้อนก่อนแทน	W4:10, W4:11	190
□	3.23 จากก้อนที่แทนแล้วไปถึงเป้าหมาย: ทีละการกระทำ	W4:10, W4:11	192
□	3.24 ผลคูณโตอย่างไร: เปลี่ยนจากเท่ากันเป็นไม่น้อยกว่า	W4:12	194
□	3.25 ใช้ IH กับอสมการ: ต้องตรวจเครื่องหมายตัวคูณ	W4:12	196
□	3.26 หารลงตัว: เป้าหมายคือสร้างจำนวนเต็มที่คูณกลับได้	W4:13	198
□	3.27 เติมแล้วหักออก เพื่อเปิดช่องให้ IH เข้าไป	W4:13	200
□	3.28 ผลบวกที่แต่ละพจน์คูณด้วยอัตราเดิม: นับจากศูนย์	W4:14	203
□	3.29 พจน์ใหม่มีอัตราคูณอยู่ด้วย: อย่าหลงนับเป็น k+1	W4:14	205
□	3.30 พจน์ที่หักล้างกันต้องเป็นพจน์เดียวกันจริง	W4:14	207

ภาพฟ้า = สิ่งที่มีอยู่ · ส้ม = กำลังเปลี่ยนหรือพจน์ใหม่ · เขียว = ผลที่พิสูจน์ถึงแล้ว · กรอบเป้าหมายเส้นประ = ยังใช้เป็นเหตุผลไม่ได้

เช็กลิสต์ · บทที่ 3 วิธีพิสูจน์ · Assume / IH / Prove

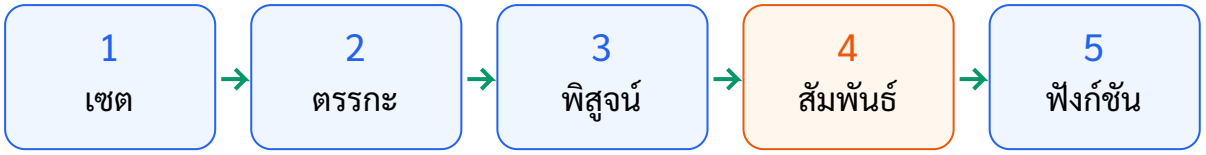


□ ติ๊กเมื่ออธิบายเหตุผลและทำตัวอย่างใกล้เคียงได้เอง · คอลัมน์ต้นทางอ้างหน้า PDF เลกเชอร์

เช็ก	เปิดหัวข้อนี้เมื่อ...	ต้นทาง	หน้า
□	3.31 ต้นไม้ที่แต่ละจุดแตกได้ไม่เกินสองทาง	W4:15	209
□	3.32 ส่งต่อขอบบน: สองลูกต่อหนึ่งพ่อ	W4:15	212
□	3.33 นับทั้งต้น: ต้องรวมทุกชั้นที่อยู่เหนือฐานด้วย	W4:16	214
□	3.34 แยกของเก่าที่สูง k กับชั้นใหม่ที่ k+1	W4:16	216
□	3.35 ลองทำเอง: ผลบวกจำนวนคี่ เพื่อเช็กว่าใช้ IH เป็นแล้ว	หัวข้อฝึกต่อเนื่อง	219
□	3.36 ก่อนเริ่มข้อสอบ: อ่านว่าให้เริ่มตรงไหนและต้องจบตรงไหน	W3:3, W3:4, W4:1, W4:2	221

ภาพฟ้า = สิ่งที่มีอยู่ · ส้ม = กำลังเปลี่ยนหรือพจน์ใหม่ · เขียว = ผลที่พิสูจน์ถึงแล้ว · กรอบเป้าหมายเส้นประ = ยังใช้เป็นเหตุผลไม่ได้

เช็กลิสต์ · บทที่ 4 ความสัมพันธ์

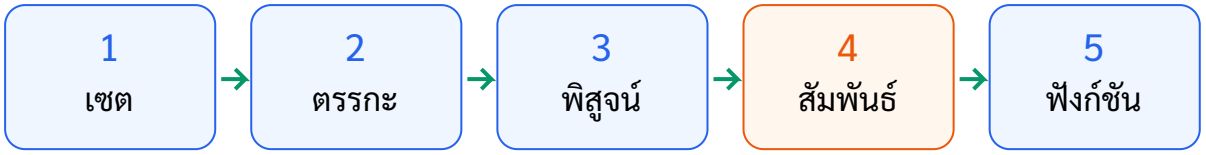


□ ติ๊กเมื่ออธิบายเหตุผลและทำตัวอย่างใกล้เคียงได้เอง · คอลัมน์ต้นทางอ้างหน้า PDF เลกเชอร์

เช็ก	เปิดหัวข้อนี้เมื่อ...	ต้นทาง	หน้า
□	4.1 จากคู่ที่เลือก สู่ลูกศรที่อนุญาต	1	224
□	4.2 ลูกศรจากการหารลงตัว	1, 2, 3	227
□	4.3 เมื่อสองฝั่งเป็นกล่องเดียวกัน	1, 3	231
□	4.4 ทุกจุดต้องมีลูกศรกลับตัวเอง	4, 5	234
□	4.5 มีไปแล้วต้องมีกลับ	4, 5	236
□	4.6 ห้ามสองทิศระหว่างคนละจุด	4, 5	239
□	4.7 มีสองช่วงแล้วต้องมีลูกศรตรง	4, 5	241
□	4.8 ภาพเดียวผ่านสี่สมบัติได้	6	243
□	4.9 ทำไมการหารลงตัวผ่านสามสมบัติ	7	246
□	4.10 เรียงได้บางคู่ก็เป็นอันดับได้	8, 9	249

ภาพฟ้า = สิ่งที่มีอยู่ · ส้ม = กำลังเปลี่ยนหรือพจน์ใหม่ · เขียว = ผลที่พิสูจน์ถึงแล้ว · กรอบเป้าหมายเส้นประ = ยังใช้เป็นเหตุผลไม่ได้

เช็กลิสต์ · บทที่ 4 ความสัมพันธ์

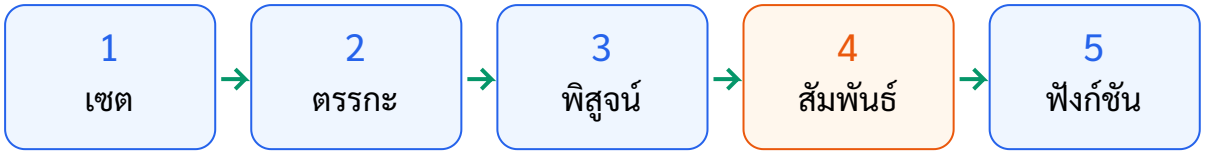


□ ติ๊กเมื่ออธิบายเหตุผลและทำตัวอย่างใกล้เคียงได้เอง · คอลัมน์ต้นทางอ้างหน้า PDF เลกเชอร์

เช็ก	เปิดหัวข้อนี้เมื่อ...	ต้นทาง	หน้า
□	4.11 “เทียบได้” ไม่ได้แปลว่าใช้เครื่องหมาย < เสมอ	8, 9, 11	252
□	4.12 ซ่อนเส้นได้ โดยไม่ลบความหมาย	9, 10, 11	255
□	4.13 เมื่อทุกคู่เรียงเทียบกันได้	10, 11	258
□	4.14 กลับหัวลูกศรทุกเส้น	12	261
□	4.15 ต่อทางโดยใช้จุดกลางเดียวกัน	13	265
□	4.16 กลับทิศแล้วความถ่ายทอดยังอยู่	14	269
□	4.17 กลับภาพที่มีคู่กลับครบอยู่แล้ว	14	272
□	4.18 กลับทิศไม่สร้างคู่ไปกลับใหม่	14	275
□	4.19 สองความสัมพันธ์ถ่ายทอด ต่อแล้วอาจไม่ถ่ายทอด	15	277
□	4.20 วงวนต่อวงวนยังได้วงวน	15	280

ภาพฟ้า = สิ่งที่มีอยู่ · ส้ม = กำลังเปลี่ยนหรือพจน์ใหม่ · เขียว = ผลที่พิสูจน์ถึงแล้ว · กรอบเป้าหมายเส้นประ = ยังใช้เป็นเหตุผลไม่ได้

เช็กลิสต์ · บทที่ 4 ความสัมพันธ์

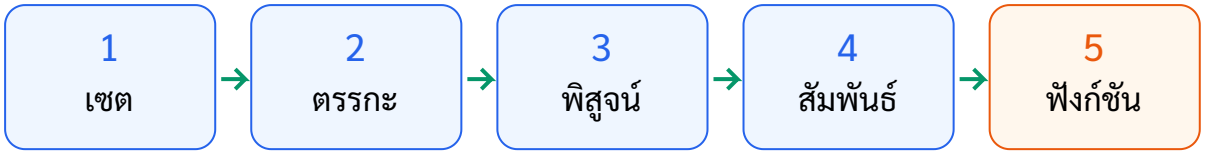


□ ติ๊กเมื่ออธิบายเหตุผลและทำตัวอย่างใกล้เคียงได้เอง · คอลัมน์ต้นทางอ้างหน้า PDF เลกเชอร์

เช็ก	เปิดหัวข้อนี้เมื่อ...	ต้นทาง	หน้า
□	4.21 คู่กลับของแต่ละช่วงไม่พอ	15	**283**
□	4.22 คนละทางสร้างสองทิศในผลได้	15	**286**

ภาพฟ้า = สิ่งที่มีอยู่ · ส้ม = กำลังเปลี่ยนหรือพจน์ใหม่ · เขียว = ผลที่พิสูจน์ถึงแล้ว · กรอบเป้าหมายเส้นประ = ยังใช้เป็นเหตุผลไม่ได้

เช็กลิสต์ · บทที่ 5 ฟังก์ชันและความสัมพันธ์สมมูล

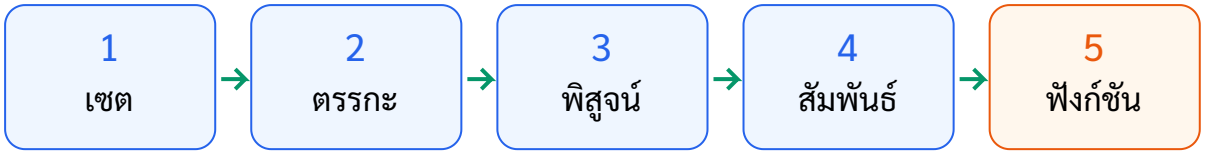


□ ติ๊กเมื่ออธิบายเหตุผลและทำตัวอย่างใกล้เคียงได้เอง · คอลัมน์ต้นทางอ้างหน้า PDF เลกเชอร์

เช็ก	เปิดหัวข้อนี้เมื่อ...	ต้นทาง	หน้า
□	5.1 แยกกลุ่มแล้วมีสมาชิกซ้ำข้ามกลุ่มไหม	W6:2	**291**
□	5.2 แบ่งของครบทุกชิ้น โดยแต่ละชิ้นอยู่กลุ่มเดียว	W6:3	**293**
□	5.3 จากกลุ่มสี สร้างลูกศร “อยู่กลุ่มเดียวกัน”: ตัวอย่าง 3.14	W6:4	**295**
□	5.4 ทำไม “อยู่กลุ่มเดียวกัน” มีคุณสมบัติครบสามข้อ	W6:4, W6:5	**298**
□	5.5 เลือกตัวแทนหนึ่งตัว แล้วเก็บทั้งกลุ่ม: ตัวอย่าง 3.15	W6:5, W6:6	**301**
□	5.6 ทำไมชั้นสมมูลที่ทับกันต้องเป็นชั้นเดียวกัน	W6:6	**304**
□	5.7 ผลต่างหารสองลงตัว: ตัวอย่าง 3.16	W6:7	**307**
□	5.8 แยกคี่กับคู่จากคู่ลำดับ: ตัวอย่าง 3.16 ต่อ	W6:8	**311**
□	5.9 ผลบวก x+3y หารสี่ลงตัว: ตัวอย่าง 3.17	W6:9	**314**
□	5.10 อ่านคู่ทั้งหมดของตัวอย่าง 3.17	W6:9	**318**

ภาพฟ้า = สิ่งที่มีอยู่ · ส้ม = กำลังเปลี่ยนหรือพจน์ใหม่ · เขียว = ผลที่พิสูจน์ถึงแล้ว · กรอบเป้าหมายเส้นประ = ยังใช้เป็นเหตุผลไม่ได้

เช็กลิสต์ · บทที่ 5 ฟังก์ชันและความสัมพันธ์สมมูล

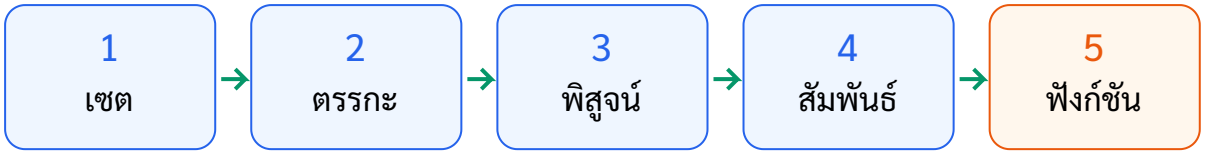


□ ติ๊กเมื่ออธิบายเหตุผลและทำตัวอย่างใกล้เคียงได้เอง · คอลัมน์ต้นทางอ้างหน้า PDF เลกเชอร์

เช็ก	เปิดหัวข้อนี้เมื่อ...	ต้นทาง	หน้า
□	5.11 เครื่องจับคู่ที่ไม่ขาดและไม่แตกทาง	W6:10	**321**
□	5.12 ตรวจทั้งสี่ภาพในตัวอย่าง 3.18	W6:10	**323**
□	5.13 คนละต้นทางห้ามชนปลายทาง: ตัวอย่าง 3.19	W6:11	**326**
□	5.14 ทุกปลายทางต้องมีคนมาถึง: ตัวอย่าง 3.20	W6:12	**329**
□	5.15 จับคู่พอดีทั้งสองฝั่ง: ตัวอย่าง 3.21	W6:13	**331**
□	5.16 เทียบหนึ่งต่อหนึ่ง ทั่วถึง และทั้งสองแบบ	W6:11, W6:12, W6:13	**334**
□	5.17 แบ่งกลุ่มอินพุตที่ให้ผลเท่ากัน: ตัวอย่าง 3.22 เริ่มจากภาพ	W6:14	**337**
□	5.18 พิสูจน์ผลเท่ากันเป็นสมมูล โดยไม่สมมติว่า f หนึ่งต่อหนึ่ง	W6:14	**340**
□	5.19 กลับลูกศรแล้วต้องยังเป็นฟังก์ชัน	W6:15	**343**
□	5.20 ย้อนกลับไม่ได้เพราะชน หรือเพราะไม่มีลูกศร	W6:15	**346**

ภาพฟ้า = สิ่งที่มีอยู่ · ส้ม = กำลังเปลี่ยนหรือพจน์ใหม่ · เขียว = ผลที่พิสูจน์ถึงแล้ว · กรอบเป้าหมายเส้นประ = ยังใช้เป็นเหตุผลไม่ได้

เช็กลิสต์ · บทที่ 5 ฟังก์ชันและความสัมพันธ์สมมูล

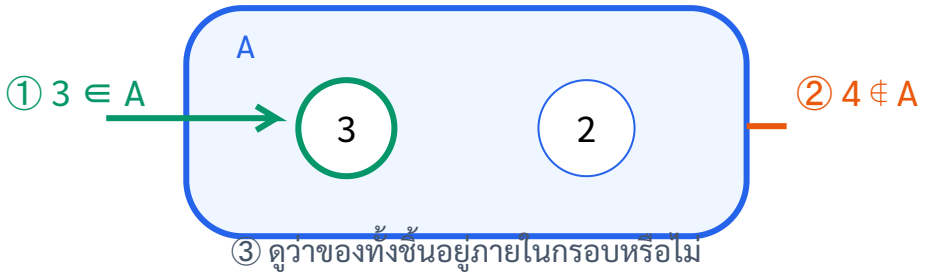


□ ติ๊กเมื่ออธิบายเหตุผลและทำตัวอย่างใกล้เคียงได้เอง · คอลัมน์ต้นทางอ้างหน้า PDF เลกเชอร์

เช็ก	เปิดหัวข้อนี้เมื่อ...	ต้นทาง	หน้า
□	5.21 เดินผ่านสองเครื่อง: ฟังก์ชันประกอบ	W6:16	**349**
□	5.22 ถ้าชื่อสลับเป็น g∘f ก็ต้องใช้ f ก่อน	W6:16	**352**
□	5.23 ผลประกอบหนึ่งต่อหนึ่ง บังคับให้ f หนึ่งต่อหนึ่งไหม: ตัวอย่าง 3.23	W6:17	**354**
□	5.24 ผลประกอบหนึ่งต่อหนึ่ง บังคับให้ g หนึ่งต่อหนึ่ง: ตัวอย่าง 3.24	W6:18	**357**

ภาพฟ้า = สิ่งที่มีอยู่ · ส้ม = กำลังเปลี่ยนหรือพจน์ใหม่ · เขียว = ผลที่พิสูจน์ถึงแล้ว · กรอบเป้าหมายเส้นประ = ยังใช้เป็นเหตุผลไม่ได้

บทที่ 1 เซต: ดูสมาชิกให้ชัดก่อนใช้สัญลักษณ์



บทนี้เริ่มจากกล่องที่บอกว่ามีอะไรอยู่ข้างใน แล้วใช้กล่องเดิมฝึกเปรียบเทียบ เลือก รวม ตัดออก และจับคู่ อ่านตามลำดับครั้งแรกได้เลย ส่วนตอนทำข้อสอบให้เปิดหัวข้อที่ตรงกับเครื่องหมายในโจทย์

ขอบเขตอ้างอิง: Week 1 หน้า 2–16 เลขหน้าในวงเล็บท้ายหัวข้อหมายถึงหน้าเอกสารต้นทาง ไม่ใช่หน้าเล่มนี้ สีฟ้าคือข้อมูลตั้งต้น สีส้มคือส่วนที่กำลังตรวจ สีเขียวคือผล สีเทาคือส่วนที่ไม่ใช้ต่อ

1.1 มีอะไรอยู่ในกล่อง? (ต้นทาง หน้า 2)

บนโต๊ะมีบัตรเขียนเลข 1, 2, 2, 3 เราต้องการบอกเพียงว่า “มีเลขชนิดใดบ้าง” ไม่ได้ถามว่ามีบัตรกี่ใบ ถ้าสลับบัตร 3 ไปไว้หน้าสุด เลขที่มีอยู่จะเปลี่ยนไหม?

ลองคิดก่อนเปิดเฉลย

จากบัตร 1, 2, 2, 3 ถ้าเขียนรายชื่อเลขโดยไม่เขียนซ้ำ จะเหลืออะไร? เลข 4 อยู่ในรายชื่อนั้นไหม?

เฉลย ได้ 1, 2, 3 ส่วน 4 ไม่มี ถ้าตอบแบบนี้ได้ เราแยก “ชนิดของเลข” ออกจาก “จำนวนบัตร” ได้แล้ว



กลุ่มของสิ่งต่าง ๆ ที่ไม่สนใจลำดับและไม่นับสิ่งเดิมซ้ำ เรียกว่า **เซต (set)** สิ่งที่อยู่ในกลุ่มเรียกว่า **สมาชิก (element)** เขียนกรอบของกลุ่มด้วยวงเล็บปีกกา เช่น $A = \{1, 2, 3\}$

ใช้ $2 \in A$ อ่านว่า “2 เป็นสมาชิกของ A” ถ้าไม่มีใช้ $4 \notin A$ อ่านว่า “4 ไม่เป็นสมาชิกของ A” เครื่องหมายนี้ถามสิ่งเดียว: ของทางซ้ายอยู่ในกลุ่มทางขวาหรือไม่



โจทย์ ให้ $A = \{3, 1, 2, 2, 3\}$ จงเขียนสมาชิกไม่ซ้ำ แล้วตัดสิน $3 \in A$ กับ $4 \in A$

บรรทัด 1 — เก็บครั้งแรก อ่าน 3 → เก็บ 3; อ่าน 1 → เก็บ 1; อ่าน 2 → เก็บ 2

บรรทัด 2 — ละชื่อที่มีแล้ว 2 ตัวถัดไปและ 3 ตัวถัดไปมีชื่ออยู่แล้ว จึงเขียน $A = \{3, 1, 2\} = \{1, 2, 3\}$

บรรทัด 3 — ตรวจทีละตัว 3 อยู่ในรายชื่อ จึง $3 \in A$ เป็นจริง; 4 ไม่อยู่ จึง $4 \in A$ เป็นเท็จ ต้องเขียน $4 \notin A$

เช็กกลับ รายชื่อใหม่มีทุกเลขที่เคยพบในโจทย์ ไม่มีเลขเพิ่มเข้ามา และไม่มีชื่อซ้ำ

ลองทำผิดให้เห็น: ถ้านับตำแหน่งแล้วบอกว่ามีสมาชิก 5 ตัว จะกำลังนับจำนวนครั้งที่เขียน ไม่ใช่ชนิดของสมาชิก เลข 2 ที่ซ้ำไม่ได้สร้างสมาชิกใหม่ อีกข้อผิดคือคิดว่า $\{1, 2, 3\}$ ต่างจาก $\{3, 2, 1\}$ ทั้งที่ถามหาเลขใดก็พบตรงกัน



ลงมือทำตามนี้

1. อ่านของภายในปีกกาทีละชิ้น
2. ลบการเขียนซ้ำโดยไม่เปลี่ยนชนิดของสิ่งนั้น
3. ตรวจเครื่องหมาย $\in$ ด้วยการหา “ของทั้งชิ้น” ในรายชื่อ
4. หยุดเมื่อสมาชิกทุกชนิดถูกบันทึกครั้งเดียว

1.2 บอกรายชื่อ หรือบอกกติกา? (ต้นทาง หน้า 3)

กล่องหนึ่งเก็บเลข 2, 4, 6, 8, 10 เราบอกรายชื่อทั้งหมดได้ แต่ถ้ากล่องเก็บเลขคี่ทุกจำนวน การเขียนไปเรื่อย ๆ จะไม่มีวันจบ เราต้องบอกกติกาที่ตัดสินเลขแต่ละตัวได้แทน

ลองคิดก่อนเปิดเฉลย

ถ้าเลือกเฉพาะจำนวนเต็มบวกที่เป็นเลขคู่และไม่เกิน 10 เลข 6 ผ่านไหม? เลข 7 ผ่านไหม? ลองเขียนของที่ผ่านทั้งหมด

เฉลย 6 ผ่านเพราะเป็นเลขคู่และไม่เกิน 10; 7 ไม่ผ่านเพราะไม่เป็นเลขคู่ ได้ $\{2, 4, 6, 8, 10\}$

การเขียนสมาชิกทั้งหมดในปีกกาเรียกว่า **แบบแจกแจงสมาชิก (roster method)** เช่น $V = \{a, e, i, o, u\}$ ส่วนการบอกเงื่อนไขเรียกว่า **แบบบอกเงื่อนไข (set-builder notation)** เช่น $E = \{x \mid$ x **เป็นจำนวนเต็มบวกคู่ และ** $x \leq 10\}$

ขีด $\mid$ อ่านว่า “ซึ่ง” หรือ “โดยที่” ด้านซ้ายเป็นตัวแทนของสมาชิก ด้านขวาเป็นเกณฑ์รับสมาชิกเข้ากล่อง จึงไม่ใช่การหาร เมื่อเห็น $\{x \in D \mid P(x)\}$ ให้เริ่มจากของใน D แล้วเก็บเฉพาะตัวที่ผ่าน P



โจทย์ เขียน $E = \{x \mid x$ **เป็นจำนวนเต็มบวกคู่ และ** $x \leq 10\}$ แบบแจกแจง

บรรทัด 1 — จำกัดขอบเขต จำนวนเต็มบวกที่ไม่เกิน 10 คือ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

บรรทัด 2 — ใช้เงื่อนไขคู่ เก็บ 2, 4, 6, 8, 10; ตัด 1, 3, 5, 7, 9 เพราะหารด้วย 2 ไม่ลงตัว

บรรทัด 3 — ใส่กรอบคำตอบ $E = \{2, 4, 6, 8, 10\}$



เช็กกลับ สมาชิกทั้งห้าตัวเป็นบวก เป็นคู่ และไม่เกิน 10; จำนวนถัดไปที่เป็นบวกคู่คือ 12 ซึ่งเกินขอบเขต จึงหยุดได้

ถ้าข้ามคำว่า “จำนวนเต็มบวก” แล้วใส่ 0 หรือ −2 ทั้งสองตัวเป็นคู่จริง แต่ไม่ผ่านทุกเงื่อนไข การผ่านข้อใดข้อหนึ่งยังไม่พอสำหรับข้อความที่เชื่อมด้วย “และ”

ลงมือทำตามนี้

1. ขีดเส้นใต้ชนิดของค่าที่เริ่มตรวจ
2. แยกเงื่อนไขทีละข้อ
3. รับเฉพาะค่าที่ผ่านครบ
4. ถ้าแจกแจงไม่สิ้นสุด ใช้เงื่อนไขหรือจุดไข่ปลาโดยให้รูปแบบชัดเจน

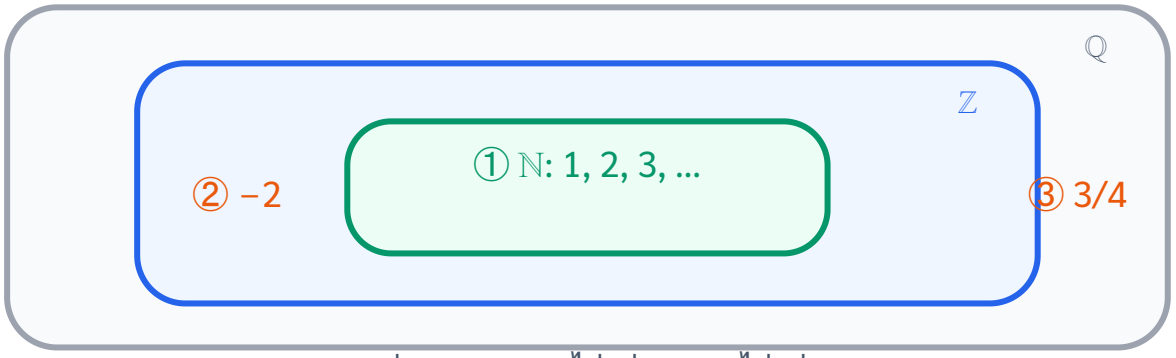
1.3 เลขตัวเดียวอยู่ได้หลายกล่อง (ต้นทาง หน้า 4)

เลข 3 ใช้นับของได้ เลข −2 ใช้บอกอุณหภูมิต่ำกว่าศูนย์ได้ ส่วน $3/4$ ใช้บอกส่วนของเค้กได้ ทั้งสามเป็นตัวเลข แต่ไม่ได้อยู่ในกลุ่มชนิดเดียวกันทุกกลุ่ม

ลองคิดก่อนเปิดเฉลย

ถ้ารับเฉพาะเลขที่ใช้เริ่มนับ 1, 2, 3, ... จะรับ −2 ไหม? ถ้าขยายให้รับเลขไม่มีเศษทั้งบวก ลบ และศูนย์ จะรับไหม?

เฉลย กลุ่มแรกไม่รับ −2 แต่กลุ่มที่ขยายรับ −2 การเปลี่ยนขอบเขตทำให้คำตอบเรื่องสมาชิกเปลี่ยนได้



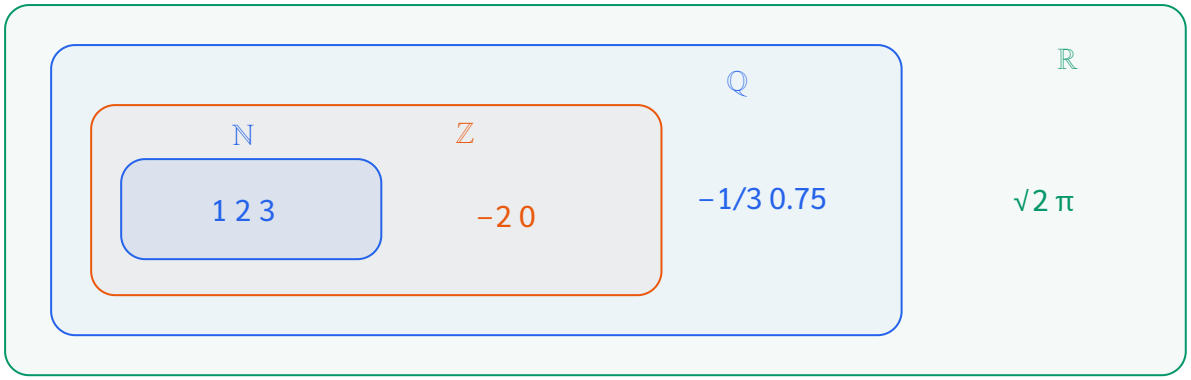
3 อยู่ทุกกรอบ · −2 ไม่อยู่ ℕ · 3/4 ไม่อยู่ ℤ

กลุ่ม 1, 2, 3, ... เรียกว่า **จำนวนธรรมชาติ (natural numbers)** ใช้ $\mathbb{N}$ ในวิชานี้เริ่มที่ 1 ตามต้นทาง กลุ่มเลขไม่มีเศษที่รวมลบและศูนย์เรียกว่า **จำนวนเต็ม (integers)** ใช้ $\mathbb{Z}$ ส่วน $\mathbb{Z}^+$ คือจำนวนเต็มบวก

จำนวนที่เขียนเป็น p/q โดย p และ q เป็นจำนวนเต็ม และ $q \neq 0$ เรียกว่า **จำนวนตรรกยะ (rational numbers)** ใช้ $\mathbb{Q}$ เช่น $-1/3$ และ $0.75 = 3/4$ จำนวนเต็มก็อยู่ในกลุ่มนี้ เพราะเขียนได้เป็นตัวมันเองหารด้วย 1

จำนวนบนเส้นจำนวนทั้งหมดเรียกว่า **จำนวนจริง (real numbers)** ใช้ $\mathbb{R}$ กลุ่มนี้รวมจำนวนที่เขียนเป็นเศษส่วนจำนวนเต็มได้และเขียนไม่ได้ เช่น $\sqrt{2}$ กับ π ซึ่งเรียกว่า **จำนวนอตรรกยะ (irrational numbers)**

① เริ่มนับ → ② ขยายชนิด → ③ เส้นจำนวนทั้งหมด



โจทย์ เลข 0.75 อยู่ในกลุ่มใดบ้างจาก $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$?

บรรทัด 1 — ตรวจเลขไม่มีเศษ 0.75 ไม่ใช่จำนวนเต็ม จึงไม่อยู่ใน $\mathbb{Z}$ และไม่อยู่ใน $\mathbb{N}$

บรรทัด 2 — เขียนเป็นเศษส่วน $0.75 = 75/100 = 3/4$ ตัวเศษและตัวส่วนเป็นจำนวนเต็ม ตัวส่วนไม่เป็นศูนย์ จึงอยู่ใน $\mathbb{Q}$

บรรทัด 3 — ใช้กล่องใหญ่ จำนวนตรรกยะทุกจำนวนอยู่บนเส้นจำนวน จึงอยู่ใน $\mathbb{R}$ ด้วย

เช็กกลับ $3 \div 4 = 0.75$ ตรงกับค่าตั้งต้น จึงไม่ได้เปลี่ยนจำนวนเพื่อให้เข้ากลุ่ม

อย่าคิดว่าต้องเลือกกลุ่มเดียว เลข 3 อยู่ในทั้งสี่กลุ่มได้ เพราะกล่องซ้อนกัน อย่าใส่ 0 ลงใน $\mathbb{N}$ ของวิชานี้: บางตำราเริ่มที่ 0 แต่ต้นทางนี้กำหนดเริ่มที่ 1

ลงมือทำตามนี้

1. ตรวจว่ากำหนดกลุ่มจำนวนแบบใด
2. ตรวจความเป็นจำนวนเต็มก่อน
3. ถ้าเป็นเศษส่วนจำนวนเต็มที่ส่วนไม่เป็นศูนย์ ให้รับเข้า $\mathbb{Q}$
4. ไล่กล่องใหญ่ที่ครอบมัน แล้วหยุดเมื่อครบกลุ่มที่โจทย์ถาม

1.4 ไม่มีของ กับมีเลขศูนย์ (ต้นทาง หน้า 4, 6)

กล่องใบหนึ่งไม่มีของเลย อีกใบมีบัตรเลข 0 หนึ่งใบ ทั้งคู่ดูเกี่ยวกับ “ศูนย์” แต่ถ้าเทกล่องลงบนโต๊ะ ใบแรกไม่มีอะไรตกลงมา ใบที่สองมีบัตรตกลงมาหนึ่งใบ

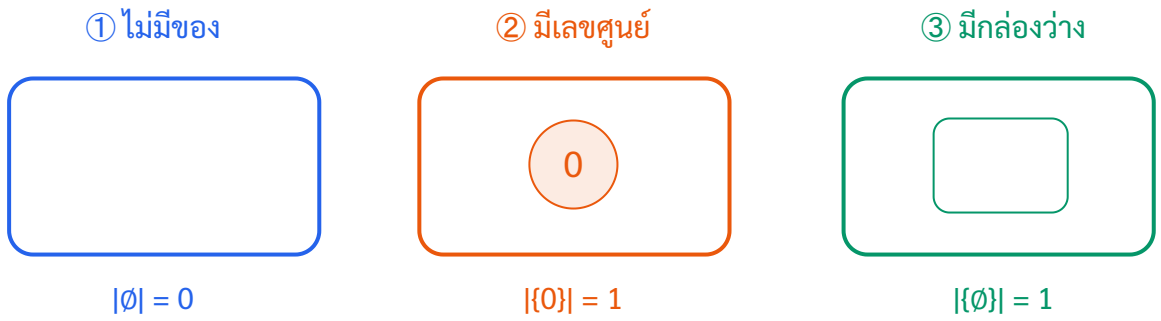
ลองคิดก่อนเปิดเฉลย

กล่องว่าง กับกล่องที่มีเลข 0 เหมือนกันไหม? ถ้าใส่กล่องว่างใบเล็กลงในกล่องใหญ่ กล่องใหญ่มีของหรือยัง?

เฉลย ไม่เหมือนกัน กล่องที่มีเลข 0 มีสมาชิกหนึ่งตัว ส่วนกล่องใหญ่ที่บรรจุกล่องว่างก็มีสมาชิกหนึ่งชิ้น คือกล่องว่างทั้งใบ

กลุ่มที่ไม่มีสมาชิกเรียกว่า **เซตว่าง (empty set)** เขียน $\varnothing$ หรือ $\{\}$ มีเซตว่างเพียงเซตเดียว เพราะไม่มีสมาชิกที่จะทำให้เซตว่างสองใบต่างกัน

จำนวนสมาชิกที่แตกต่างกันของเซตจำกัดเรียกว่า **จำนวนสมาชิก (cardinality)** ใช้ $|A|$ ดังนั้น $|\varnothing| = 0$, $|\{0\}| = 1$, และ $|\{\varnothing\}| = 1$ ปีกกาชั้นนอกกำหนดว่ากำลังนับของระดับไหน



โจทย์ ให้ $A = \{x \in \mathbb{Z}^+ \mid x < 5\}$ จงหา $|A|$

บรรทัด 1 — เปิดเงื่อนไข $\mathbb{Z}^+$ เริ่มที่ 1 และ $x < 5$ ไม่รับ 5 จึง $A = \{1, 2, 3, 4\}$

บรรทัด 2 — นับสมาชิกต่างกัน นับ $1 \to 2 \to 3 \to 4$ ได้ $|A| = 4$



เช็กกลับ เลข 1–4 ผ่านเงื่อนไขครบ เลข 0 ไม่เป็นบวก เลข 5 ไม่เล็กกว่า 5 จึงไม่มีตัวที่ตกหล่นระหว่างขอบเขต

$\{\varnothing\}$ ไม่ใช่เซตว่าง เพราะปีกกาชั้นนอกมีสมาชิกเป็นเซตอยู่หนึ่งตัว และ $\{1, 1, 2\}$ มีจำนวนสมาชิก 2 ไม่ใช่ 3 ต้องตัดชื่อซ้ำก่อนนับ

ลงมือทำตามนี้

1. หาเส้นปีกกาชั้นนอก
2. มองของแต่ละชิ้นภายในชั้นนั้นเป็นหนึ่งหน่วย แม้เป็นเซตทั้งเซต
3. ตัดสมาชิกที่ซ้ำแล้วค่อยนับ
4. กล่องว่างจริงต้องไม่มีสมาชิกแม้แต่ชิ้นเดียว

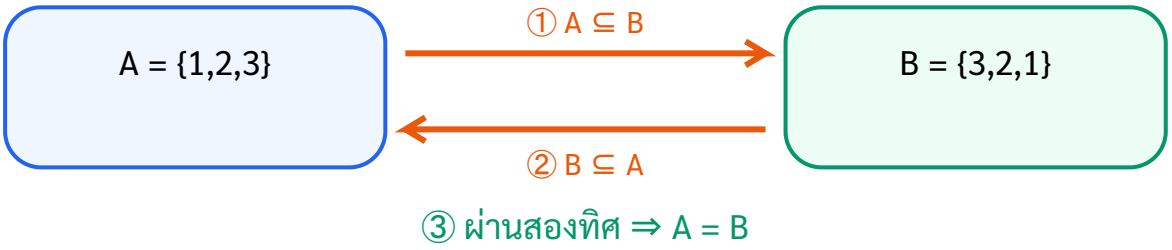
1.5 เท่ากันต้องตรวจสองทาง (ต้นทาง หน้า 5)

กล่อง A มี 1, 2, 3 ส่วนกล่อง B มี 3, 1, 2 ถ้าหยิบเลขใดจาก A ก็หาเลขเดียวกันใน B ได้ ถ้าหยิบจาก B ก็หาใน A ได้ด้วย เราจะใช้การตรวจสองทิศนี้บอกว่าของในกล่องตรงกัน

ลองคิดก่อนเปิดเฉลย

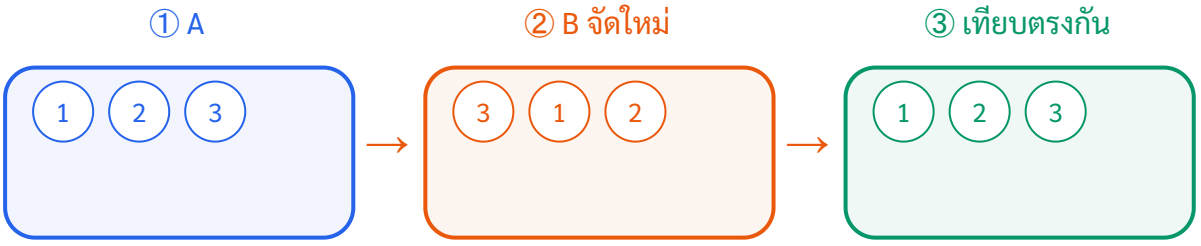
ถ้าเปลี่ยน B เป็น $\{1, 3\}$ จะยังตรงกับ A ไหม? ชี้เลขเพียงตัวเดียวที่ทำให้ตัดสินได้

เฉลย ไม่ตรงกัน เลข 2 อยู่ใน A แต่ไม่อยู่ใน B เพียงตัวนี้ก็หักล้างได้แล้ว



เซตสองเซต **เท่ากัน (equality)** เมื่อมีสมาชิกเหมือนกันทุกตัว ใช้ $A = B$ ถ้ามีสมาชิกต่างกันแม้ตัวเดียวใช้ $A \neq B$ วิธีตรวจคือ “ทุกตัวของ A อยู่ใน B” และ “ทุกตัวของ B อยู่ใน A” ต้องครบสองทาง

ทำไมต้องตรวจย้อนกลับ? ถ้า A มีแค่ 1 แต่ B มี 1 กับ 2 การตรวจจาก A ไป B ผ่าน ทว่า B ยังมี 2 เกินมา การตรวจอีกทางจึงป้องกันสมาชิกส่วนเกิน



โจทย์ ก ให้ $A = \{1, 2, 3, 2\}, B = \{x \in \mathbb{Z}^+ \mid x < 4\}$ จงตัดสินว่าเท่ากันไหม

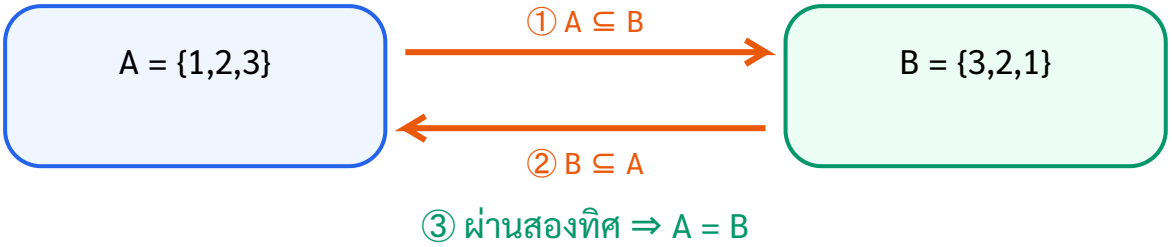
บรรทัด 1 — ลบชื่อซ้ำของ A $A = \{1, 2, 3\}$

บรรทัด 2 — แจกแจง B จำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่า 4 คือ 1, 2, 3 จึง $B = \{1, 2, 3\}$

บรรทัด 3 — ตรวจสองทิศ 1, 2, 3 ของ A พบใน B ครบ และ 1, 2, 3 ของ B พบใน A ครบ จึง $A = B$

เช็กกลับ การเขียน 2 ซ้ำใน A ไม่เพิ่มสมาชิก และไม่มี 4 ใน B เพราะโจทย์ใช้ $<$ ไม่ใช่ $\leq$

มีจำนวนสมาชิกเท่ากันยังไม่พอ เช่น $\{1, 2\}$ กับ $\{1, 3\}$ มีสองสมาชิกเท่ากัน แต่เลข 2 กับ 3 ไม่ตรงกัน



③ ผ่านสองทิศ ⇒ A = B

ลงมือทำตามนี้

1. ทำให้เห็นสมาชิกของแต่ละเซต
2. ตรวจจากซ้ายไปขวาว่ามีตัวขาดไหม
3. ตรวจย้อนจากขวาไปซ้ายว่ามีตัวเกินไหม
4. หยุดทันทีที่พบตัวที่อยู่เพียงฝั่งเดียว: ไม่เท่ากัน; ถ้าครบทั้งสองทางจึงสรุปเท่ากัน

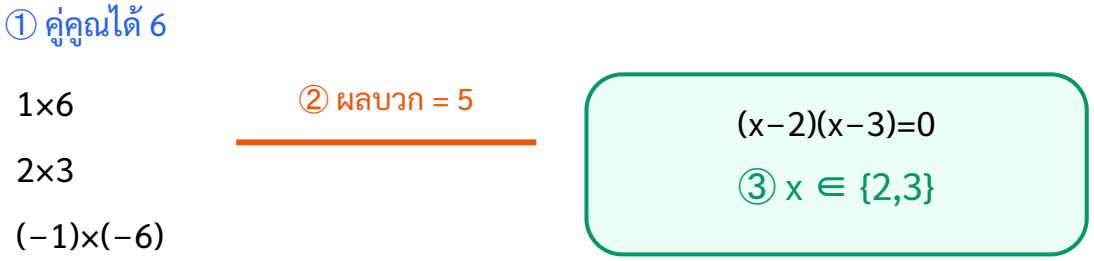
1.6 กล่องที่นิยามด้วยสมการ (ต้นทาง หน้า 5)

กล่องหนึ่งรับเลขที่ทำให้ $x^2 + x - 6 = 0$ อีกกล่องมีเลข 2 กับ −3 เราจะตรวจว่าตรงกันได้โดยหาเลขที่ผ่านสมการให้ครบ ไม่ใช่ทดลองเลขสองตัวแล้วรีบสรุปว่าไม่มีตัวอื่น

ลองคิดก่อนเปิดเฉลย

แทน x ด้วย 2 ใน $x^2 + x - 6$ ได้เท่าไร? ถ้าแทนด้วย −3 ต้องใส่วงเล็บตรงไหน?

เฉลย $2^2 + 2 - 6 = 0$ และ $(-3)^2 + (-3) - 6 = 9 - 3 - 6 = 0$ ต้องใส่วงเล็บรอบ −3 เพื่อยกกำลังจำนวนลบทั้งจำนวน



แทน 2 และ 3 กลับในสมการเดิมแล้วได้ศูนย์ทั้งคู่

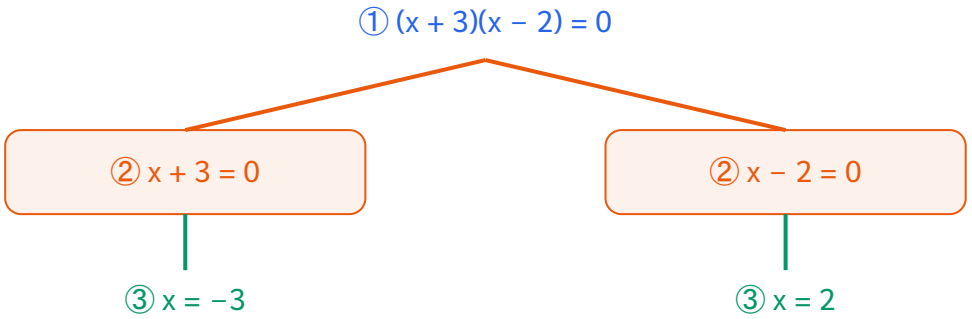
นี่คือการหา **เซตคำตอบ (solution set)** ของสมการ หมายถึงเก็บทุกค่าที่แทนแล้วทำให้สมการจริง เราต้องมีทั้งเหตุผลว่า “ค่าที่เก็บใช้ได้” และ “ไม่มีค่าอื่น”

ผลคูณเป็นศูนย์ได้ก็ต่อเมื่ออย่างน้อยหนึ่งตัวประกอบเป็นศูนย์ เพราะถ้าตัวประกอบทั้งสองไม่เป็นศูนย์ ผลคูณจะไม่เป็นศูนย์ หลักนี้ทำให้หาได้ครบโดยไม่ต้องลองจำนวนจริงทุกตัว

โจทย์ ให้ $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 6 = 0\}$, $B = \{2, -3\}$ พิจารณา $A = B$

บรรทัด 1 — แยกตัวประกอบ $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$ เพราะกระจายได้ $x^2 - 2x + 3x - 6 = x^2 + x - 6$

บรรทัด 2 — เปิดสองทาง $(x + 3)(x - 2) = 0$ จึง $x + 3 = 0$ หรือ $x - 2 = 0$



บรรทัด 3 — แก้แต่ละทาง ลบ 3 จากสองข้างของทางแรกได้ $x = -3$; บวก 2 สองข้างของทางหลังได้ $x = 2$

บรรทัด 4 — ประกอบเป็นเซต $A = \{-3, 2\} = \{2, -3\} = B$ ลำดับไม่ทำให้เซตต่างกัน

เช็กกลับ แทน −3 ได้ 9−3−6=0; แทน 2 ได้ 4+2−6=0 ทั้งสองผ่าน และการแยกตัวประกอบครอบคลุมทุกทางที่ผลคูณเป็นศูนย์แล้ว

ถ้าแบ่งสมการด้วย $x + 3$ ทันที จะตัดกรณี $x = -3$ ทิ้ง เพราะตอนนั้นตัวหารเป็นศูนย์ ต้องแยกสองทางก่อนไม่ลบคำตอบออกระหว่างทำ

ลงมือทำตามนี้

1. แปลงเงื่อนไขเป็นสมการที่จัดการได้
2. แยกกรณีให้ครบโดยระวังการหารด้วยสิ่งที่อาจเป็นศูนย์
3. รวมค่าที่ได้เป็นเซต
4. แทนกลับทุกค่า และอธิบายว่าเส้นทางแก้ครอบคลุมค่าอื่นแล้ว

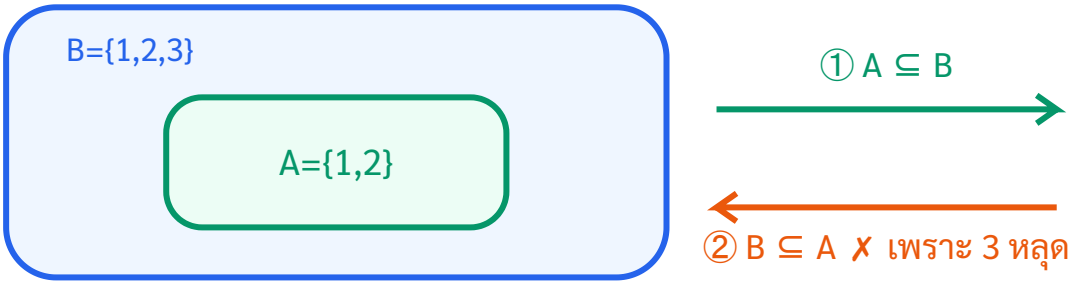
1.7 อยู่ข้างในทั้งกลุ่ม (ต้นทาง หน้า 6–7)

มีกล่องใหญ่ใส่ 1, 2, 3 เราหยิบแค่ 1 กับ 2 มาทำกล่องเล็ก ทุกของในกล่องเล็กมาจากกล่องใหญ่ แต่กล่องใหญ่ยังมี 3 ที่ไม่ได้หยิบ

ลองคิดก่อนเปิดเฉลย

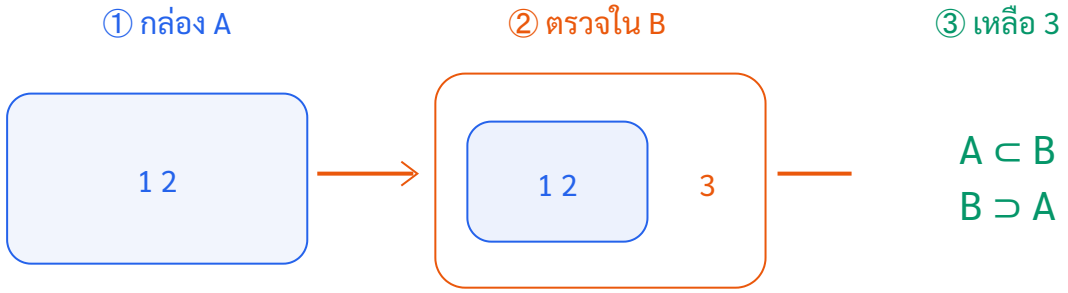
ถ้ากล่องเล็กเป็น $\{1, 4\}$ ยังพูดได้ไหมว่า “ทุกตัวมาจาก $\{1, 2, 3\}$”? ชี้ตัวที่ทำให้ไม่ผ่าน

เฉลย พูดไม่ได้ เพราะ 4 ไม่มีในกล่องใหญ่ ส่วน 1 ที่ผ่านอยู่แล้วช่วยแก้ความผิดของ 4 ไม่ได้



ถ้าทุกสมาชิกของ A อยู่ใน B เราเรียก A ว่า **สับเซตหรือเซตย่อย (subset)** ของ B เขียน $A \subseteq B$ กล่องใหญ่ B เรียกว่า **ซูเปอร์เซต (superset)** ของ A เขียน $B \supseteq A$ ทั้งสองแบบพูดความสัมพันธ์เดียวกัน

ถ้า A เป็นเซตย่อยของ B แต่ไม่เท่ากัน เรียกว่า **เซตย่อยแท้ (proper subset)** เขียน $A \subset B$ ตามสัญลักษณ์ของเลกเชอร์ จึงต้องตรวจสองเรื่อง: ไม่มีของหลุดจาก B และ B มีของเหลืออย่างน้อยหนึ่งตัว



โจทย์ $A = \{1, 2\}, B = \{1, 2, 3\}$ ตรวจ $A \subseteq B$, $A \subset B$, $B \subseteq A$

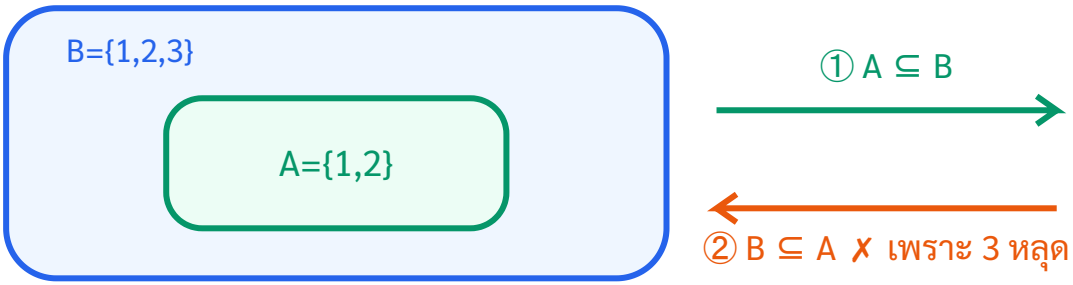
บรรทัด 1 — ตรวจจาก A 1 พบใน B และ 2 พบใน B ครบทุกตัวของ A จึง $A \subseteq B$ จริง

บรรทัด 2 — ตรวจความแท้ 3 อยู่ใน B แต่ไม่อยู่ใน A จึง $A \neq B$ เมื่อรวมกับบรรทัดแรก ได้ $A \subset B$ จริง

บรรทัด 3 — กลับทาง 3 ของ B ไม่อยู่ใน A จึง $B \subseteq A$ เท็จ

เซ็กกลับ ทิศของเครื่องหมายเปิดไปหากล่องที่ครอบสมาชิกได้ทั้งหมด การกลับทิศจึงไม่ได้รับประกันว่าจะจริง

$\{1,2\} \subseteq \{1,2\}$ จริง แต่ $\{1,2\} \subset \{1,2\}$ เท็จ เพราะไม่มีสมาชิกเหลือในกล่องใหญ่ เครื่องหมายมีเส้นเท่ากับยอมให้เซตเท่ากัน



ลงมือทำตามนี้

1. กำหนดให้ชัดว่ากำลังตรวจจากเซตไหนไปเซตไหน
2. ตรวจทุกสมาชิกของเซตทางซ้าย
3. ถ้าถาม “แท้” ต้องหาของทางขวาที่ไม่อยู่ทางซ้ายด้วย
4. หยุดเมื่อพบตัวหลุด: ไม่เป็นเซตย่อย; ถ้าครบแล้วจึงพิจารณาความแท้

1.8 กล่องว่างอยู่ข้างในได้อย่างไร? (ต้นทาง หน้า 7)

ให้กล่อง X มี a, b, c ถ้าหยิบทุกชิ้นของ X แล้วถามว่าอยู่ใน X ไหม คำตอบผ่านทุกชิ้น ถ้าเริ่มจากกล่องว่าง จะไม่มีชิ้นไหนให้หยิบมาแย้งได้

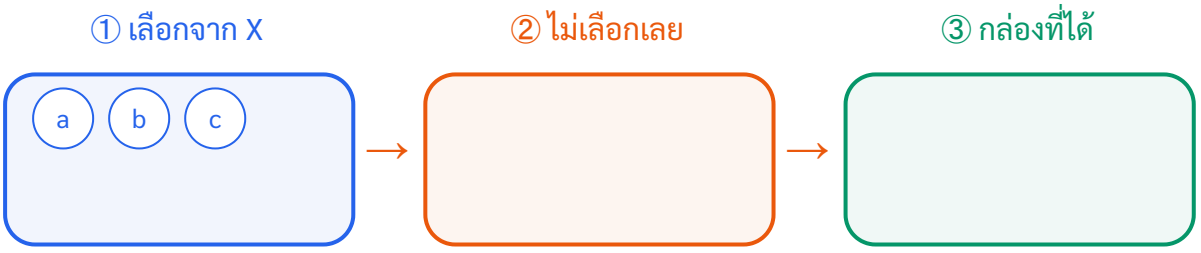
ลองคิดก่อนเปิดเฉลย

จะหาของจากกล่องว่างที่ “ไม่อยู่ใน X” ได้ไหม? ถ้าตรวจ X กับตัวมันเองจะมีของหลุดไหม?

เฉลย หาไม่ได้เพราะไม่มีของให้เป็นตัวแย้ง และ X กับตัวมันเองไม่มีของหลุด

จึงได้กฎ $X \subseteq X$ กับ $\varnothing \subseteq X$ สำหรับทุกเซต X กฎหลังไม่ได้บอกว่ามี “สมาชิกว่าง” อยู่ใน X แต่บอกว่าทุกสมาชิกของเซตว่างผ่านเงื่อนไข เพราะไม่มีสมาชิกที่ทำให้ผิด

จากความหมายของเซตย่อย ถ้า $X \subseteq Y$ และ $Y \subseteq X$ ทั้งสองกล่องไม่มีของต่างกัน จึง $X = Y$ นี่คือเหตุผลเดียวกับการตรวจความเท่ากันสองทางในหัวข้อก่อน



โจทย์ ให้ $X = \{a, b, c\}$ ตัดสิน $\varnothing \subseteq X$, $\varnothing \in X$, $X \subseteq X$

บรรทัด 1 — ตรวจเซตย่อย เซตว่างไม่มีสมาชิกที่จะหลุดจาก X จึง $\varnothing \subseteq X$ จริง

บรรทัด 2 — ตรวจสมาชิกทั้งชิ้น สมาชิกที่ระบุของ X คือ a, b, c ไม่มีเซตว่างเป็นหนึ่งในนั้น จึง $\varnothing \in X$ เท็จ

บรรทัด 3 — ตรวจตนเอง a, b, c ทุกตัวอยู่ใน X จึง $X \subseteq X$ จริง

เช็กกลับ บรรทัด 1 ใช้การกระจายตรวจสมาชิกภายในกลุ่มทางซ้าย แต่บรรทัด 2 ถามว่ากลุ่มทั้งใบเป็นของหนึ่งชิ้นใน X หรือไม่ จึงเป็นคนละคำถาม

อย่าเปลี่ยน $\subseteq$ เป็น $\in$ ตัวอย่าง $1 \in \{1,2\}$ จริง และ $\{1\} \subseteq \{1,2\}$ จริง แต่ $\{1\} \in \{1,2\}$ เท็จ เพราะในกล่องมีเลข ไม่มีกล่องย่อยเป็นสมาชิก



ลงมือทำตามนี้

1. ดูสัญลักษณ์ก่อน: สมาชิกหรือเซตย่อย
2. ถ้าเป็นสมาชิก ให้หาของทางซ้ายทั้งชิ้น
3. ถ้าเป็นเซตย่อย ให้เปิดกลุ่มทางซ้ายแล้วตรวจทีละสมาชิก
4. เมื่อพิสูจน์ความเท่ากัน ต้องตรวจเซตย่อยครบสองทิศ

1.9 เก็บกล่องที่เลือกได้ทุกแบบ (ต้นทาง หน้า 7–8)

มีบัตร a กับ b เราจะทำกล่องใหม่โดยตัดสินใจทีละใบว่าจะใส่หรือไม่ใส่ ถ้าไม่ใส่ทั้งคู่ได้กล่องว่าง ถ้าใส่ทั้งคู่ได้กล่องเดิม ไม่มีข้อบังคับว่าต้องหยิบอย่างน้อยหนึ่งใบ

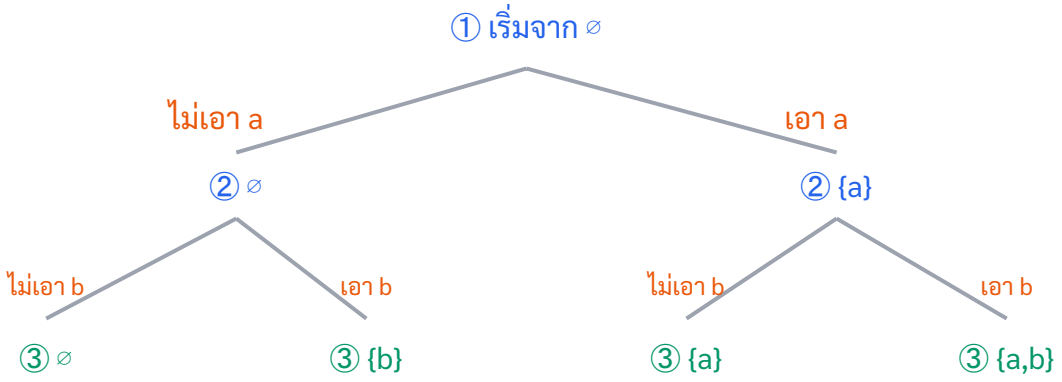
ลองคิดก่อนเปิดเฉลย

เขียนกล่องที่สร้างได้จาก a กับ b ให้ครบ ลองแยกตาม “ไม่เอา a / เอา a” แล้วในแต่ละทางแยก “ไม่เอา b / เอา b”

เฉลย ได้ $\varnothing, \{b\}, \{a\}, \{a, b\}$ ครบสี่กล่อง ถ้าไล่แบบแยกทางนี้ จะไม่ตกกล่องว่างและไม่เขียนกล่องเดิมซ้ำ

การรวบรวมเซตย่อยทั้งหมดของ S ไว้ในเซตใหญ่ใบเดียว เรียกว่า **เพาเวอร์เซต (power set)** ใช้ $\mathcal{P}(S)$ ดังนั้น เมื่อ $S = \{a, b\}$ จะได้ $\mathcal{P}(S) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ สมาชิกของเพาเวอร์เซตเป็น “เซตทั้งใบ”

แต่ละสมาชิกมีสองทางเลือกคือเอาหรือไม่เอา ถ้า S มี n สมาชิก จึงมี 2^n ทางเลือกทั้งหมด แต่ละทางสร้างเซตย่อยไม่ซ้ำกัน เพราะถ้าทางเลือกต่างกันอย่างน้อยหนึ่งตำแหน่ง เซตที่ได้จะต่างกันตรงสมาชิกนั้น

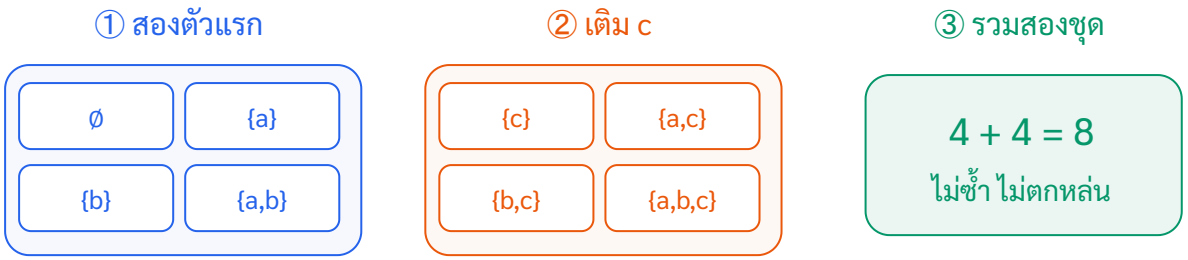


โจทย์จากตัวอย่าง 1.1 ให้ $A = \{a, b, c\}$ จงแจกแจงเซตย่อยทั้งหมด

บรรทัด 1 — เริ่มจากผลสองตัวแรก สำหรับ a, b มี $\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$

บรรทัด 2 — ไม่เอา c เก็บสี่กล่องเดิมไว้: $\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$

บรรทัด 3 — เอา c เติม c ให้แต่ละกล่องเดิม: $\{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$



บรรทัด 4 — รวมโดยเรียงขนาด $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$

เช็กกลับ ทุกกล่องใช้เฉพาะ a, b, c; ไม่มีกล่องซ้ำ; นับได้ $2^3 = 8$ กล่อง ตรงกับจำนวนทางเลือก

$\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$ ไม่ใช่ $\varnothing$ เพราะ “ไม่เลือกอะไรเลย” ยังเป็นเซตย่อยหนึ่งแบบ จึงมี $2^0 = 1$ สมาชิก อีกข้อผิดคือเขียน a เป็นสมาชิกของ $\mathcal{P}(S)$ แทน $\{a\}$: เพาเวอร์เซตรับกล่องทั้งใบ

ลงมือทำตามนี้

1. ลบสมาชิกซ้ำของเซตตั้งต้นก่อน
2. เริ่มจากเซตว่างหนึ่งแบบ
3. เมื่อเจอสมาชิกใหม่ คัดลอกแบบเดิมแล้วเติมสมาชิกนั้นในสำเนาทุกแบบ
4. รวมชุดไม่เอาและชุดเอา ทำซ้ำจนครบสมาชิก
5. ตรวจว่าจำนวนกล่องเป็น $2^{|S|}$ และทุกกล่องเป็นเซตย่อยจริง

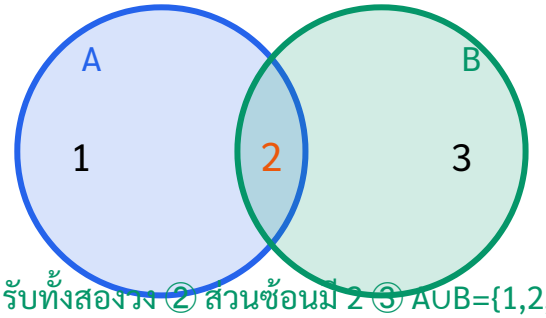
1.10 รับอย่างน้อยหนึ่งกล่อง (ต้นทาง หน้า 9)

รายชื่อกล่อง A มี 1, 2 กล่อง B มี 2, 3 ถ้ารับเลขที่พบในอย่างน้อยหนึ่งกล่อง เลข 2 ผ่านแม้พบทั้งสองกล่อง ส่วนเลข 4 ไม่ผ่านเพราะไม่พบที่ไหนเลย

ลองคิดก่อนเปิดเฉลย

จาก A และ B ข้างต้น รับเลข 1 ไหม? รับเลข 2 กี่ครั้ง? เขียนรายชื่อที่ผ่าน

เฉลย รับ 1 เพราะอยู่ใน A; รับ 2 เป็นสมาชิกเพียงครั้งเดียว; ได้ $\{1, 2, 3\}$



① รับทั้งสองวง ② ส่วนซ้อนมี 2 ③ AUB={1,2,3}

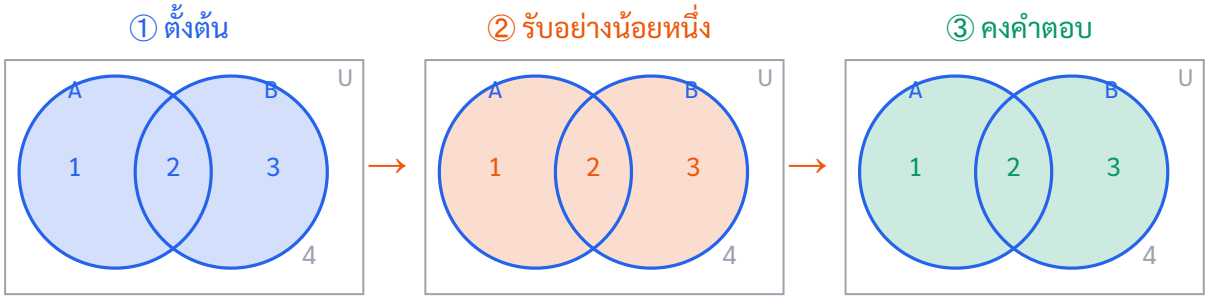
การรวมสมาชิกที่อยู่ใน A หรือ B หรือทั้งสอง เรียกว่า **ยูเนียน (union)** เขียน $A \cup B$ คำว่า “หรือ” ของเซตยอมให้ผ่านทั้งสองเงื่อนไขด้วย

กรอบใหญ่ที่กำหนดของทั้งหมดที่กำลังพิจารณา เรียกว่า **เอกภพสัมพัทธ์ (universal set)** ใช้ U ตัวอย่างนี้กำหนด $U = \{1, 2, 3, 4\}$ กรอบสี่เหลี่ยมคือ U วงซ้ายคือ A วงขวาคือ B ภาพแบบนี้เรียกว่า **แผนภาพเวนน์ (Venn diagram)** จุดที่อยู่สองวงพร้อมกันแสดงสมาชิกที่ทั้งสองเซตมีร่วมกัน

โจทย์ $U = \{1, 2, 3, 4\}, A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\}$ หา $A \cup B$

บรรทัด 1 — เริ่มจาก A เก็บ 1, 2 ก่อน

บรรทัด 2 — เปิดดู B พบ 2 แต่มีแล้วจึงไม่เพิ่ม; พบ 3 ซึ่งยังไม่มีจึงเพิ่ม



บรรทัด 3 — เขียนผล $A \cup B = \{1, 2, 3\}$

เช็กกลับ 1 พบใน A; 2 พบทั้งสอง; 3 พบใน B; 4 ไม่พบทั้งสองจึงอยู่นอกคำตอบ ตรวจครบ U แล้ว

ถ้าตัด 2 ทิ้งเพราะคิดว่า “หรือ” ห้ามอยู่ทั้งสองกล่อง จะเหลือ $\{1, 3\}$ ซึ่งไม่ใช่ยูเนียน ยูเนียนต้องเก็บส่วนซ้อนกลางด้วย อีกข้อผิดคือเขียน 2 สองครั้งแล้วนับเป็นสองสมาชิก

ลงมือทำตามนี้

1. เขียน U ถ้าโจทย์กำหนด
2. เก็บสมาชิกทุกตัวจากกล่องแรก
3. เพิ่มสมาชิกจากกล่องที่สองเฉพาะตัวที่ยังไม่มี
4. ระบายทั้งสองวงรวมส่วนกลาง แล้วหยุดเมื่อไม่มีของจาก A หรือ B ตกหล่น

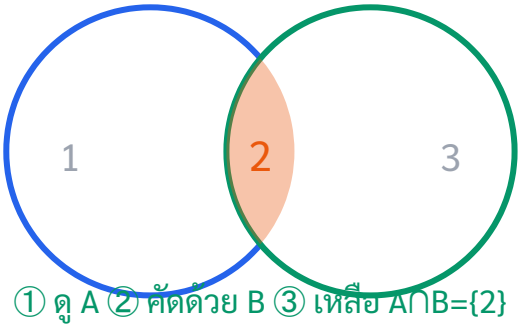
1.11 ต้องอยู่ทั้งสองกล่อง (ต้นทาง หน้า 9)

ใช้กล่องเดิม A มี 1, 2 และ B มี 2, 3 คราวนี้เปลี่ยนกติกา: เลขที่จะผ่านต้องพบในกล่องทั้งสอง เลข 1 ขาดใน B ส่วนเลข 3 ขาดใน A

ลองคิดก่อนเปิดเฉลย

เลขใดผ่านกติกาใหม่? ลองอธิบายว่าทำไมเลข 1 จึงไม่ผ่าน

เฉลย มีเพียง 2 ที่ผ่าน เลข 1 อยู่ใน A จริง แต่ไม่อยู่ใน B จึงยังไม่ผ่านข้อกำหนด “ทั้งสอง”



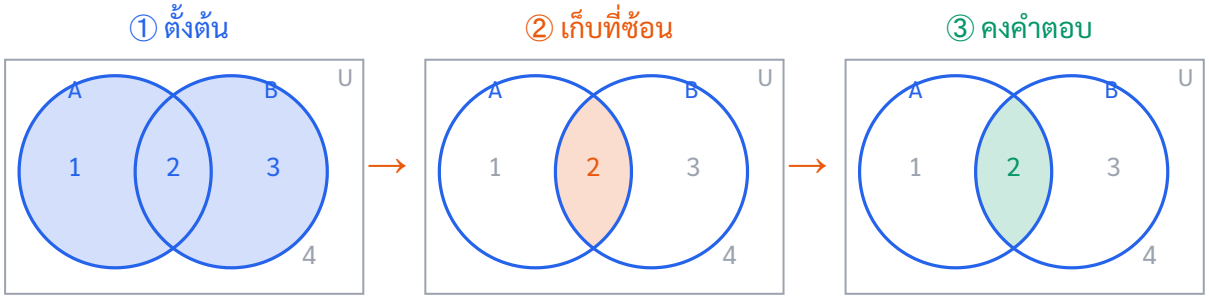
การเก็บสมาชิกที่อยู่ทั้งใน A และ B เรียกว่า **อินเตอร์เซกชันหรือส่วนร่วม (intersection)** เขียน $A \cap B$ ในภาพเวนน์คือบริเวณที่วงทั้งสองทับกัน

คำว่า “และ” ต้องผ่านเงื่อนไขพร้อมกัน จึงไม่ใช่การนำจำนวนสมาชิกของสองกล่องมาบวกกัน วิธีที่ปลอดภัยคือเริ่มจากกล่องหนึ่งแล้วถามทุกตัวว่าอีกกล่องมีด้วยหรือไม่

โจทย์ หา $A \cap B$ เมื่อ $A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\}$

บรรทัด 1 — ตรวจ 1 1 อยู่ใน A แต่ไม่อยู่ใน B จึงตัดออก

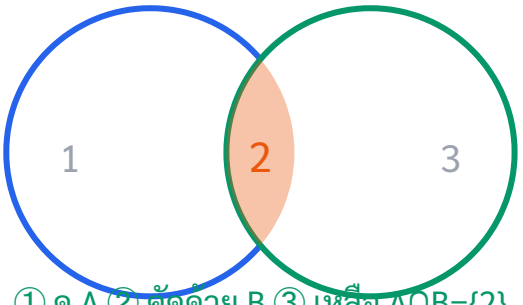
บรรทัด 2 — ตรวจ 2 2 อยู่ใน A และอยู่ใน B จึงเก็บ



บรรทัด 3 — เขียนผล $A \cap B = \{2\}$ ไม่จำเป็นต้องนำ 3 มาพิจารณาเพิ่ม เพราะ 3 ไม่อยู่ใน A จึงไม่อาจผ่านสองเงื่อนไขได้

เช็กกลับ 2 พบในทั้งสองรายชื่อ ส่วน 1 และ 3 ต่างขาดหนึ่งฝั่ง จึงไม่มีสมาชิกอื่นที่ผ่าน

ถ้าหยิบทุกเลขที่เจอใน A “แล้วก็” ใน B จนได้ $\{1, 2, 3\}$ นั่นคือการรวมรายชื่อ ไม่ใช่การตรวจสองเงื่อนไขพร้อมกัน ให้ถามกับสมาชิกตัวเดิมเสมอว่า “ตัวนี้อยู่ทั้งสองที่ไหม?”



① ดู A ② คัดด้วย B ③ เหลือ A∩B={2}

ลงมือทำตามนี้

1. เริ่มจากสมาชิกในกล่องใดกล่องหนึ่ง
2. ตรวจสมาชิกตัวเดียวกันในอีกกล่อง
3. เก็บเมื่อพบทั้งสองที่
4. หยุดเมื่อสมาชิกของกล่องที่เริ่มถูกตรวจครบ แล้วเช็กว่าคำตอบเป็นเซตย่อยของทั้ง A และ B

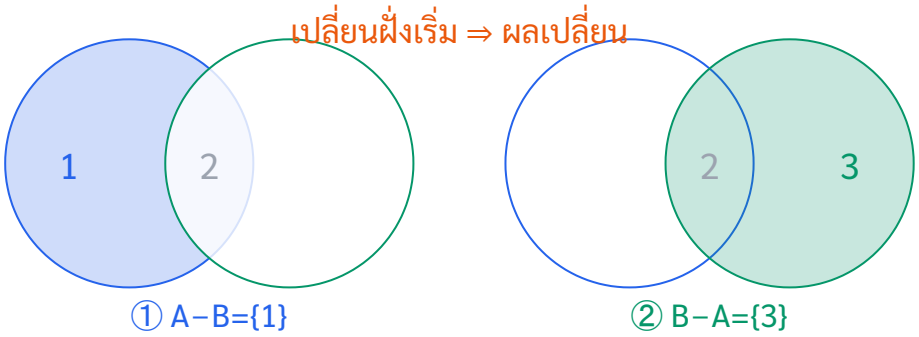
1.12 เริ่มจากกล่องซ้ายแล้วตัดออก (ต้นทาง หน้า 10)

ยังใช้ A มี 1, 2 และ B มี 2, 3 ถ้ากติกาบอกว่า “เริ่มจาก A แล้วเอาตัวที่ B มีออก” เราต้องเริ่มด้วย 1, 2 ก่อน เลข 3 ไม่เคยอยู่ในกล่องเริ่มต้น จึงไม่มีเหตุผลให้เพิ่มเข้ามา

ลองคิดก่อนเปิดเฉลย

จาก A ตัดทุกตัวที่พบใน B จะเหลืออะไร? ถ้าสลับให้เริ่มจาก B จะเหลือเหมือนเดิมไหม?

เฉลย เริ่มจาก A เหลือ 1; เริ่มจาก B เหลือ 3 จึงไม่เหมือนกัน ทิศทางของการตัดออกมีผล

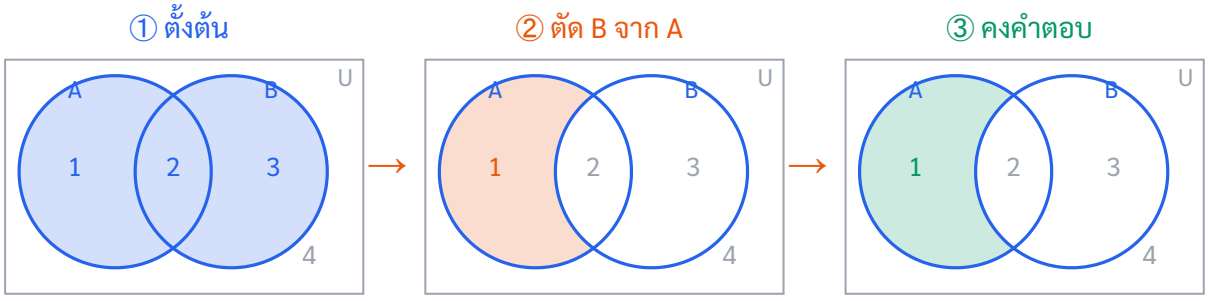


การเก็บสมาชิกของ A ที่ไม่อยู่ใน B เรียกว่า **ผลต่างของเซต (set difference)** เขียน $A - B$ หรือ $A \setminus B$ ความหมายคือ $\{x \mid x \in A \text{ และ } x \notin B\}$

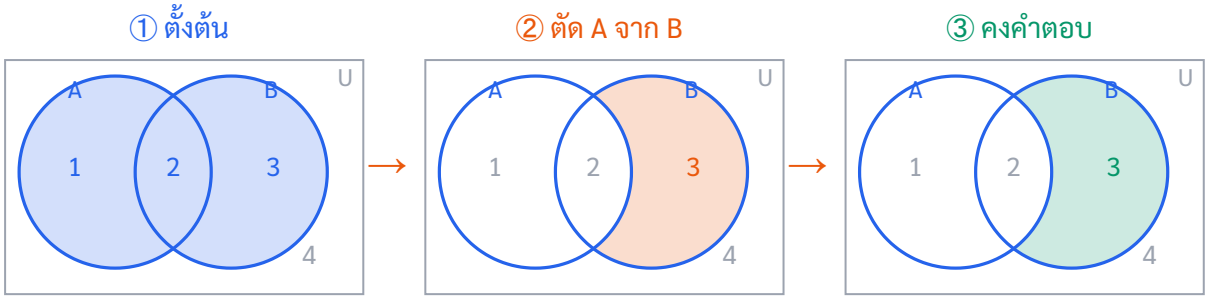
คำว่า “ลบ” ในที่นี้ไม่ได้เอาเลข 2 ไปหักออกจากเลข 1 แต่เอา “สมาชิกที่ตรงกัน” ออกจากรายชื่อ ดังนั้นผลต้องอยู่ภายในเซตทางซ้ายเสมอ

โจทย์ $A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\}$ หา $A - B$ และ $B - A$

บรรทัด 1 — หา A−B เริ่ม 1, 2; 1 ไม่อยู่ใน B จึงเก็บ; 2 อยู่ใน B จึงตัด ได้ $A - B = \{1\}$



บรรทัด 2 — หา B−A เริ่ม 2, 3; 2 อยู่ใน A จึงตัด; 3 ไม่อยู่ใน A จึงเก็บ ได้ $B - A = \{3\}$



เช็กกลับ คำตอบแรก 1 อยู่ A และไม่อยู่ B; คำตอบหลัง 3 อยู่ B และไม่อยู่ A จึงผ่านตามทิศของโจทย์ทั้งคู่

ห้ามสลับลำดับโดยอัตโนมัติ: ตัวอย่างนี้ $A - B \neq B - A$ และการลบเซตว่างต่างจากทำให้กล่องว่าง: $A - \varnothing = A$ เพราะไม่มีอะไรให้ตัด

ลงมือทำตามนี้

1. วงชื่อเซตทางซ้าย: เป็นกล่องเริ่มต้น
2. ตรวจสมาชิกของกล่องเริ่มต้นกับกล่องทางขวา
3. ลบตัวที่พบในทางขวา ไม่เพิ่มของจากทางขวา
4. ตรวจทุกตัวที่เหลือด้วยเงื่อนไข “อยู่ซ้าย ไม่อยู่ขวา” แล้วหยุด

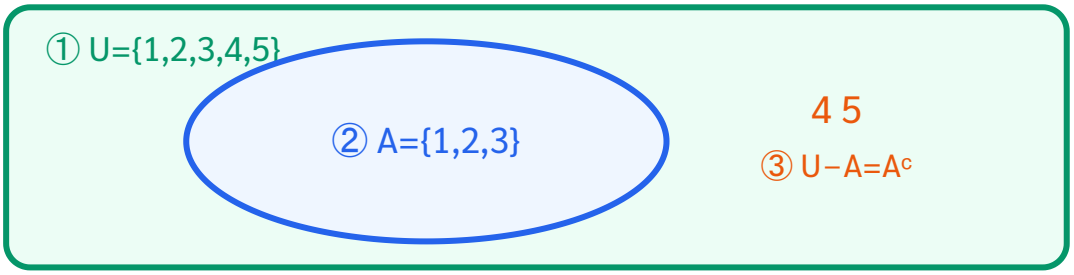
1.13 อยู่นอกกล่อง แต่ยังอยู่ในกรอบใหญ่ (ต้นทาง หน้า 10)

กำหนดว่าห้องนี้พิจารณาเลข 1, 2, 3, 4 เท่านั้น กล่อง A มี 1 กับ 2 ถ้าถามหา “เลขที่ไม่อยู่ใน A” เราเก็บ 3 กับ 4 ไม่ได้เก็บ 100 เพราะ 100 อยู่นอกของที่ห้องนี้กำลังพิจารณา

ลองคิดก่อนเปิดเฉลย

ถ้าขยายของที่พิจารณาเป็น 1, 2, 3, 4, 5 แต่ A ยังมี 1, 2 เท่าเดิม รายชื่อที่อยู่นอก A จะเปลี่ยนอย่างไร?

เฉลย เพิ่ม 5 จึงได้ $\{3, 4, 5\}$ กล่อง A ไม่เปลี่ยน แต่การเปลี่ยนกรอบใหญ่ทำให้คำตอบเปลี่ยน



ห้ามหยิบค่าที่อยู่นอก U เข้ามาในคอมพลีเมนต์

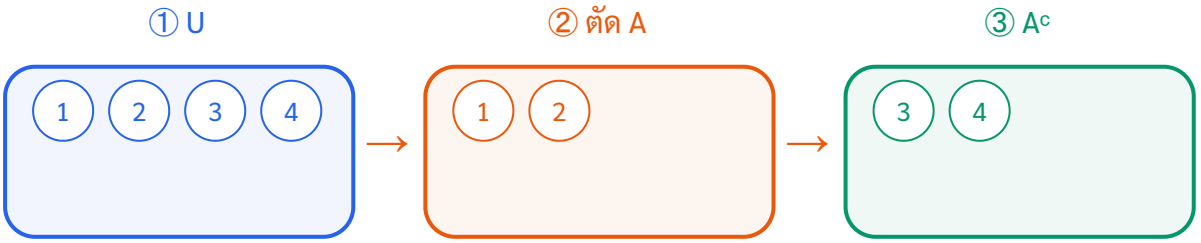
สมาชิกใน U ที่ไม่อยู่ใน A เรียกว่า **ส่วนเติมเต็มหรือคอมพลีเมนต์ (complement)** ของ A เขียน $\overline{A}$ หรือ A^c โดย $A^c = U - A$ ทุกครั้งที่ใช้เครื่องหมายนี้ต้องรู้ว่า U คืออะไร

ในเลกเชอร์มีตัวอย่างใช้ $U = \mathbb{N}$ ถ้า E เป็นกลุ่มจำนวนคู่ภายใน U เช่น 2, 4, 6, ... ส่วนที่เหลือคือจำนวนคี่บวก 1, 3, 5, ... คำว่า “ภายใน U” สำคัญ เพราะจำนวนคู่ติดลบไม่ได้อยู่ในกรอบนี้ตั้งแต่แรก

โจทย์ $U = \{1, 2, 3, 4\}, A = \{1, 2\}$ หา A^c

บรรทัด 1 — เปิดกรอบทั้งหมด เริ่ม $U = \{1, 2, 3, 4\}$

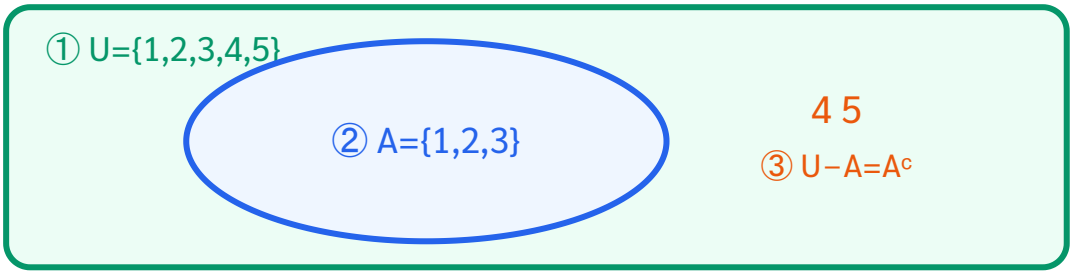
บรรทัด 2 — ตัด A ตัด 1 และ 2 เพราะอยู่ใน A; เก็บ 3 และ 4 เพราะไม่อยู่ใน A



บรรทัด 3 — เขียนผล $A^c = U - A = \{3, 4\}$

เช็กกลับ A กับคำตอบไม่มีสมาชิกซ้ำกัน และเมื่อรวมสองกล่องกลับได้ U พอดี

ถ้าเขียนว่า $A^c = \{3, 4, 5, 6, \ldots\}$ จะใส่สมาชิกนอก U เกินมา เมื่อโจทย์กำหนด U เป็นเซตจำกัด คำว่า “ไม่อยู่ใน A” ไม่ได้หมายถึงทุกอย่างในโลก



ห้ามหยิบค่าที่อยู่นอก U เข้ามาในคอมพลีเมนต์

ลงมือทำตามนี้

1. เขียน U ก่อนเสมอ
2. เริ่มจากสมาชิกของ U ทั้งหมด
3. ตัดสมาชิกใน A ออก
4. เช็กว่าส่วนที่เก็บไม่ชน A และรวมกับ A แล้วได้ U จึงหยุด

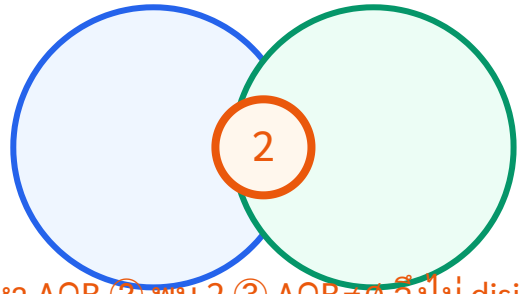
1.14 ไม่มีสมาชิกตรงกันเลย (ต้นทาง หน้า 11)

กล่อง X มี 1, 2 กล่อง Y มี 3, 4 ไม่มีเลขที่พบทั้งสอง ถ้าเอารายชื่อ Y มาตัดออกจาก X จะไม่มีตัวไหนถูกตัดเลย

ลองคิดก่อนเปิดเฉลย

X กับ Y ข้างต้นมีส่วนร่วมอะไร? หลังตัด Y ออกจาก X เหลืออะไร?

เฉลย ส่วนร่วมว่าง ส่วน X หลังตัดยังเป็น $\{1, 2\}$ เพราะไม่มีสมาชิกตรงกันให้ตัด

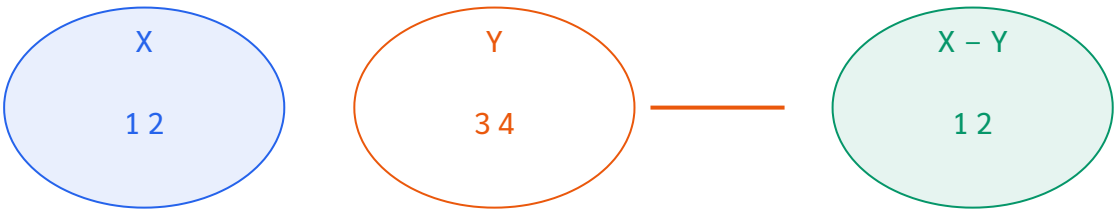


① หา A∩B ② พบ 2 ③ A∩B≠∅ จึงไม่ disjoint

เซตที่ไม่มีสมาชิกร่วมกันเรียกว่า **เซตไม่ทับซ้อน (disjoint sets)** เขียนเงื่อนไข $X \cap Y = \varnothing$ อย่าสับสนกับ “สองเซตไม่เท่ากัน” เพราะเซตที่ไม่เท่ากันอาจยังมีสมาชิกบางตัวร่วมกัน

ถ้า X กับ Y ไม่ทับซ้อน ทุกตัวของ X ย่อมไม่อยู่ใน Y การตัด Y ออกจาก X จึงเก็บ X ทั้งหมดได้ นี่อธิบายคำตอบทั่วไปของตัวอย่าง 1.3: $X - Y = X$

① ไม่มีส่วนซ้อน → ② ไม่มีตัวให้ตัด → ③ X คงเดิม



โจทย์จากตัวอย่าง 1.3 ถ้า X กับ Y ไม่ทับซ้อน จงหา $X - Y$ โดยไม่กำหนดรายชื่อ

บรรทัด 1 — เปิดเงื่อนไข $X \cap Y = \varnothing$ หมายความว่าไม่มีสมาชิกใดอยู่ทั้งสอง

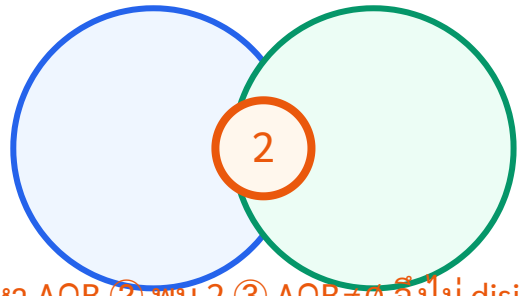
บรรทัด 2 — เลือกตัวหนึ่งจาก X ให้ x เป็นสมาชิกใด ๆ ของ X แล้ว x ไม่อยู่ใน Y มิฉะนั้นจะกลายเป็นสมาชิกส่วนร่วม

บรรทัด 3 — ใช้กติกาผลต่าง x อยู่ X และไม่อยู่ Y จึงทุกตัวของ X ถูกเก็บใน $X - Y$

บรรทัด 4 — กันของเกิน ผลต่าง $X - Y$ รับได้เฉพาะของ X จึงไม่มีสมาชิกอื่นเพิ่ม สรุป $X - Y = X$

เช็กกลับ ตัวอย่าง 1, 2 กับ 3, 4 ให้ผลตามกฎ แต่เหตุผลข้างต้นใช้กับทุกสมาชิกโดยไม่พึ่งเลขเฉพาะ จึงรองรับคำตอบทั่วไป

ถ้า $X = \{1, 2\}, Y = \{2, 3\}$ แม้ $X \neq Y$ แต่มี 2 ร่วมกัน จึงไม่ใช่ disjoint และ $X - Y = \{1\} \neq X$ เห็นว่ากฎต้องใช้เงื่อนไขไม่ทับซ้อนจริง ๆ



① หา A∩B ② พบ 2 ③ A∩B≠∅ จึงไม่ disjoint

ลงมือทำตามนี้

1. หาส่วนร่วมก่อน
2. ส่วนร่วมว่างจึงสรุปว่าไม่ทับซ้อน
3. เมื่อตัดอีกเซตออก ถ้าไม่มีส่วนร่วมให้คงเซตเริ่มต้นทั้งหมด
4. ถ้าพบสมาชิกส่วนร่วมแม้ตัวเดียว ต้องหยุดใช้กฎกรณีไม่ทับซ้อน

1.15 เปลี่ยนกติกา โดยไม่ย้ายสมาชิกผิดที่ (ต้นทาง หน้า 12)

กล่อง X มี a, b, c กล่อง Y มี c, d, e คราวนี้เราจะใช้ภาพเดียวตอบหลายคำถาม แต่เปลี่ยนกติกาคัดสมาชิกทีละอย่าง เพื่อไม่ให้เครื่องหมายปนกัน

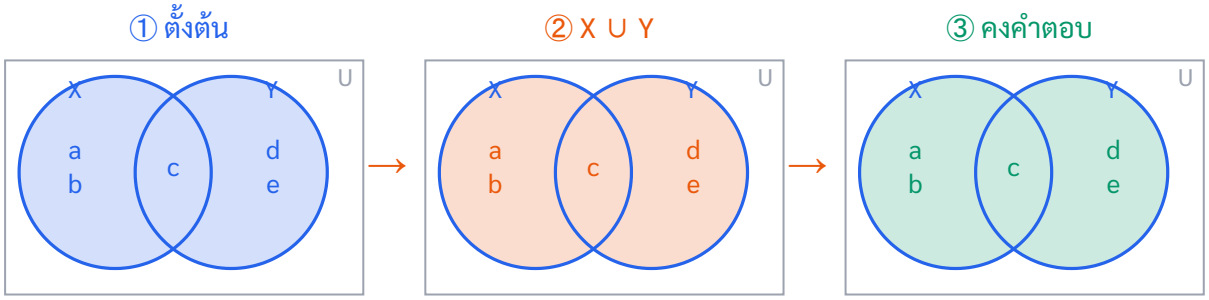
ลองคิดก่อนเปิดเฉลย

ก่อนคำนวณทั้งหมด ชี้ตัวที่อยู่ทั้งสองกล่อง แล้วทายว่าทั้งสองกล่องไม่ทับซ้อนกันหรือไม่

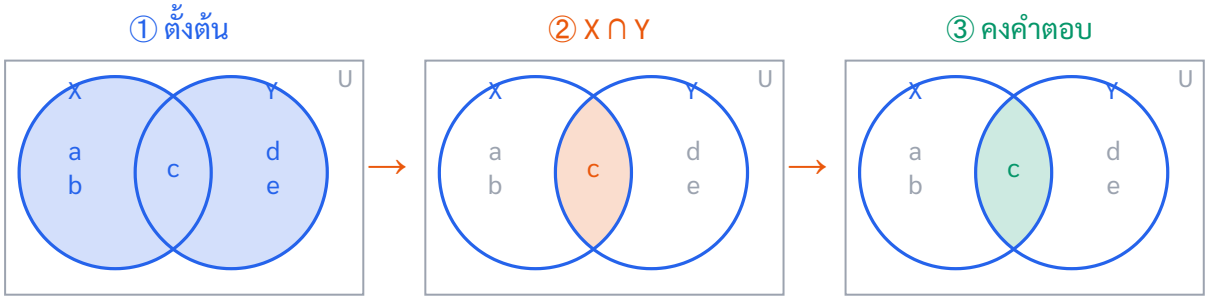
เฉลย c อยู่ทั้งสองกล่อง จึงไม่ใช่เซตไม่ทับซ้อน แม้ยังไม่ได้คำนวณผลอื่นก็รู้ข้อนี้แล้ว

นี่คือโจทย์รวมการดำเนินการของเซตจาก **ตัวอย่าง 1.4** เราจะวาง a, b ไว้ฝั่ง X อย่างเดียว วาง c ในส่วนกลาง และวาง d, e ไว้ฝั่ง Y อย่างเดียว ตำแหน่งเดิมนี้ใช้ตรวจทุกคำตอบได้

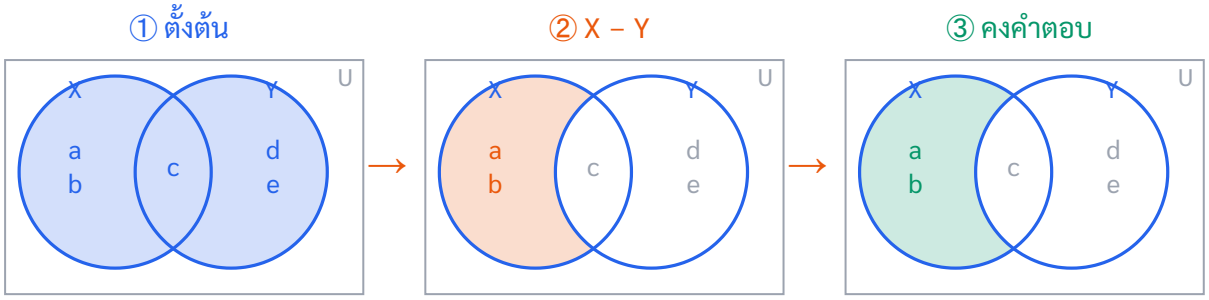
บรรทัด 1 — รวมทุกบริเวณที่มีชื่อ $X \cup Y = \{a, b, c, d, e\}$ รับทั้งวงซ้าย กลาง และขวา



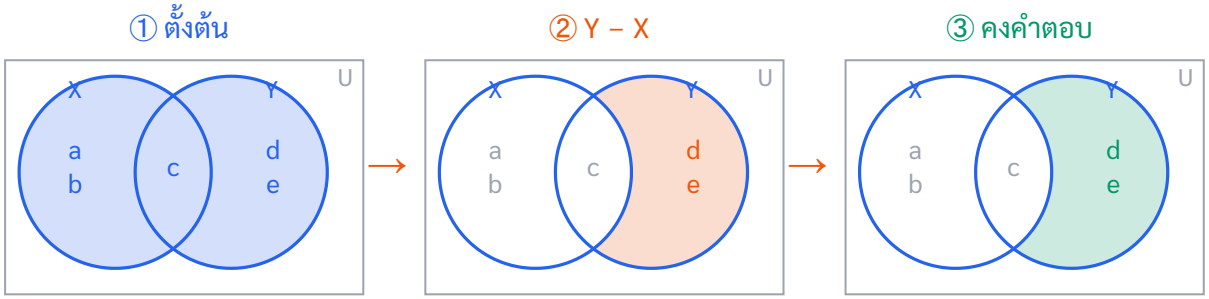
บรรทัด 2 — เก็บเฉพาะกลาง $X \cap Y = \{c\}$ เพราะมีเพียง c ที่พบสองกล่อง



บรรทัด 3 — เก็บซ้ายที่ไม่ซ้อน $X - Y = \{a, b\}$ ตัด c จาก X



บรรทัด 4 — เก็บขวาที่ไม่ซ้อน $Y - X = \{d, e\}$ ตัด c จาก Y



บรรทัด 5 — ตัดสินไม่ทับซ้อน $X \cap Y = \{c\} \neq \varnothing$ จึง X กับ Y ไม่เป็น disjoint

เช็กกลับ รวม $X - Y$ กับส่วนร่วมได้ $\{a, b\} \cup \{c\} = X$; รวม $Y - X$ กับส่วนร่วมได้ Y กลับมา ส่วนยูเนียนมีสมาชิกทุกตัวจากทั้งสองกล่องโดยไม่ซ้ำ

อย่ารวมคำตอบของ $X - Y$ และ $Y - X$ เข้าด้วยกันแล้วใช้แทนทั้งสองข้อ แต่ละคำถามกำหนดกล่องเริ่มต้นต่างกัน และอย่าใช้คำว่า “ไม่ทับซ้อน” เพียงเพราะชื่อเซตต่างกัน

ลงมือทำตามนี้

1. วางแต่ละสมาชิกลงบริเวณให้ถูกครั้งเดียว
2. อ่านเครื่องหมายทีละข้อแล้วคัดบริเวณ
3. เขียนผลต่างทั้งสองทิศแยกกัน
4. ตรวจ disjoint จากส่วนร่วม และเช็กคืนกล่องเดิมก่อนหยุด

1.16 เปลี่ยนลำดับกล่องได้เมื่อไร? (ต้นทาง หน้า 13)

จาก A มี 1, 2 และ B มี 2, 3 ลองเทรายชื่อ A ก่อน B แล้วเท B ก่อน A เราเก็บเลขที่พบโดยไม่ซ้ำ รายชื่อสุดท้ายยังมี 1, 2, 3 เหมือนกัน การเปลี่ยนกล่องที่เริ่มจึงไม่ทำให้เกณฑ์ “พบอย่างน้อยหนึ่งที่” เปลี่ยน

ลองคิดก่อนเปิดเฉลย

ถ้าเปลี่ยนไปเก็บเฉพาะเลขที่มีทั้ง A และ B การถามว่า “อยู่ A และ B” ต่างจาก “อยู่ B และ A” ไหม?

เฉลย ไม่ต่างกัน ตัวที่ผ่านยังเป็น 2 เพราะต้องอยู่ในสองกล่องเดิมครบ ไม่ขึ้นกับลำดับที่ถาม

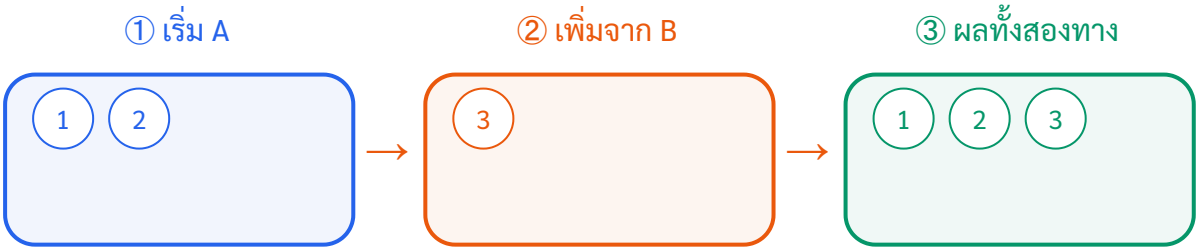
การสลับตำแหน่ง A กับ B โดยผลไม่เปลี่ยน เรียกว่า **กฎการสลับที่ (commutative laws)**: $A \cup B = B \cup A$ และ $A \cap B = B \cap A$

เหตุผลอยู่ที่เงื่อนไขสมาชิก: “อยู่ที่ใดที่หนึ่ง” ไม่สนว่าเราพูดชื่อกล่องไหนก่อน และ “อยู่ทั้งสอง” ก็ใช้กล่องคู่เดิม กฎนี้ไม่ใช่คำอนุญาตให้สลับทุกเครื่องหมาย

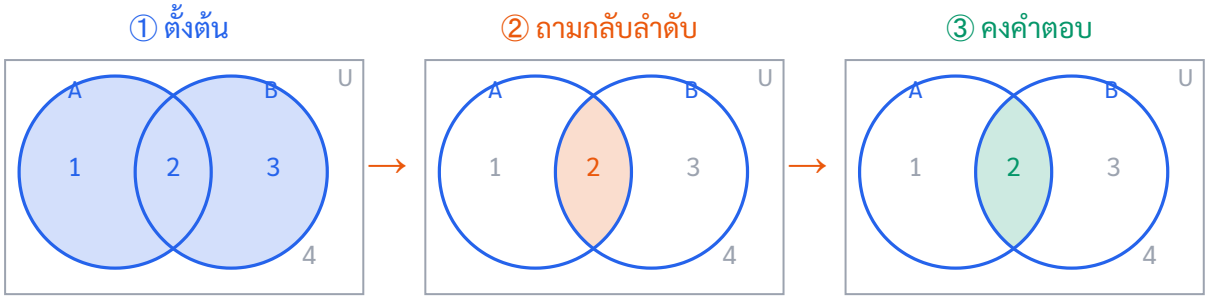
โจทย์ $A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\}$ ตรวจสองกฎด้วยสมาชิก

บรรทัด 1 — รวมจาก A เริ่ม 1, 2 แล้วเพิ่ม 3 ได้ $A \cup B = \{1, 2, 3\}$

บรรทัด 2 — รวมจาก B เริ่ม 2, 3 แล้วเพิ่ม 1 ได้ $B \cup A = \{2, 3, 1\} = \{1, 2, 3\}$



บรรทัด 3 — ตรวจส่วนร่วมสองทาง ตรวจ 1, 2 กับ B เก็บ 2; ตรวจ 2, 3 กับ A ก็เก็บ 2 จึง $A \cap B = B \cap A = \{2\}$



เช็กกลับ คำตอบรวมมีทุกตัวจากสองกล่อง ส่วนคำตอบร่วมอยู่ทั้งสองจริง การสลับชื่อไม่ได้ย้ายสมาชิกระหว่างบริเวณ

ผลต่างไม่มีกฎนี้: $A - B = \{1\}$ แต่ $B - A = \{3\}$ ถ้าเปลี่ยนเครื่องหมายเป็นลบ เหตุผล “เริ่มที่ใดก็ได้” พัง เพราะกล่องเริ่มต้นเป็นส่วนหนึ่งของเงื่อนไข

ลงมือทำตามนี้

1. ดูว่าเครื่องหมายเป็น $\cup$ หรือ $\cap$
2. สลับได้ทั้งเซตที่อยู่สองข้างของเครื่องหมายนั้น
3. คงเครื่องหมายเดิมไว้
4. ถ้าเป็นผลต่าง ให้หยุด: ต้องคำนวณตามลำดับเดิม

1.17 เปลี่ยนว่าจะทำกลุ่มไหนก่อน (ต้นทาง หน้า 13)

มีกล่อง A ใส่ 1, 2 กล่อง B ใส่ 2, 3 กล่อง C ใส่ 2, 4 ถ้าต้องรวมทั้งสาม จะรวมสองกล่องแรกก่อน หรือรวมสองกล่องหลังไว้ก่อนก็ได้ สุดท้ายเลขที่เคยปรากฏในกล่องใดก็ต้องถูกเก็บ

ลองคิดก่อนเปิดเฉลย

รวม A กับ B ก่อนจะได้อะไร? แล้วเพิ่ม C จะมีเลขใหม่ตัวใด? ถ้าเริ่ม B กับ C จะมีเลขใหม่จาก A ตัวใด?

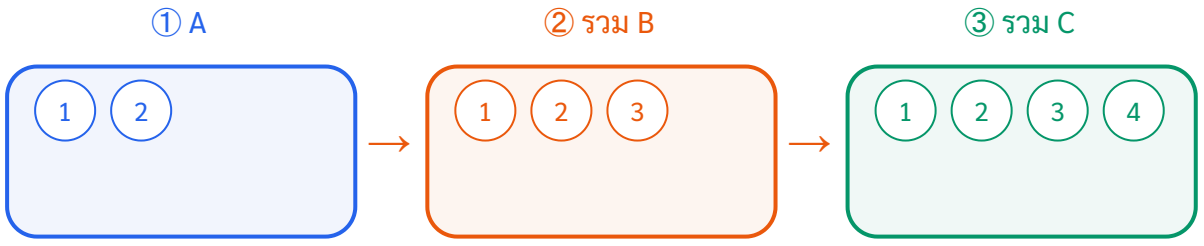
เฉลย A รวม B ได้ 1, 2, 3 แล้วเพิ่ม 4; B รวม C ได้ 2, 3, 4 แล้วเพิ่ม 1 ทั้งสองทางจบที่ 1, 2, 3, 4

การย้ายวงเล็บโดยไม่เปลี่ยนลำดับของเซต เรียกว่า **กฎการเปลี่ยนหมู่ (associative laws)**: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ และ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

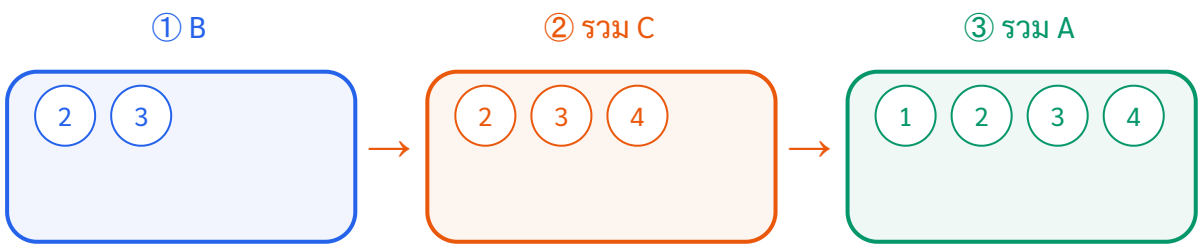
วงเล็บบอกว่าต้องคำนวณกลุ่มไหนก่อน เมื่อเครื่องหมายทั้งสองเหมือนกัน การรวมหมายถึงพบอย่างน้อยหนึ่งในสามกล่อง ส่วนการหาส่วนร่วมหมายถึงพบครบทั้งสาม จัดวงเล็บแบบใดก็ตรวจเงื่อนไขเดิม

โจทย์ ใช้ A, B, C ด้านบน ตรวจด้านซ้ายและขวาของกฎทั้งสอง

บรรทัด 1 — ยูเนียนฝั่งซ้าย $A \cup B = \{1, 2, 3\}$; รวม C อีกครั้งได้ $\{1, 2, 3, 4\}$

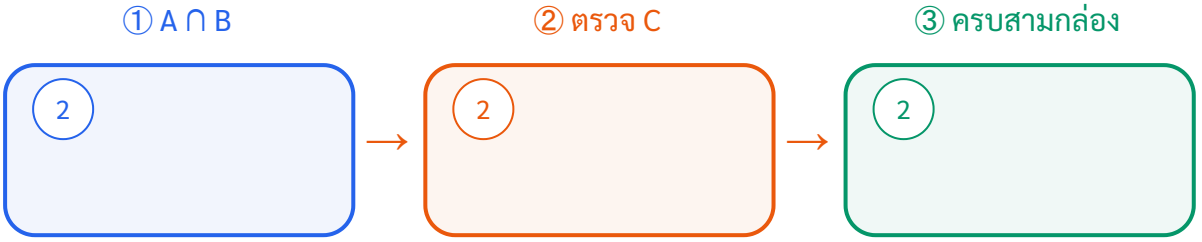


บรรทัด 2 — ยูเนียนฝั่งขวา $B \cup C = \{2, 3, 4\}$; รวม A ได้ $\{1, 2, 3, 4\}$ ตรงกัน



บรรทัด 3 — ส่วนร่วมฝั่งซ้าย $A \cap B = \{2\}$; 2 อยู่ใน C จึง $(A \cap B) \cap C = \{2\}$

บรรทัด 4 — ส่วนร่วมฝั่งขวา $B \cap C = \{2\}$; 2 อยู่ใน A จึง $A \cap (B \cap C) = \{2\}$



เช็กกลับ ยูเนียนเก็บ 1, 2, 3, 4 ครบ ส่วนร่วมเก็บเพียง 2 ที่พบในสามรายชื่อ เหตุผลนี้ไม่ขึ้นกับว่าเริ่มคู่ไหน

อย่าย้ายวงเล็บข้ามเครื่องหมายที่ต่างกัน: ในตัวอย่างนี้ $(A \cup B) \cap C = \{2\}$ แต่ $A \cup (B \cap C) = \{1, 2\}$ ต่างกันตรง 1 เพราะทางแรกบังคับว่าต้องอยู่ C ด้วย

ลงมือทำตามนี้

1. อ่านเครื่องหมายทั้งสองก่อน
2. ถ้าเหมือนกันทั้งคู่จึงใช้เปลี่ยนหมู่
3. ย้ายเฉพาะวงเล็บโดยคงเครื่องหมายและลำดับ
4. ถ้าเครื่องหมายผสม ให้ทำในวงเล็บตามเดิม หรือใช้กฎแจกแจงที่สอนต่อไป

1.18 ทำกับกล่องเดิมซ้ำแล้วเกิดอะไร? (ต้นทาง หน้า 13)

กล่อง A มี 1, 2 ถ้ารวมรายชื่อ A กับสำเนาของ A เราไม่ได้พบเลขชนิดใหม่ ถ้าถามหาเลขที่อยู่ใน A และสำเนานั้นพร้อมกัน ทุกตัวเดิมก็ผ่านอยู่แล้ว

ลองคิดก่อนเปิดเฉลย

จาก $A = \{1, 2\}$ คิดว่า $A \cup A$ จะมีสมาชิกสี่ตัวไหม? ส่วน $A \cap A$ จะเหลือศูนย์ตัวไหม?

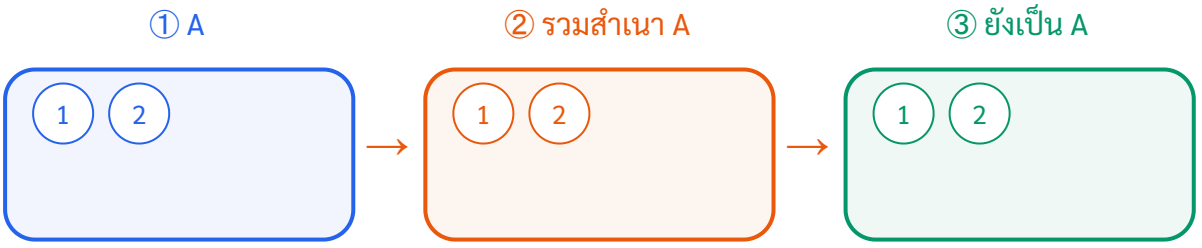
เฉลย ไม่ใช่ทั้งคู่ ทั้งสองคำตอบยังเป็น $\{1, 2\}$ เพราะไม่นับชื่อซ้ำ และทุกตัวใน A อยู่ใน A

การทำซ้ำกับตัวเองแล้วได้เดิม เรียกว่า **กฎการทำซ้ำ (idempotent laws)**: $A \cup A = A$ และ $A \cap A = A$

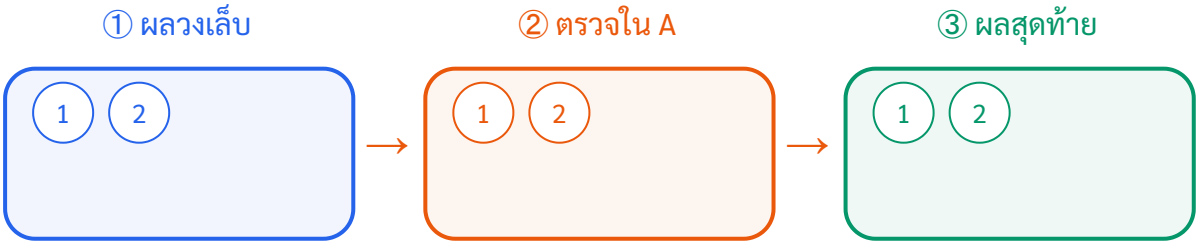
สำหรับยูเนียน สิ่งที่พบเพิ่มเป็นชื่อเดิมทั้งหมด จึงไม่มีสมาชิกใหม่ สำหรับส่วนร่วม คำถามทั้งสองฝั่งถามกล่องเดียวกัน สมาชิกของ A จึงผ่านทั้งคู่

โจทย์ ย่อ $(A \cup A) \cap A$ เมื่อ $A = \{1, 2\}$

บรรทัด 1 — ทำวงเล็บก่อน $A \cup A = A = \{1, 2\}$ เพราะสำเนาไม่เพิ่มชนิดสมาชิก

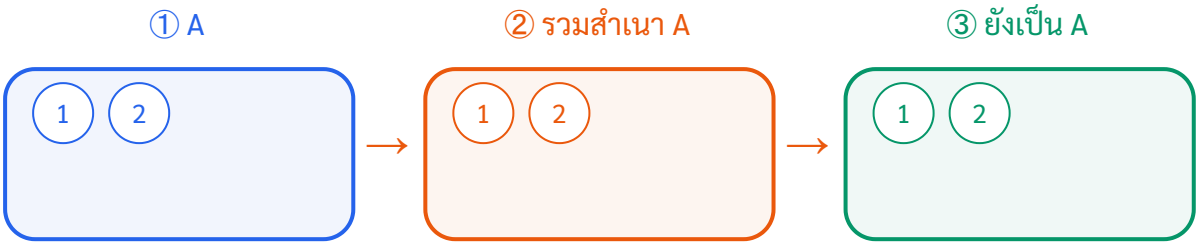


บรรทัด 2 — หาส่วนร่วม เหลือ $A \cap A = A = \{1, 2\}$ เพราะทั้ง 1 และ 2 อยู่ในกล่องเดียวกันทั้งสองฝั่ง



เช็กกลับ ตรวจโจทย์เต็มโดยใช้ 1 และ 2: แต่ละตัวผ่านอย่างน้อยหนึ่ง A ในวงเล็บ และผ่าน A ด้านนอก จึงถูกเก็บครบ

อย่ายืมความเคยชินจากจำนวนมาว่า $A \cup A = 2A$ เซตไม่เก็บจำนวนครั้งที่สมาชิกถูกเอ่ยชื่อ กฎนี้จึงต่างจากการบวกจำนวนธรรมดา



ลงมือทำตามนี้

1. ตรวจว่าทั้งสองข้างเป็นเซตเดียวกันจริง
2. ถ้าเชื่อมด้วยรวม หรือส่วนร่วม ให้แทนด้วยเซตนั้น
3. ทำจากวงเล็บในออกมา
4. หยุดเมื่อไม่มีการทำซ้ำที่ย่อได้ แล้วตรวจสมาชิกตัวอย่างกลับ

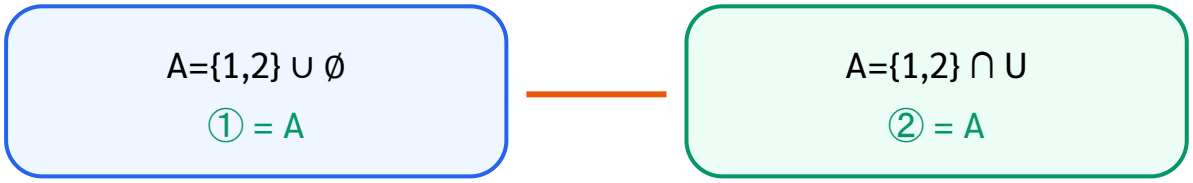
1.19 เพิ่มศูนย์ชิ้น กับคัดด้วยกรอบทั้งหมด (ต้นทาง หน้า 14)

ให้ $U = \{1, 2, 3, 4\}$ และ A มี 1, 2 ถ้ารวม A กับกล่องว่าง จะไม่มีของเพิ่ม ถ้าคัด A โดยถามว่าอยู่ใน U ไหม ทุกตัวของ A อยู่ในกรอบใหญ่อยู่แล้ว จึงไม่ถูกตัด

ลองคิดก่อนเปิดเฉลย

รวม A กับกล่องว่างได้อะไร? เก็บเฉพาะสมาชิก A ที่อยู่ U ได้อะไร?

เฉลย ทั้งสองอย่างได้ A เดิม คือ $\{1, 2\}$



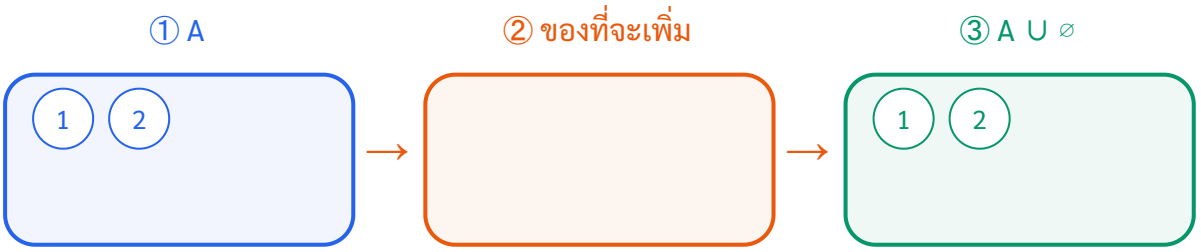
∅ ไม่เพิ่มสมาชิก · U ไม่ตัดสมาชิกของ A

สิ่งที่ใช้ร่วมแล้วไม่ทำให้เซตเปลี่ยนเรียกว่า **เอกลักษณ์ (identity)** ของการดำเนินการนั้น กฎคือ $A \cup \varnothing = A$ และ $A \cap U = A$

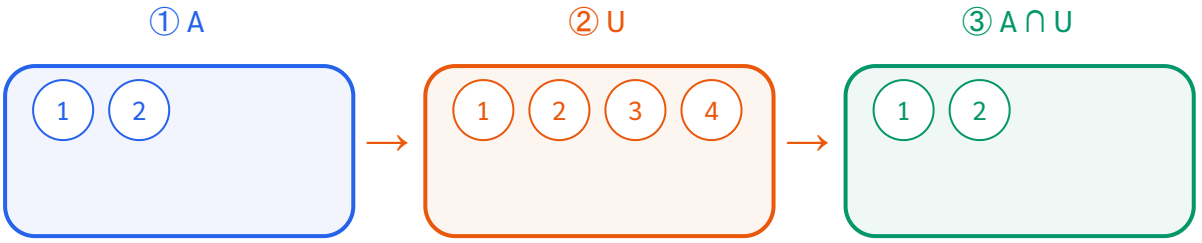
เอกลักษณ์ขึ้นกับเครื่องหมาย: กล่องว่างไม่เพิ่มสมาชิกเมื่อรวม แต่ U ไม่ตัดสมาชิกเมื่อหาส่วนร่วม เพราะ A ถูกกำหนดให้อยู่ภายใน U

โจทย์ ย่อ $(A \cup \varnothing) \cap U$ โดย $A = \{1, 2\}, U = \{1, 2, 3, 4\}$

บรรทัด 1 — รวมของที่ไม่มี $A \cup \varnothing = \{1, 2\} = A$



บรรทัด 2 — ตรวจในกรอบใหญ่ 1 และ 2 อยู่ใน U ทั้งคู่ จึง $A \cap U = \{1, 2\} = A$



เช็กกลับ ในโจทย์เต็ม ไม่มีสมาชิกเพิ่มจากเซตว่าง และไม่มีสมาชิกถูกตัดโดย U จึงคง A จริง

สลับเอกลักษณ์กันไม่ได้: $A \cup U$ ได้ U และ $A \cap \varnothing$ ได้เซตว่าง สองกรณีนี้เป็นอีกกฎที่จะดูในหัวข้อต่อไป

ลงมือทำตามนี้

1. ถ้าเจอรวมกับว่าง ให้ลบส่วนว่างทิ้ง
2. ถ้าเจอส่วนร่วมกับ U ให้คงเซตเดิมที่เป็นเซตย่อย U
3. คงเครื่องหมายอื่นรอบนอกไว้
4. หยุดเมื่อไม่มีคู่ที่ตรงรูปกฎ

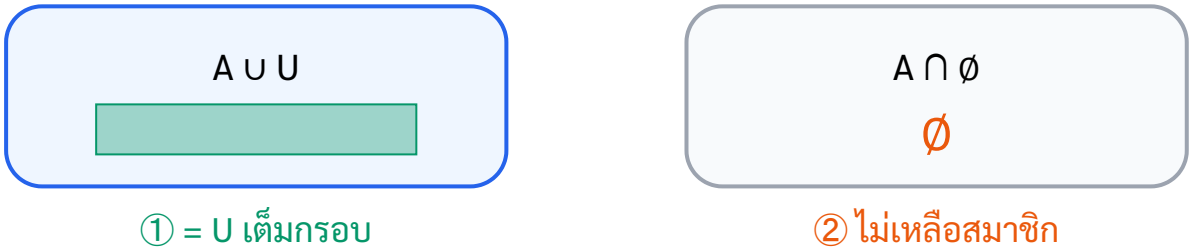
1.20 เต็มกรอบ หรือไม่เหลือเลย (ต้นทาง หน้า 13)

ยังใช้ U มี 1, 2, 3, 4 และ A มี 1, 2 ถ้ารวม A กับ U กล่องใหญ่มีทุกตัวที่อนุญาตอยู่แล้ว ผลจึงเต็มกรอบ แต่ถ้าบังคับให้สมาชิกอยู่ในกล่องว่างด้วย จะไม่มีตัวใดผ่าน

ลองคิดก่อนเปิดเฉลย

จะมีเลขใดใน $A \cap \varnothing$ ได้ไหม? ส่วน $A \cup U$ ขาดเลขใดจาก U ได้ไหม?

เฉลย ส่วนร่วมกับว่างไม่มีสมาชิกได้เลย ส่วนรวมกับ U ต้องมี U ครบ เพราะทุกสมาชิกของ U ผ่านเงื่อนไข “อยู่ในอย่างน้อยหนึ่งกล่อง”

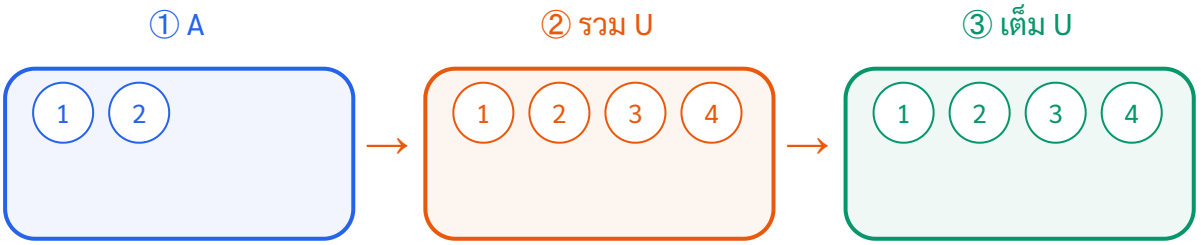


กฎที่ให้ผลเป็นขอบสุดทั้งกรอบหรือไม่เหลือเลย เรียกว่า **กฎขอบเขต (bound laws)**: $A \cup U = U$ และ $A \cap \varnothing = \varnothing$

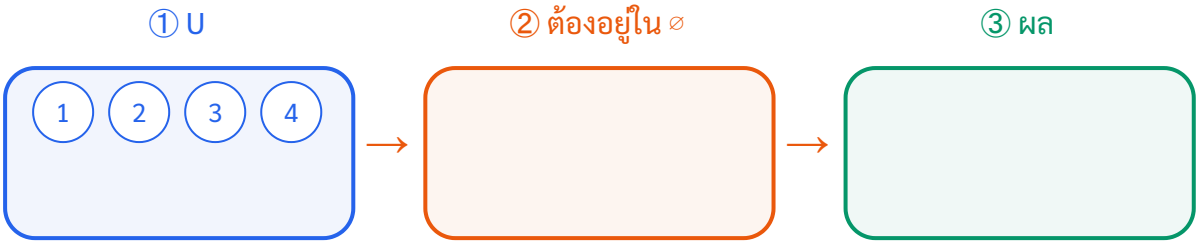
ต่างจากหัวข้อก่อนตรงนี้: รวมกับ U ทำให้ผลไปเต็มกรอบ ไม่จำเป็นต้องคง A ส่วนการหาส่วนร่วมกับว่างจะตัดทุกสมาชิก แม้ A จะมีสมาชิกมากเท่าไรก็ตาม

โจทย์ หา $(A \cup U) \cap \varnothing$ โดย $A = \{1, 2\}, U = \{1, 2, 3, 4\}$

บรรทัด 1 — ทำวงเล็บ $A \cup U = \{1, 2, 3, 4\} = U$



บรรทัด 2 — คัดด้วยกล่องว่าง ไม่มีตัวใดของ U อยู่ในกล่องว่าง จึง $U \cap \varnothing = \varnothing$



เช็กกลับ ต่อให้ผ่านวงเล็บแรกได้ทุกตัว ทุกตัวต้องผ่านเงื่อนไขหลังด้วย ซึ่งไม่มีใครผ่าน จึงคำตอบว่าง

เห็นเซตว่างแล้วลบทิ้งทันทีไม่ได้: $A \cup \varnothing$ คง A แต่ $A \cap \varnothing$ ทำให้ว่าง ต้องอ่านเครื่องหมายที่ติดกับมันก่อน

ลงมือทำตามนี้

1. วง U หรือเซตว่างที่เห็น
2. อ่านเครื่องหมายที่เชื่อมกับมัน
3. รวม U ให้แทนด้วย U; ส่วนร่วมว่างให้แทนด้วยว่าง
4. ทำต่อจากข้างในออกมา แล้วตรวจสมาชิกหนึ่งตัวที่คิดว่าผ่านว่าเข้ากล่องว่างได้จริงหรือไม่

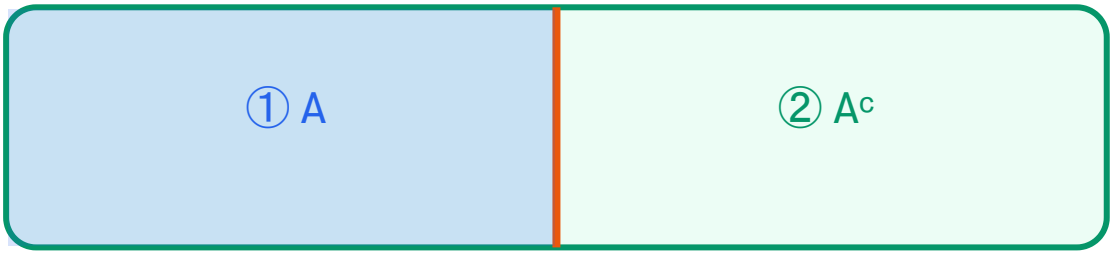
1.21 สองฝั่งที่เติมกันพอดี (ต้นทาง หน้า 13)

ภายใน U มี 1, 2, 3, 4 กล่อง A เก็บ 1, 2 ส่วนที่เหลือเก็บ 3, 4 ทุกเลขในกรอบต้องอยู่ฝั่งใดฝั่งหนึ่ง แต่ไม่มีเลขใดอยู่ทั้งฝั่ง “ใน A” กับ “นอก A” พร้อมกัน

ลองคิดก่อนเปิดเฉลย

ถ้านำ A กับส่วนที่เหลือมารวม จะได้อะไร? ถ้าเก็บเฉพาะสิ่งที่อยู่ทั้งสองฝั่ง จะเหลืออะไร?

เฉลย รวมได้ U ทั้งกรอบ ส่วนร่วมไม่มีสมาชิกเลย



A∩Aᶜ=∅ และ ③ A∪Aᶜ=U

นี่คือ **กฎส่วนเติมเต็ม (complement laws)**: $A \cup A^c = U$ และ $A \cap A^c = \varnothing$ โดย $A^c = U - A$ ต้องใช้กรอบ U เดียวกันทั้งสูตร

เหตุผลของกฎแรกคือทุกสมาชิกของ U อยู่ใน A หรือไม่อยู่ใน A อย่างใดอย่างหนึ่ง เหตุผลของกฎที่สองคือสมาชิกเดียวกันจะอยู่และไม่อยู่ใน A พร้อมกันไม่ได้

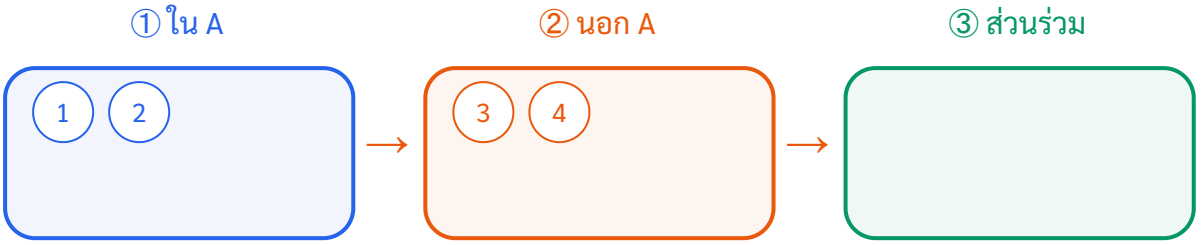
โจทย์ $U = \{1, 2, 3, 4\}, A = \{1, 2\}$ หาทั้งผลรวมและส่วนร่วมกับ A^c

บรรทัด 1 — หาอีกฝั่ง ตัด 1, 2 ออกจาก U ได้ $A^c = \{3, 4\}$



บรรทัด 2 — รวมสองฝั่ง $A \cup A^c = \{1, 2\} \cup \{3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\} = U$

บรรทัด 3 — ตรวจส่วนร่วม 1, 2 ไม่อยู่ใน A^c และ 3, 4 ไม่อยู่ใน A จึง $A \cap A^c = \varnothing$



เช็กกลับ สมาชิก U ถูกจัดครบสองฝั่งพอดี ไม่มีใครตกนอกการรวม ไม่มีใครซ้ำในสองฝั่ง

ถ้าหา A^c โดยเผลอตัด 4 ทิ้งด้วย แล้วได้เพียง $\{3\}$ การรวมกลับจะขาด 4 จึงเช็กพบคำตอบผิดได้ กฎนี้ใช้เป็นเครื่องมือตรวจส่วนเติมเต็มได้ด้วย

ลงมือทำตามนี้

1. ใช้ U เดียวกัน
2. หาสมาชิกที่อยู่นอก A แต่ภายใน U
3. รวมสองฝั่งต้องได้ U
4. ส่วนร่วมสองฝั่งต้องว่าง ถ้าผ่านทั้งคู่จึงหยุด

1.22 กลับด้านสองครั้ง (ต้นทาง หน้า 14)

เริ่มจากกล่อง A ที่มี 1, 2 ภายใน U ที่มี 1, 2, 3, 4 เมื่อเลือก “นอก A” ได้ 3, 4 ถ้าเลือก “นอกกล่อง 3, 4” อีกครั้ง จะกลับมาเก็บ 1, 2

ลองคิดก่อนเปิดเฉลย

ทำส่วนเติมเต็มสองครั้งโดยใช้ U เดิม ผลกลับเป็นอะไร? ถ้าเปลี่ยน U ระหว่างทาง ยังรับประกันได้ไหม?

เฉลย เมื่อใช้ U เดิมกลับเป็น A แต่ถ้าเปลี่ยน U อาจมีสมาชิกใหม่แทรกเข้ามา จึงไม่รับประกัน

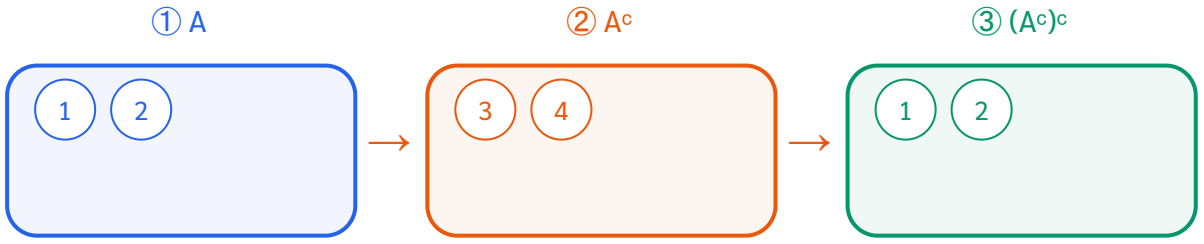
การกลับส่วนเติมเต็มสองครั้งได้เซตเดิม เรียกว่า **กฎการกลับสองครั้ง (involution law)**: $(A^c)^c = A$ หรือ $\overline{\overline{A}} = A$

แต่ละสมาชิกใน U สลับระหว่าง “ถูกเลือก” กับ “ไม่ถูกเลือก” ครั้งแรกสลับไปอีกฝั่ง ครั้งที่สองสลับกลับ จึงได้สถานะเดิมครบทุกตัว

โจทย์ $U = \{1, 2, 3, 4\}, A = \{1, 2\}$ หา $(A^c)^c$

บรรทัด 1 — กลับครั้งแรก $A^c = U - A = \{3, 4\}$

บรรทัด 2 — กลับครั้งที่สอง $(A^c)^c = U - \{3, 4\} = \{1, 2\} = A$



เซ็กกลับ 1, 2 ถูกตัดในรอบแรกแล้วรับกลับในรอบสอง; 3, 4 ถูกรับในรอบแรกแล้วตัดในรอบสอง ครบทุกตัวของ U

เปลี่ยนกรอบแล้วสูตรพัง: รอบแรกใช้ U ข้างต้นได้ $\{3, 4\}$ แต่ถ้ารอบสองใช้ $U' = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ จะได้ $\{1, 2, 5\}$ ซึ่งไม่เท่ากับ A เพราะ 5 เพิ่งเข้าในกรอบใหม่



ลงมือทำตามนี้

1. ตรวจว่าเส้นส่วนเติมเต็มครอบทั้งนิพจน์ใด
2. จับคู่การกลับสองครั้งที่ติดกัน
3. ใช้ U เดิมตลอด
4. ตัดเครื่องหมายกลับเป็นคู่ได้ แล้วหยุดเมื่อไม่มีคู่เหลือ

1.23 เพิ่มของที่มีแล้ว คัดด้วยกล่องที่ครอบอยู่ (ต้นทาง หน้า 13)

A มี 1, 2 ส่วน B มี 2, 3 ถ้าเลือกของที่อยู่ทั้ง A และ B ก่อน จะได้แค่ 2 แล้วเอาไปเพิ่มใน A ก็ไม่ได้ของใหม่ เพราะ 2 อยู่ใน A ตั้งแต่แรก

ลองคิดก่อนเปิดเฉลย

ลองอีกแบบ: รวม A กับ B ก่อน แล้วเก็บเฉพาะที่อยู่ใน A ผลจะมี 3 ได้ไหม?

เฉลย ไม่มี 3 เพราะขั้นสุดท้ายบังคับให้อยู่ใน A จึงเหลือ 1, 2 เหมือน A เดิม

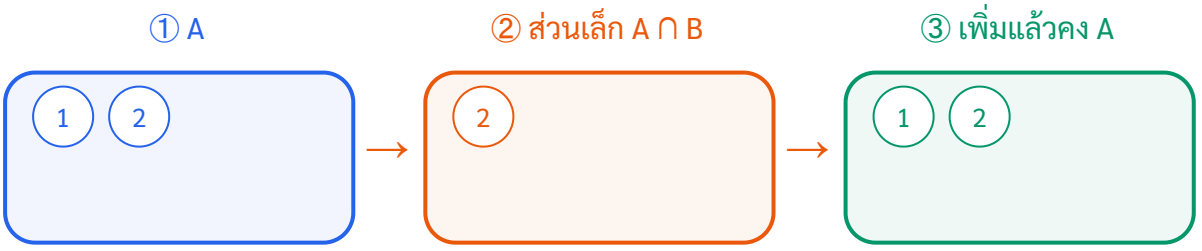
เมื่อส่วนที่เพิ่มหรือคัดไม่สามารถเปลี่ยน A ได้ เราเรียก **กฎการดูดกลืน (absorption laws)**: $A \cup (A \cap B) = A$ และ $A \cap (A \cup B) = A$

สูตรแรกนำส่วนเล็กของ A มาเพิ่มให้ A จึงไม่เพิ่มอะไร สูตรที่สองนำกล่องใหญ่ที่มี A ครบมาใช้คัด A จึงไม่ตัดสมาชิกของ A ออก

โจทย์ $A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\}$ ตรวจทั้งสองสูตร

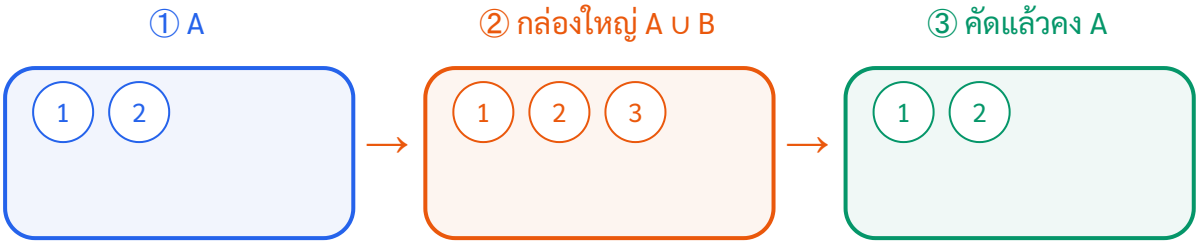
บรรทัด 1 — ทำวงเล็บสูตรแรก $A \cap B = \{2\}$

บรรทัด 2 — รวมกลับ A $A \cup \{2\} = \{1, 2\} = A$ เพราะ 2 ไม่ใช่สมาชิกใหม่



บรรทัด 3 — ทำวงเล็บสูตรที่สอง $A \cup B = \{1, 2, 3\}$

บรรทัด 4 — คัดด้วย A $A \cap \{1, 2, 3\} = \{1, 2\} = A$



เช็กกลับ 1 และ 2 ผ่านทั้งสองนิพจน์ 3 ไม่ผ่านทั้งสองนิพจน์ จึงตรงกับ A ทีละสมาชิก

ห้ามตัดวงเล็บเพียงเพราะเห็น A ซ้ำ ถ้าเปลี่ยนเป็น $A \cup (B \cap C)$ และ C ไม่มี A ในชื่อ กฎดูดกลืนยังใช้ทันทีไม่ได้ ต้องมีเซต A เป็นส่วนหนึ่งของวงเล็บตามรูปกฎจริง

ลงมือทำตามนี้

1. หาเซตที่ซ้ำอยู่ด้านนอกและด้านในวงเล็บ
2. ตรวจว่าเครื่องหมายในกับนอกเป็นคนละชนิด ∪/∩
3. ตรวจรูปว่าเหมือนหนึ่งในสองกฎทุกตำแหน่ง
4. แทนทั้งนิพจน์ด้วยเซตที่ซ้ำ แล้วตรวจเหตุผลว่าไม่มีสมาชิกเพิ่มหรือตัด

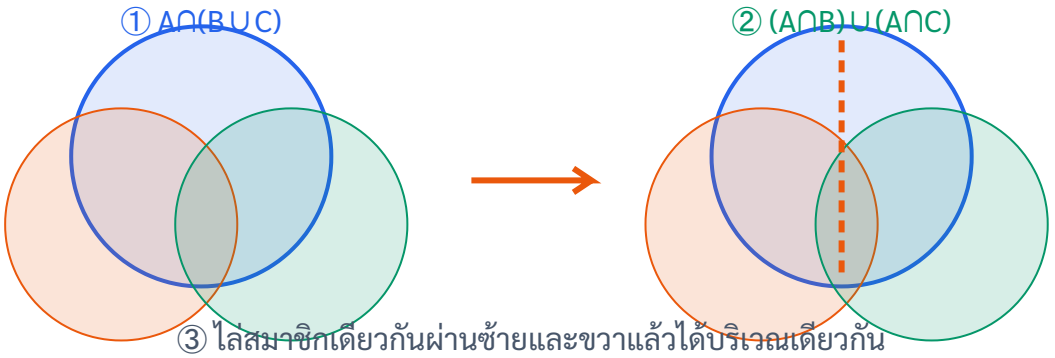
1.24 แยกคัดเป็นสองทาง (ต้นทาง หน้า 14)

คราวนี้ใช้สามกล่อง: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, $C = \{2, 4, 6, 7\}$ ภายใน $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ถ้ารับเฉพาะของ A ที่อยู่ใน B หรือ C เราทำโดยรวม B กับ C ก่อนแล้วคัดด้วย A ได้

ลองคิดก่อนเปิดเฉลย

เลข 2 ผ่าน “อยู่ A และอยู่ใน B หรือ C” ไหม? ถ้าแยกตรวจ “A กับ B” และ “A กับ C” เลข 2 จะผ่านช่องไหน?

เฉลย 2 ผ่านเพราะอยู่ A และ C แม้ไม่อยู่ B เมื่อแยกช่องจะผ่านช่อง A กับ C



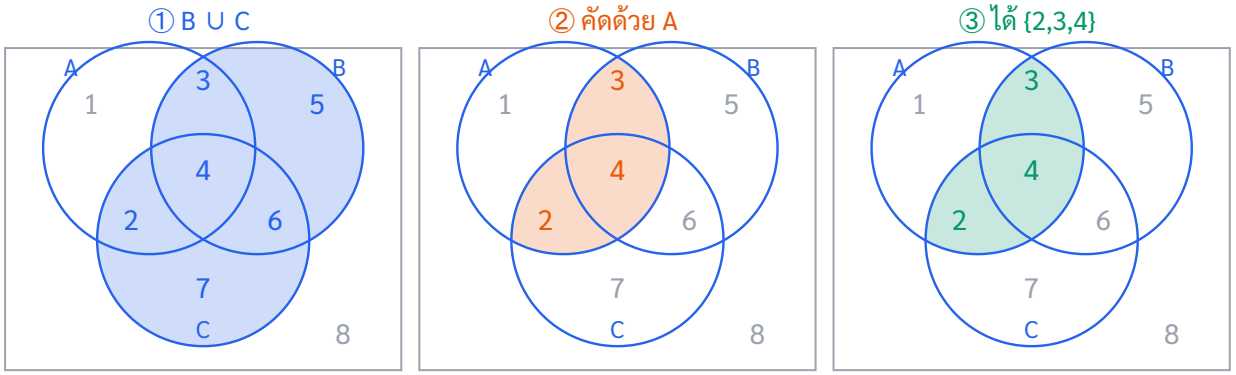
การแยกเงื่อนไขร่วมออกไปตรวจแต่ละกลุ่ม เรียกว่า **กฎการแจกแจง (distributive laws)**: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ สมาชิกต้องอยู่ A เสมอ แล้วเลือกผ่านทาง B หรือทาง C ก็ได้

อีกแบบคือ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ถ้าอยู่ A จะผ่านทั้งสองวงเล็บทันที ถ้าไม่อยู่ A จะต้องอาศัยทั้ง B และ C เพื่อผ่านวงเล็บทั้งสอง

โจทย์ ก — คัด A หลังรวม ใช้สามกล่องข้างต้น ตรวจสูตรแรก

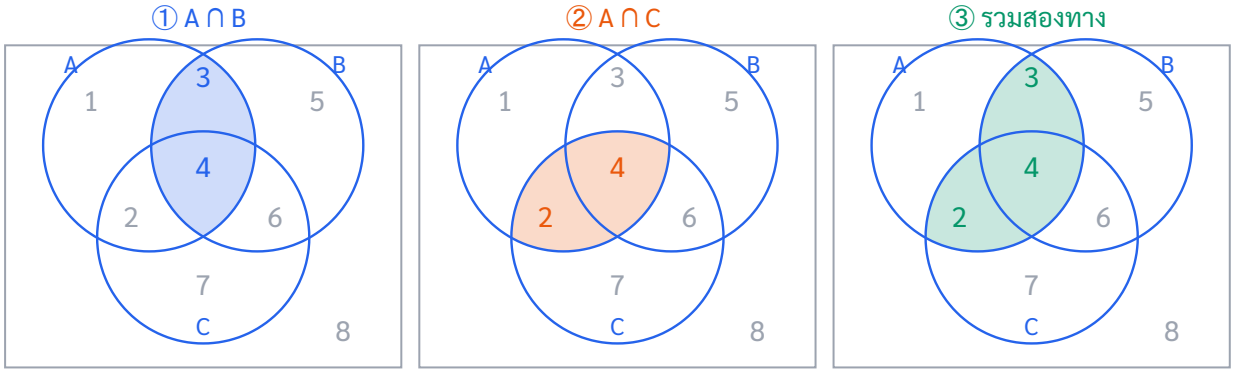
บรรทัด 1 — ทำในวงเล็บซ้าย $B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

บรรทัด 2 — คัดด้วย A $A \cap (B \cup C) = \{2, 3, 4\}$ ตัด 5, 6, 7 เพราะไม่อยู่ A



บรรทัด 3 — แยกทางขวา $A \cap B = \{3,4\}$ และ $A \cap C = \{2,4\}$

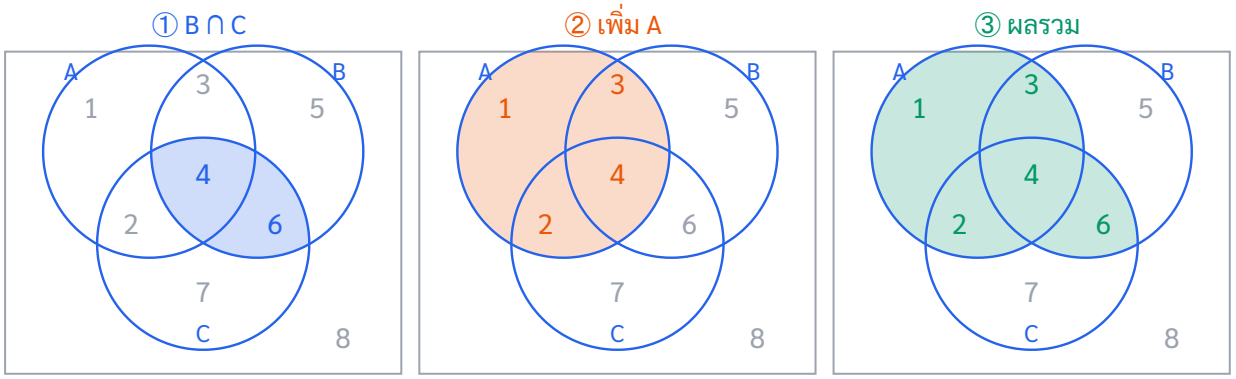
บรรทัด 4 — รวมสองทาง $\{3,4\} \cup \{2,4\} = \{2,3,4\}$ ตรงกับด้านซ้าย



เช็กกลับ ก 2 ผ่าน A กับ C; 3 ผ่าน A กับ B; 4 ผ่านทั้งสาม; 1 อยู่ A แต่ขาดทั้ง B และ C จึงไม่รับ ส่วน 5–8 ขาด A

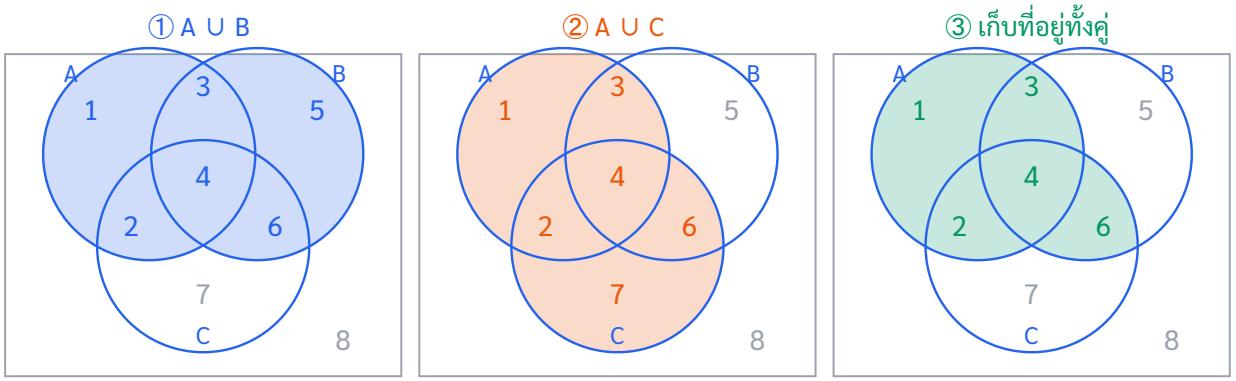
โจทย์ ข — รวม A หลังคัด ตรวจสูตรที่สองด้วยกล่องเดิม

บรรทัด 1 — ทำซ้าย $B \cap C = \{4,6\}$; รวม A ได้ $A \cup (B \cap C) = \{1,2,3,4,6\}$



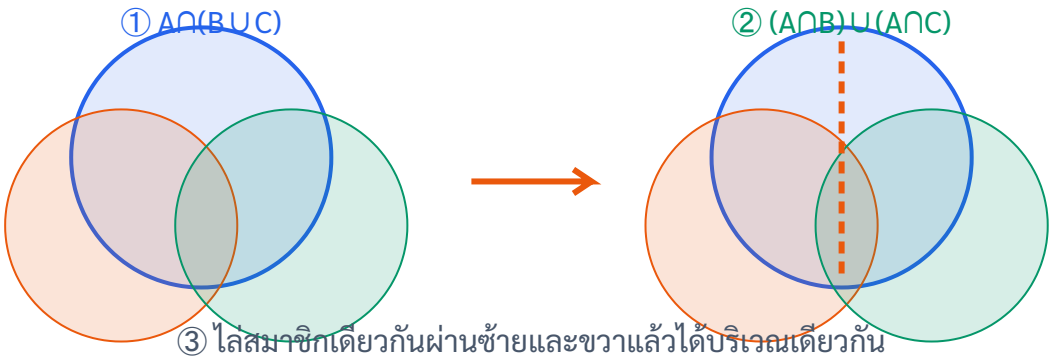
บรรทัด 2 — ทำขวาทีละวงเล็บ $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$; $A \cup C = \{1,2,3,4,6,7\}$

บรรทัด 3 — คัดส่วนร่วม สมาชิกที่อยู่ทั้งสองผลคือ $\{1, 2, 3, 4, 6\}$ ตรงกับด้านซ้าย



เช็กกลับ ข 1–4 ผ่านเพราะอยู่ A; 6 ไม่อยู่ A แต่ผ่านทั้ง B และ C; 5 ขาด C, 7 ขาด B, 8 ขาดทั้งหมด จึงไม่ผ่าน

แจกแจงแล้วเครื่องหมายด้านนอกวงเล็บใหม่ต้องมาจากเครื่องหมายเดิมข้างใน เช่น ∩ แจกเข้า ∪ ได้สองวงเล็บเชื่อมด้วย ∪ ถ้าเชื่อมผิดเป็น ∩ จะบังคับให้ต้องอยู่ครบทั้งสามแล้วทำสมาชิก 2 และ 3 หาย



ลงมือทำตามนี้

1. มองเครื่องหมายที่อยู่นอกวงเล็บกับในวงเล็บแยกกัน
2. คัดลอก A ไปจับกับ B และ C ด้วยเครื่องหมายนอกเดิม
3. เชื่อมสองวงเล็บใหม่ด้วยเครื่องหมายในเดิม
4. ตรวจสมาชิกที่ผ่านทางเดียวว่าควรถูกรับหรือไม่ แล้วจึงหยุด

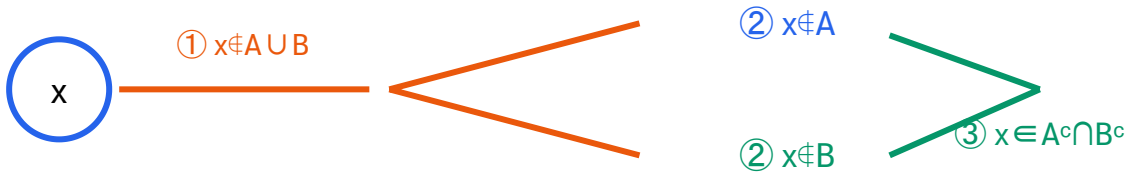
1.25 กลับคำว่า “อย่างน้อยหนึ่ง” และ “ทั้งสอง” (ต้นทาง หน้า 14)

A มี 1, 2 และ B มี 2, 3 ภายใน U ที่มี 1, 2, 3, 4 ถ้าไม่รับเลขที่พบในกล่องใดเลย เลข 4 ผ่านเพียงตัวเดียว มันต้องขาดจาก A และขาดจาก B พร้อมกัน

ลองคิดก่อนเปิดเฉลย

ถ้ากติกาเปลี่ยนเป็น “ไม่รับเฉพาะเลขที่อยู่ทั้ง A และ B” จะเหลือแค่ 4 เหมือนเดิมไหม?

เฉลย ไม่เหมือนเดิม ตัดเพียง 2 ที่อยู่ทั้งคู่ จึงเหลือ 1, 3, 4 เลขที่อยู่วงเดียวก็ผ่านได้



ไม่อยู่ในอย่างน้อยหนึ่งวง ⇒ ไม่อยู่ทั้ง A และ B

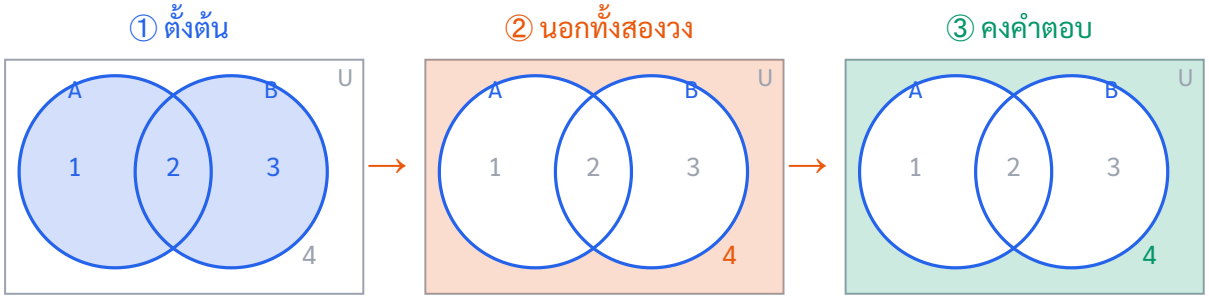
การกลับส่วนเติมเต็มของนิพจน์รวมเรียกว่า **กฎเดอมอร์แกน (De Morgan’s laws)**: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ และ $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

สูตรแรกบอกว่า “ไม่อยู่ในวงใดเลย” ต้องขาดทั้งสองวง สูตรที่สองบอกว่า “ไม่อยู่ทั้งสองพร้อมกัน” เพียงขาดวงใดวงหนึ่งก็พอ จึงต้องสลับ ∪ กับ ∩ เมื่อกระจายเครื่องหมายส่วนเติมเต็ม

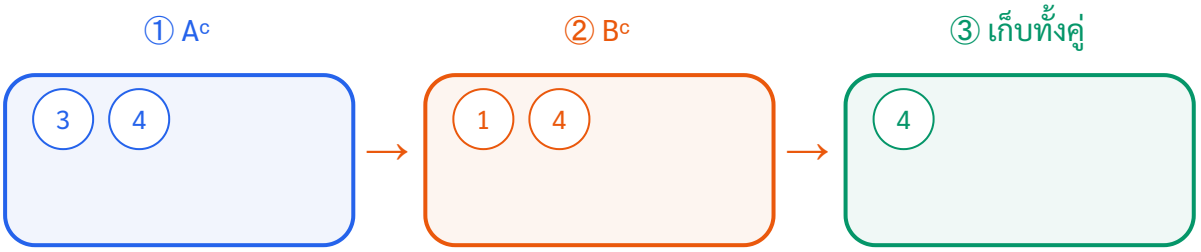
โจทย์ ก หา $(A \cup B)^c$ โดย $U = \{1, 2, 3, 4\}, A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\}$

บรรทัด 1 — รวมก่อนกลับ $A \cup B = \{1, 2, 3\}$

บรรทัด 2 — ตัดจาก U $(A \cup B)^c = U - \{1, 2, 3\} = \{4\}$



บรรทัด 3 — ตรวจด้วยอีกข้าง $A^c = \{3,4\}$, $B^c = \{1,4\}$; ส่วนร่วมคือ $\{4\}$ ตรงกัน

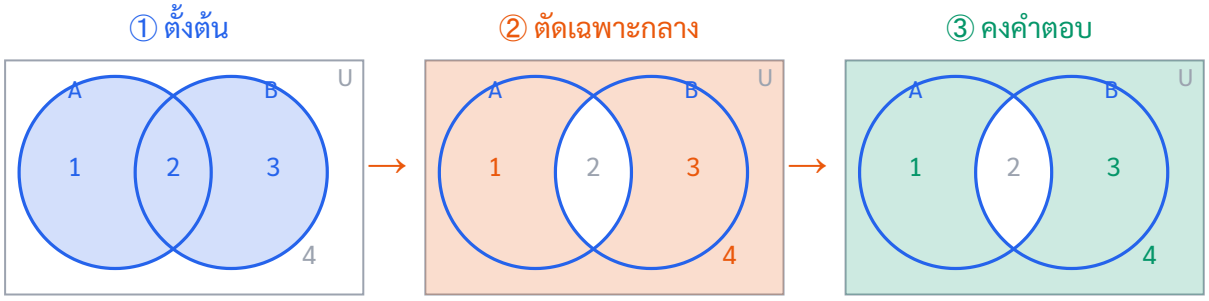


เช็กกลับ ก 4 ไม่อยู่ A และไม่อยู่ B ส่วน 1, 2, 3 อยู่ในอย่างน้อยหนึ่งกล่องจึงต้องถูกตัด

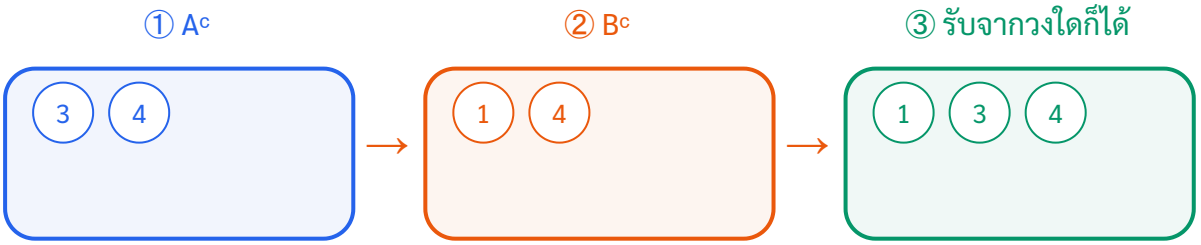
โจทย์ ข หา $(A \cap B)^c$ ด้วยกล่องเดิม

บรรทัด 1 — คัดส่วนกลาง $A \cap B = \{2\}$

บรรทัด 2 — กลับส่วนกลาง $(A \cap B)^c = U - \{2\} = \{1,3,4\}$

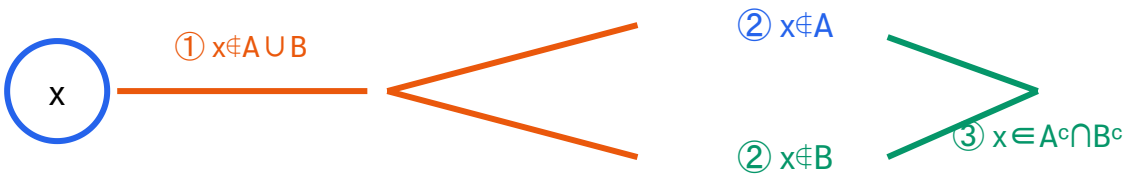


บรรทัด 3 — ตรวจด้วยอีกข้าง $A^c \cup B^c = \{3,4\} \cup \{1,4\} = \{1,3,4\}$ ตรงกัน



เช็กกลับ ข 1 ขาด B; 3 ขาด A; 4 ขาดทั้งสอง ทุกตัวจึงไม่อยู่ส่วนร่วม มีเพียง 2 ที่อยู่ส่วนร่วมแล้วถูกตัด

ถ้ากระจายเส้นบนโดยไม่สลับเครื่องหมาย จะอ้างผิดว่า $(A \cup B)^c = A^c \cup B^c$ ด้านซ้ายได้ $\{4\}$ แต่ด้านขวาที่ผิดได้ $\{1,3,4\}$ สมาชิก 1 เป็นตัวแย้งชัดเจน: มันอยู่ A จึงอยู่ในยูเนียนและต้องไม่อยู่ส่วนเติมเต็มของยูเนียน



ไม่อยู่ในอย่างน้อยหนึ่งวง ⇒ ไม่อยู่ทั้ง A และ B

ลงมือทำตามนี้

1. วงนิพจน์ทั้งหมดที่ส่วนเติมเต็มครอบอยู่
2. กระจายส่วนเติมเต็มให้แต่ละเซต
3. สลับรวมกับส่วนร่วมทุกครั้งที่ข้ามเครื่องหมายกลับ
4. จัดการส่วนเติมเต็มซ้ำด้วยกฎกลับสองครั้ง
5. ตรวจสมาชิกในส่วนวงเดียวและนอกทุกวงเพื่อจับการสลับผิด

1.26 ตำแหน่งเป็นส่วนหนึ่งของคำตอบ (ต้นทาง หน้า 15)

รหัสช่องเก็บของใช้ตัวแรกบอกชั้น ตัวหลังบอกช่อง เช่น (1, a) หมายถึงชั้น 1 ช่อง a ถ้าสลับเป็น (a, 1) หน้าที่ของสองตำแหน่งเปลี่ยนไป เราจึงเก็บทั้งค่าและตำแหน่งไว้

ลองคิดก่อนเปิดเฉลย

บัตร $(1, 2)$ กับ $(2, 1)$ มีเลขเหมือนกัน แต่ตำแหน่งแรกเหมือนกันไหม? แล้ว $\{1, 2\}$ กับ $\{2, 1\}$ ต่างกันไหม?

เฉลย บัตรวงเล็บกลมมีตำแหน่งแรกต่างกัน จึงเป็นคนละคู่ ส่วนเซตวงเล็บปีกกาไม่สนลำดับ จึงเป็นเซตเดียวกัน



③ (1,a) ≠ (a,1) เพราะตำแหน่งสลับกัน

ของสองตำแหน่งแบบนี้เรียกว่า **คู่อันดับ (ordered pair)** เขียน (a, b) โดย a เป็นตัวหน้าและ b เป็นตัวหลัง คู่สองคู่เท่ากันเมื่อสมาชิกตำแหน่งแรกเท่ากันและตำแหน่งที่สองเท่ากัน: $(a, b) = (c, d)$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$

เหตุผลที่ต้องรักษาลำดับคือแต่ละตำแหน่งรับหน้าที่ต่างกัน การเอาเลขทั้งสองไปใส่เซตธรรมดาจะทำหน้าที่นี้หาย จึงต้องแยกวงเล็บกลมของคู่กับวงเล็บปีกกาของเซต



โจทย์ ตรวจ $(1, a) = (1, a)$ และ $(1, 2) = (2, 1)$

บรรทัด 1 — คู่แรก ตัวหน้าคือ 1 เหมือนกัน; ตัวหลังคือ a เหมือนกัน จึงเท่ากัน

บรรทัด 2 — คู่ที่สลับ ตัวหน้าฝั่งซ้ายคือ 1 แต่ฝั่งขวาคือ 2 ไม่เท่ากัน จึงคู่ไม่เท่ากัน แม้ยังไม่ตรวจตัวหลัง

เช็กกลับ การอ่านทีละตำแหน่งได้หน้าที่เดิมครบ ส่วนการมองแค่รายชื่อเลขจะสูญเสียข้อมูลตำแหน่ง

อย่าเอากฎ “เซตไม่สนลำดับ” มาใช้ภายในสมาชิกที่เป็นคู่อันดับ เซตของคู่อันดับสลับลำดับการเขียนคู่ได้ แต่ห้ามสลับค่าภายในแต่ละคู่ตามใจ



③ (1,a) ≠ (a,1) เพราะตำแหน่งสลับกัน

ลงมือทำตามนี้

1. ดูชนิดวงเล็บ
2. ถ้าเป็นคู่ ให้ตรวจตำแหน่งแรกกับตำแหน่งแรก
3. ตรวจตำแหน่งสองกับตำแหน่งสอง
4. คู่เท่ากันได้เมื่อผ่านทั้งสองตำแหน่ง; ถ้าพบต่างตำแหน่งเดียวหยุดสรุปไม่เท่ากันได้

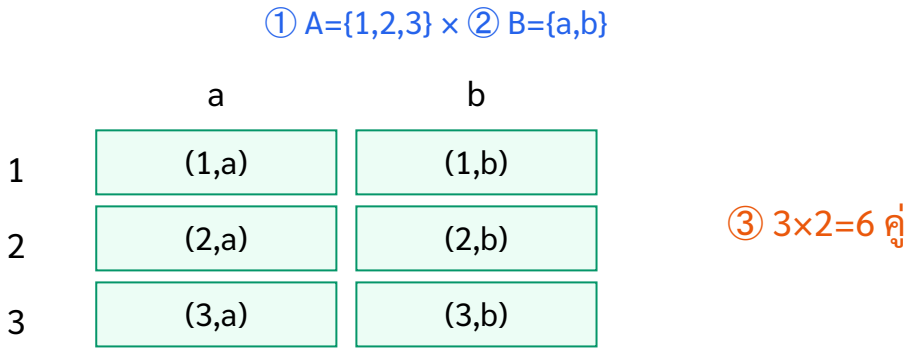
1.27 จับทุกตัวกับทุกตัว (ต้นทาง หน้า 15)

มีชั้นเก็บของ 1, 2, 3 แต่ละชั้นมีช่อง a และ b เราต้องเขียนรหัสทุกช่อง เริ่มชั้น 1 ให้ครบทั้ง a และ b แล้วค่อยขยับไปชั้นถัดไป วิธีนี้ช่วยให้ไม่มีช่องตกหล่น

ลองคิดก่อนเปิดเฉลย

ชั้น 1 มีคู่ใดบ้าง? ถ้าทั้งสามชั้นมีสองช่องเท่ากัน จะมีคู่ทั้งหมดกี่คู่?

เฉลย ชั้น 1 มี $(1,a),(1,b)$ ทั้งสามชั้นมี $3 \times 2 = 6$ คู่



การจับทุกสมาชิกจาก X เป็นตัวหน้า กับทุกสมาชิกจาก Y เป็นตัวหลัง เรียกว่า **ผลคูณคาร์ทีเซียน (Cartesian product)** เขียน $X \times Y = \{(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}$ ผลลัพธ์เป็นเซตที่มีคู่อันดับเป็นสมาชิก

ถ้า X มี m สมาชิกและ Y มี n สมาชิก แต่ละสมาชิกของ X จับกับ Y ได้ n แบบ เมื่อทำครบ m แถวจึงได้ $|X \times Y| = mn$ แต่ละคู่ไม่ซ้ำกันเพราะระบุแถวและคอลัมน์แน่นอน

โจทย์จากตัวอย่าง 1.5 $X = \{1,2,3\}, Y = \{a,b\}$ หา $X \times Y$

บรรทัด 1 — ตรึงตัวหน้าเป็น 1 ไล่ตัวหลัง a แล้ว b ได้ $(1,a),(1,b)$

บรรทัด 2 — ตรึงตัวหน้าเป็น 2 ไล่ตัวหลังครบอีกครั้ง ได้ $(2,a),(2,b)$

บรรทัด 3 — ตรึงตัวหน้าเป็น 3 ไล่ตัวหลังครบอีกครั้ง ได้ $(3,a),(3,b)$

① แถว 1

	a	b
1	(1,a)	(1,b)
2		
3		

② เพิ่มแถว 2

	a	b
1	(1,a)	(1,b)
2	(2,a)	(2,b)
3		

③ เพิ่มแถว 3

	a	b
1	(1,a)	(1,b)
2	(2,a)	(2,b)
3	(3,a)	(3,b)

บรรทัด 4 — รวมทุกคู่ในปีกกา $X \times Y = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$

เช็กกลับ ทุกตัวหน้าอยู่ X ทุกตัวหลังอยู่ Y แต่ละแถวมีสองคู่ รวมสามแถวได้หกคู่ ตรงกับ $|X||Y| = 3 \cdot 2 = 6$

ถ้าจับ “ตัวที่อยู่ลำดับเดียวกัน” จะได้เพียง (1,a), (2,b) และไม่รู้จะจับ 3 กับใคร วิธีนี้ไม่ใช่ผลคูณคาร์ทีเซียน เพราะโจทย์ต้องจับทุกตัวกับทุกตัว ไม่ใช่จับคู่แบบหนึ่งต่อหนึ่ง

ลงมือทำตามนี้

1. วางเซตตัวหน้าเป็นแถว เซตตัวหลังเป็นคอลัมน์
2. เติมคู่ของหนึ่งแถวให้ครบทุกคอลัมน์
3. เลื่อนไปแถวถัดไปโดยเริ่มคอลัมน์แรกใหม่
4. ใส่คู่ทั้งหมดในปีกกา
5. นับช่องให้เท่าผลคูณจำนวนสมาชิก แล้วหยุด

1.28 สลับกล่องและจับกล่องกับตัวเอง (ต้นทาง หน้า 15)

ใช้ X และ Y เดิม ถ้าให้ตัวอักษรเป็นตัวหน้าแทน แต่ละแถวจะเริ่มด้วย a หรือ b ถ้าเปลี่ยนให้ทั้งตัวหน้าและตัวหลังมาจาก X ตารางจะมีเลข 1, 2, 3 เป็นหัวทั้งสองทิศ

ลองคิดก่อนเปิดเฉลย

คู่ $(1, a)$ อยู่ใน $Y \times X$ ไหม? ใน $X \times X$ ต้องเก็บ $(1, 1)$ หรือห้ามจับตัวเอง?

เฉลย $(1, a)$ ไม่อยู่ใน $Y \times X$ เพราะตัวหน้าไม่อยู่ Y ส่วน $(1, 1)$ อยู่ใน $X \times X$ ได้ ไม่มีเงื่อนไขห้ามค่าซ้ำระหว่างสองตำแหน่ง

ผลคูณคาร์ทีเซียน **ไม่สลับที่โดยทั่วไป** เพราะสลับเซตแล้วบทบาทของตำแหน่งเปลี่ยน ส่วน $X \times X$ หมายถึงเลือกจาก X สองครั้งอย่างอิสระ ไม่ใช่การเลือกสมาชิกที่แตกต่างกันสองตัว

แม้ $|X \times Y| = |Y \times X|$ สำหรับเซตจำกัด จำนวนคู่เท่ากันไม่ได้แปลว่าคู่ภายในตรงกัน ต้องตรวจสมาชิกแบบเดียวกับการเท่ากันของเซต

โจทย์ต่อจากตัวอย่าง 1.5 $X = \{1, 2, 3\}, Y = \{a, b\}$ หา $Y \times X$ และ $X \times X$

บรรทัด 1 — ตัวหน้า a $(a, 1), (a, 2), (a, 3)$

บรรทัด 2 — ตัวหน้า b $(b, 1), (b, 2), (b, 3)$

① เริ่ม a

	1	2	3
a	(a,1)	(a,2)	(a,3)
b			

② เพิ่ม b

	1	2	3
a	(a,1)	(a,2)	(a,3)
b	(b,1)	(b,2)	(b,3)

③ ครบหกคู่

	1	2	3
a	(a,1)	(a,2)	(a,3)
b	(b,1)	(b,2)	(b,3)

บรรทัด 3 — รวมผลแรก $Y \times X = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$

บรรทัด 4 — X จับ X แถว 1 $(1, 1), (1, 2), (1, 3)$

บรรทัด 5 — X จับ X แถว 2 $(2, 1), (2, 2), (2, 3)$

บรรทัด 6 — X จับ X แถว 3 $(3,1),(3,2),(3,3)$

① ตัวหน้า 1

	1	2	3
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)
2			
3			

② ตัวหน้า 2

	1	2	3
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)
3			

③ ตัวหน้า 3

	1	2	3
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)

บรรทัด 7 — รวมผลที่สอง $X \times X =$
$\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$

เช็กกลับ ผลแรกมี $2 \cdot 3 = 6$ คู่ โดยตัวหน้าเป็นตัวอักษร ผลที่สองมี $3 \cdot 3 = 9$ คู่ โดยทั้งสองตำแหน่งมาจาก X และมีคู่แนวทแยงทั้งสามครบ

ไม่ตัด $(1,1),(2,2),(3,3)$ ทิ้งเพียงเพราะเลขซ้ำ: เซตไม่รับ “สมาชิกซ้ำทั้งชิ้น” แต่คู่อันดับหนึ่งชิ้นมีค่าในสองตำแหน่งตรงกันได้ อีกกรณีคือ $X \times \varnothing = \varnothing$ เพราะไม่มีตัวหลังให้สร้างคู่ แม้ X ไม่ว่าง

ลงมือทำตามนี้

1. ดูเซตที่อยู่ก่อน $\times$ ให้แน่ชัดว่าคือตัวหน้า
2. ถ้าทั้งสองเซตเหมือนกันก็ยังจับทุกช่องรวมแนวทแยง
3. ตรวจชนิดค่าของทั้งสองตำแหน่ง
4. ถ้าฝั่งหนึ่งว่าง ผลทั้งหมดว่าง; ถ้าไม่ว่างให้ตรวจจำนวนช่อง

1.29 เพิ่มตำแหน่งโดยไม่ทำทางเลือกหาย (ต้นทาง หน้า 16)

รหัสใหม่มีสามตำแหน่ง: เลขชั้น ตามด้วยตัวอักษรช่องแรก ตามด้วยตัวอักษรช่องที่สอง ชั้น 1 จึงมี (1,a,a), (1,a,b), (1,b,a), (1,b,b) ตัวอักษรตำแหน่งหลังเปลี่ยนอย่างอิสระ ไม่ต้องเหมือนหรือต่างกันเสมอ

ลองคิดก่อนเปิดเฉลย

ถ้ารหัสเริ่มเป็น (2,a, ...) ช่องสุดท้ายมีทางเลือกอะไร? เมื่อชั้นเปลี่ยนเป็น 3 จำนวนทางเลือกของสองช่องหลังเปลี่ยนไหม?

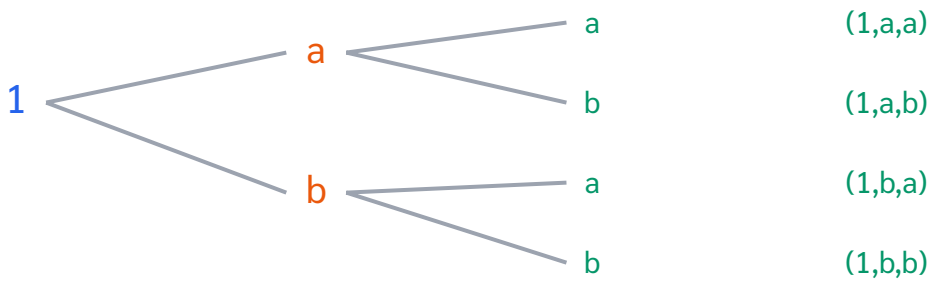
เฉลย ช่องสุดท้ายเป็น a หรือ b ได้ จำนวนทางเลือกสองช่องหลังไม่เปลี่ยนตามเลขชั้น: มี aa, ab, ba, bb สี่แบบทุกชั้น

รายการที่มี n ตำแหน่งเรียกว่า **อันดับ n หรือ n-tuple** เช่นสามตำแหน่งเป็น **อันดับสาม (ordered triple)** ผลคูณ $X_1 \times \cdots \times X_n$ เก็บ $(x_1, \ldots, x_n)$ ที่ตำแหน่ง i มาจาก X_i

ทุกทางเลือกของตำแหน่งแรกต่อได้กับทุกทางเลือกของตำแหน่งที่สอง แล้วต่อได้กับทุกทางเลือกถัดไป จึง $|X_1 \times \cdots \times X_n| = |X_1| \cdots |X_n|$ สำหรับเซตจำกัด ไม่ต้องสมมติว่าแต่ละเซตต่างกัน

โจทย์จากตัวอย่าง 1.6 $X = \{1, 2, 3\}, Y = \{a, b\}$ หา $X \times Y \times Y$

บรรทัด 1 — ทำสองตำแหน่งท้ายให้ครบ จาก Y สองครั้งได้ $(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)$



① สองตำแหน่งหลัง → ② ต่อเลขชั้น → ③ ทุกทางครบ

บรรทัด 2 — ใส่ตัวหน้า 1 $(1, a, a), (1, a, b), (1, b, a), (1, b, b)$

บรรทัด 3 — ใส่ตัวหน้า 2 $(2, a, a), (2, a, b), (2, b, a), (2, b, b)$

บรรทัด 4 — ใส่ตัวหน้า 3 $(3,a,a),(3,a,b),(3,b,a),(3,b,b)$

① เลขชั้น × ② ทางเลือกท้าย × ③ กล่องคำตอบ

	(a,a)	(a,b)	(b,a)	(b,b)
1	(1,a,a)	(1,a,b)	(1,b,a)	(1,b,b)
2	(2,a,a)	(2,a,b)	(2,b,a)	(2,b,b)
3	(3,a,a)	(3,a,b)	(3,b,a)	(3,b,b)

บรรทัด 5 — เขียนเซตคำตอบ $X \times Y \times Y = \{(1,a,a),(1,a,b),(1,b,a),(1,b,b),$
$(2,a,a),(2,a,b),(2,b,a),(2,b,b),(3,a,a),(3,a,b),(3,b,a),(3,b,b)\}$

เช็กกลับ ทุกตัวหน้าอยู่ X; สองตัวหลังอยู่ Y; มีสามแถว แถวละสี่ตัว จึง $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ อันดับสาม ทุกเส้นทางถูกนับครั้งเดียว

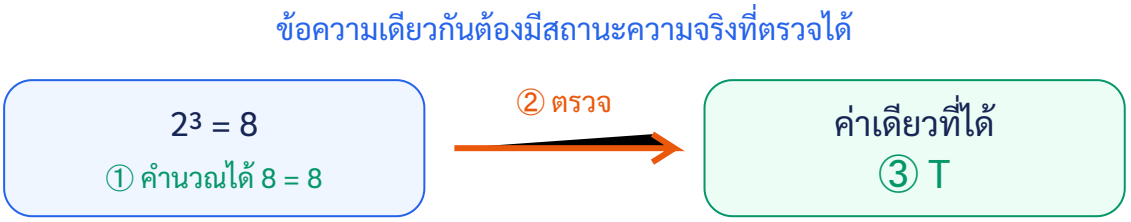
ถ้ารวม Y สองตัวให้เหลือ Y ตัวเดียว จะเหลือเพียงคู่อันดับและทำตำแหน่งที่สามหาย $X \times Y \times Y$ ไม่เท่ากับ $X \times Y$ เพราะจำนวนตำแหน่งเป็นส่วนหนึ่งของข้อมูล

ลงมือทำตามนี้

1. นับจำนวนตำแหน่งจากจำนวนเซตในผลคูณ
2. ตรึงตำแหน่งแรกแล้วแจกแจงตำแหน่งหลังให้ครบ
3. ทำซ้ำทุกค่าของตำแหน่งแรก
4. ตรวจทุกตำแหน่งกับเซตเจ้าของ
5. นับผลด้วยการคูณจำนวนทางเลือก เมื่อครบและไม่ซ้ำจึงหยุด

สะพานไปบทถัดไป: ในบทนี้เราตัดสินว่าเลขแต่ละตัว “ผ่านหรือไม่ผ่าน” เงื่อนไขแล้วรวมเงื่อนไขด้วย “และ / หรือ / ไม่” บทตรรกศาสตร์จะเก็บคำตอบผ่าน–ไม่ผ่านเป็นจริง–เท็จ แล้วศึกษากฎของการเชื่อมประโยคอย่างเป็นระบบ

บทที่ 2 ตรรกศาสตร์และตัวบ่งปริมาณ



จากการตรวจว่าอะไรอยู่ในเซต บทนี้เปลี่ยนมาถามว่าข้อความไหนจริง การใช้คำว่า และ หรือ ถ้า ทุกตัว และมีบางตัว จะเปลี่ยนวิธีตรวจคำตอบอย่างไร แต่ละภาพเก็บค่าตั้งต้นไว้ให้ย้อนตรวจได้

2.1 ประโยคแบบไหนตัดสินจริงหรือเท็จได้

ลองอ่าน “หนึ่งบวกหนึ่งเท่ากับสาม” แม้ข้อความนี้ผิด เราก็ยังตัดสินได้แน่นอนว่ามันผิด ต่างจาก “ช่วยเปิดประตู” ที่ไม่ได้อ้างความจริงอะไรให้ตรวจ

ลองก่อนเปิดเฉลย

“$2^3 = 8$” กับ “$x + 1 = 2$” ข้อไหนตัดสินได้ทันทีโดยไม่ถามค่าอื่นเพิ่ม

เฉลย ข้อแรกตัดสินได้ว่าจริง ส่วนข้อหลังต้องรู้ x ก่อน ถ้าตอบแบบนี้ คุณแยกสิ่งที่โจทย์บอกครบออกจากสิ่งที่ยังขาดได้แล้ว

ประโยคบอกเล่าที่มีค่าความจริงเพียงค่าเดียว เรียกว่า **ประพจน์ (proposition)** เขียน T แทนจริง และ F แทนเท็จ ตัวอักษร p, q, r ใช้เป็นชื่อย่อของประพจน์

การเป็นประพจน์ไม่ได้แปลว่าข้อความต้องจริง ข้อความที่เท็จก็เป็นประพจน์ได้ สิ่งสำคัญคือมีเรื่องให้ตัดสินและข้อมูลครบตามบริบท

① ตรวจข้อความที่ข้อมูลครบ

$1 + 1 = 2$ แต่ประโยคอ้างว่าเท่ากับ 3 จึงเป็นประพจน์ที่มีค่า F



② ตรวจอีกประโยค

$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ จึงเป็นประพจน์ที่มีค่า T



③ เช็กกลับส่วนที่ยังขาด

x + 1 = 2 ให้ผล T เมื่อ x = 1 แต่ให้ผล F เมื่อ x = 2 จึงยังไม่ใช่ประพจน์ถ้ายังปล่อย x ไว้



③ ต้องระบุค่า x หรือบอกขอบเขตให้ครบ

ลองทำผิดแล้วดูจุดที่พัง

ถ้าเห็นประโยคผิดแล้วตัดทิ้งว่าไม่ใช่ประพจน์ เราจะตัด 1 + 1 = 3 ผิดประเภท คำถาม “เวลาเท่าไร” กับคำสั่ง “อ่านหนังสือ” ต่างหากที่ไม่มีค่า T/F ในรูปที่ให้มา

ลงมือทำตามนี้

1. ถามว่าข้อความกำลังบอกเล่าอะไร
2. ตรวจว่ามีตัวแปรหรือบริบทที่ยังไม่กำหนดหรือไม่
3. ถ้าตัดสิน T/F ได้ค่าเดียว ให้หยุด: เป็นประพจน์

2.2 เอาข้อความมาต่อกัน: ไม่ / และ / หรือ

กล่องหนึ่งมีไฟสองดวง ดวงแรกติด ดวงที่สองดับ ประโยค “ไฟทั้งสองติด” ผิด แต่ประโยค “มีไฟอย่างน้อยหนึ่งดวงติด” ถูก

ลองก่อนเปิดเฉลย

ถ้าไฟสองดวงติดพร้อมกัน ประโยค “อย่างน้อยหนึ่งดวงติด” ยังจริงไหม

เฉลย ยังจริง เพราะคำว่าอย่างน้อยหนึ่งยอมให้สองดวงติดพร้อมกันได้

นิเสธ (negation) ¬p พลิกค่า p; **และ (conjunction)** p ∧ q ต้องจริงทั้งคู่; **หรือ (disjunction)** p ∨ q ต้องจริงอย่างน้อยหนึ่งข้าง ประพจน์ที่ต่อกันเรียกว่า **ประพจน์ประกอบ**

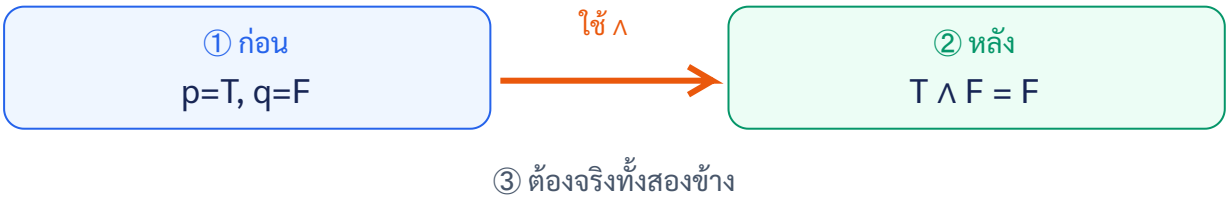
คำว่า “และ” ขอให้เงื่อนไขครบทั้งสองด้าน ส่วน “หรือ” ในตรรกศาสตร์ใช้ความหมายรวมกรณีที่ทั้งคู่จริงด้วย ถ้าโจทย์ต้องการอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น ต้องเขียนเงื่อนไขเพิ่ม

① อ่านค่าตั้งต้น ② ทำคอลัมน์กลาง ③ เทียบผล

p	q	¬p	p ∧ q	p ∨ q
T	T	F	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	F

① แทนค่าที่กำหนด

ให้ p = T, q = F เริ่มจากแถวที่ไฮไลต์ ไม่หยิบค่าข้ามแถว



② เปลี่ยนเครื่องหมายเดิม

คง p = T, q = F แล้วเปลี่ยนเฉพาะ ∧ เป็น ∨ ได้ T



③ ผ่านอย่างน้อยหนึ่งข้าง

③ เช็กกลับนิเสธ

¬q = ¬F = T ถ้า q คือ 1 + 1 = 3 แล้ว ¬q คือ 1 + 1 ≠ 3 ซึ่งจริง



③ F พลิกเป็น T

ลองทำผิดแล้วดูจุดที่พัง

ถ้าแปล “หรือ” ว่าห้ามจริงพร้อมกัน จะใส่ F ในแถว T,T แต่แถวนี้มีอย่างน้อยหนึ่งจริงอยู่แล้ว จึงต้องเป็น T

ลงมือทำตามนี้

1. แยกประโยคย่อยแล้วตั้งชื่อ
2. แทน T/F ของแต่ละชื่อ
3. คำนวณตามวงเล็บก่อน จากนั้นค่อยใช้ตัวเชื่อมด้านนอก
4. เช็กความหมายของคำว่าและ/หรือก่อนหยุด

2.2ก แปลข้อความเป็นสัญลักษณ์: ตัวอย่าง 1.7

ให้ป้าย p แทน “วันนี้อากาศหนาว” และป้าย q แทน “1+1=3” เราจะเก็บเนื้อหาของสองป้ายไว้ แล้วเลือกเครื่องหมายที่ตรงคำเชื่อมของแต่ละประโยค

ลองก่อนเปิดเฉลย

“วันนี้ไม่หนาว” ต้องเปลี่ยน p เป็น q หรือเพียงใส่เครื่องหมายว่าไม่หน้าป้าย p

เฉลย เพียงใส่ ¬ หน้าป้าย p เพราะเรายังกล่าวถึงอากาศวันนี้ ไม่ได้เปลี่ยนไปกล่าวเรื่องผลบวก

การแทนข้อความด้วยสัญลักษณ์ รักษาความหมายของแต่ละชื่อให้คงเดิม p,q เป็นชื่อข้อความ ไม่ใช่ตัวเลข และไม่จำเป็นต้องจริงจึงจะนำมาเชื่อมได้

การแปลกับการตัดสินค่าความจริงเป็นคนละงาน เรารู้ q=F จากเลข แต่ยังไม่รู้ p ถ้าโจทย์ไม่ได้บอกสภาพอากาศ

① แปลคำเชื่อมโดยคงชื่อ

วันนี้หนาวและ 1+1=3 → p∧q; วันนี้หนาวหรือ 1+1=3 → p∨q



③ ยังไม่เปลี่ยนความหมายของ p,q

② แปลการปฏิเสธ

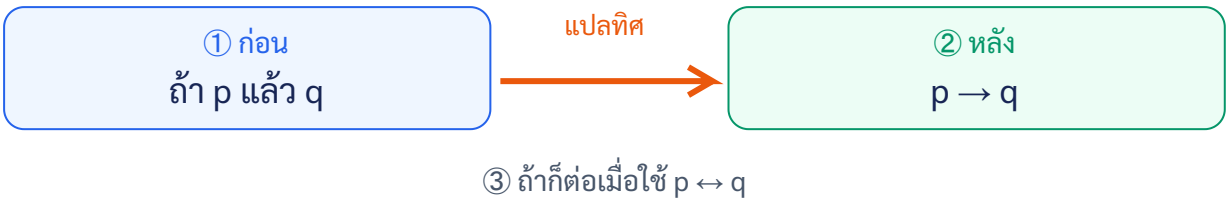
วันนี้ไม่หนาว → ¬p; 1+1≠3 → ¬q



③ q=F ทำให้ ¬q=T

③ แปลเงื่อนไข

วันนี้หนาวแล้ว 1+1=3 → p→q; วันนี้หนาวก็ต่อเมื่อ 1+1=3 → p↔q



③ ถ้าก็ต่อเมื่อใช้ p ↔ q

④ เช็กกลับด้วยสองกรณีของอากาศ

เพราะ q=F จึง p∧q=F เสมอ ส่วนผลอื่นขึ้นกับ p ตามตาราง ตรวจความหมายจากแต่ละแถวโดยไม่แต่งสภาพอากาศเพิ่ม

① อ่านค่าตั้งต้น ② ทำคอลัมน์กลาง ③ เทียบผล

p	q	p∧q	p∨q	¬p	p→q	p↔q
T	F	F	T	F	F	F
F	F	F	F	T	T	T

ลองทำผิดแล้วดูจุดที่พัง

อย่าแทน q ด้วย 3 เพราะ q เป็นทั้งประโยค 1+1=3 ค่าของมันคือ F ไม่ใช่เลขขวามือของสมการ

ลงมือทำตามนี้

1. เขียนความหมาย p,q ไว้ก่อน
2. หาคำเชื่อมแล้วรักษาทิศทาง
3. ใส่วงเล็บเมื่อเชื่อมหลายชั้น
4. แปลย้อนกลับเป็นภาษาเดิม ถ้าตรงจึงหยุด

2.3 ถ้า...แล้ว... ผิดสัญญาได้กรณีเดียว

กติกาบอกว่า “ถ้ากดปุ่ม ไฟจะติด” เหตุการณ์ที่จับได้ว่ากติกาพังคือกดปุ่มแล้วไฟไม่ติด ส่วนวันที่ไม่ได้กดปุ่มยังใช้ตัดสินว่ากติกาถูกละเมิดไม่ได้

ลองก่อนเปิดเฉลย

ถ้าไม่ได้กดปุ่ม แต่ไฟติดเพราะสวิตช์อีกตัว ถือว่าขัดกับกติกาข้างต้นไหม

เฉลย ไม่ขัด กติกาบอกผลเฉพาะตอนกดปุ่ม ไม่ได้ห้ามสาเหตุอื่นทำให้ไฟติด

ประพจน์เงื่อนไข (conditional / implication) $p \to q$ อ่านว่า ถ้า p แล้ว q โดย p คือเงื่อนไขตั้งต้น (hypothesis/premise) และ q คือผลสรุป (conclusion)

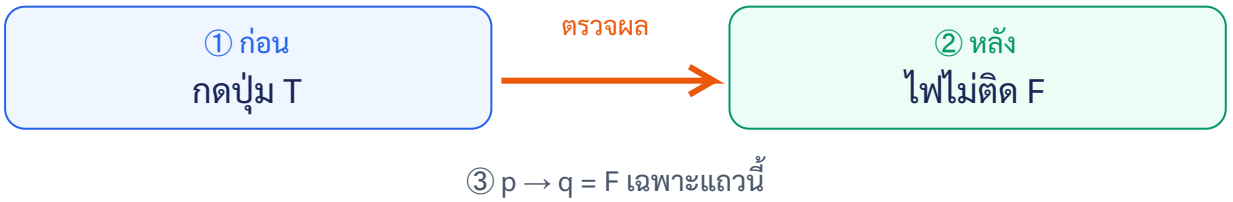
นิยามกำหนดให้ $p \to q$ เท็จเฉพาะ p จริงแต่ q เท็จ เพื่อเก็บความหมายว่าไม่เกิดเหตุผิดสัญญา กรณี p เท็จจึงได้ T ทั้งสองแถว ไม่ได้หมายความว่า p เป็นสาเหตุจริงในโลกเสมอ

① อ่านค่าตั้งต้น ② ทำคอลัมน์กลาง ③ เทียบผล

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

① หาเหตุผิดสัญญา

p = T ทำให้ต้องตรวจ q เมื่อ q = F สัญญาจึงพัง



③ $p \to q$ = F เฉพาะแถวนี้

② ตรวจกรณีที่ไม่ได้สัญญาไว้

เมื่อ p = F ไม่ว่าจะ q = T หรือ F ก็ไม่มีกรณีกดแล้วไม่ติด



③ ห้ามแทนลูกศรด้วยคำว่าและ

③ เช็กกลับด้วยจำนวน

ถ้า 4 < 2 แล้ว 7 < 10 แทนเป็น F → T จึงเป็น T เพราะไม่ใช่แถว T → F



③ ผลไม่ใช่ค่าของ 4<2 เพียงตัวเดียว

ลองทำผิดแล้วดูจุดที่พัง

การบอกว่า “หน้าเป็น F ดังนั้นทั้งประโยคเป็น F” ใช้กฎของ ∧ ผิดที่ เช่น F ∧ T = F แต่ F → T = T เป็นคนละตัวเชื่อม

ลงมือทำตามนี้

1. วง p และ q ให้ชัด
2. ตรวจ p ก่อน แล้วตรวจ q
3. ถ้าได้ T,F ตอบ F; กรณีอื่นตอบ T
4. ย้อนอ่านว่าเกิดเงื่อนไขจริงแต่ผลไม่เกิดหรือไม่ แล้วหยุด

2.4 แปลเงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอให้ลูกศรไม่กลับ

จำนวนที่หารด้วยสี่ลงตัว ย่อมหารด้วยสองลงตัว ลองเอา 8 มาดู: หารด้วยสี่ได้ลงตัว แล้วหารด้วยสองก็ลงตัว แต่ 6 หารด้วยสองลงตัวโดยไม่หารด้วยสี่ลงตัว

ลองก่อนเปิดเฉลย

ข้อความ “หารด้วยสองลงตัว” เพียงอย่างเดียว บังคับให้หารด้วยสี่ลงตัวได้ไหม

เฉลย ไม่ได้ ตัวอย่าง 6 แสดงว่าขากลับพัง แม้ขาไปถูก

เมื่อ p → q เราเรียก p ว่า **เงื่อนไขเพียงพอ (sufficient condition)** สำหรับ q และเรียก q ว่า **เงื่อนไขจำเป็น (necessary condition)** สำหรับ p คำว่า “q เมื่อ p”, “p only if q” และ “p ก็ต่อเมื่อจำเป็นต้องมี q” ในความหมาย only if ล้วนชี้ p → q ส่วน “p if q” ชี้ q → p

เพียงพอคือได้ p แล้วพาไปถึง q ได้ จำเป็นคือถ้าขาด q จะมี p ไม่ได้ จึงต้องอ่านบทบาทของเงื่อนไขแทนการเรียงคำซ้ายไปขวา

① ตั้งชื่อ

p: หารด้วย 4 ลงตัว; q: หารด้วย 2 ลงตัว จำนวน 8 ทำให้ทั้งคู่ T



③ p → q เป็นทิศที่โจทย์กล่าว

② ตรวจทิศย้อน

ที่จำนวน 6 ได้ q=T แต่ p=F จึง q→p เป็น F



③ q → p พังที่ 6

③ เช็กกลับคำแปล

“q จำเป็นสำหรับ p” หมายถึง p เกิดแล้ว q ต้องตามมา ไม่ใช่ q เกิดแล้ว p ต้องตามมา

① อ่านค่าตั้งต้น ② ทำคอลัมน์กลาง ③ เทียบผล

p	q	p → q	q → p
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	F
F	F	T	T

ลองทำผิดแล้วดูจุดที่พัง

เห็นคำว่า “จำเป็น” แล้วลากลูกศรออกจากคำที่ตามหลังจะได้ q→p ในตัวอย่างนี้ ซึ่งถูก 6 หักล้างทันที

ลงมือทำตามนี้

1. ตั้งชื่อข้อความสองข้าง
2. แปลเป็น “ถ้าอะไรเกิด ต้องได้อะไร”
3. ชี้จากเงื่อนไขที่เพียงพอไปสิ่งจำเป็น
4. หาค่าที่ทำให้ทิศกลับต่างกันเพื่อเช็ก แล้วหยุด

2.5 ต้องได้ทั้งขาไปและขากลับ

ตู้แสดงไฟเขียวตรงกับประตูเปิดทุกครั้ง ถ้าประตูเปิดต้องไฟเขียว และถ้าไฟเขียวก็ต้องประตูเปิด ทั้งสองอย่างต้องอยู่ในสถานะตรงกัน

ลองก่อนเปิดเฉลย

ถ้าประตูปิดและไฟไม่เขียว ข้อความ “สองสถานะตรงกัน” เป็นจริงหรือเท็จ

เฉลย จริง ทั้งคู่ปิดเหมือนกันก็ตรงกัน ไม่จำเป็นต้องเปิดทั้งคู่

ประพจน์สองเงื่อนไข (biconditional) $p \leftrightarrow q$ อ่านว่า p ก็ต่อเมื่อ q หรือ p if and only if q (iff) หมายถึง $p \rightarrow q$ และ $q \rightarrow p$ ต้องจริงพร้อมกัน p จึงเป็นทั้งเงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอสำหรับ q

ถ้าค่าต่างกัน ลูกศรทิศหนึ่งจะกลายเป็น $T \rightarrow F$ จึงพัง แต่ถ้าค่าตรงกันทั้งสองลูกศรผ่านพร้อมกันได้

① อ่านค่าตั้งต้น ② ทำคอลัมน์กลาง ③ เทียบผล

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

① แยกคำว่าก็ต่อเมื่อ

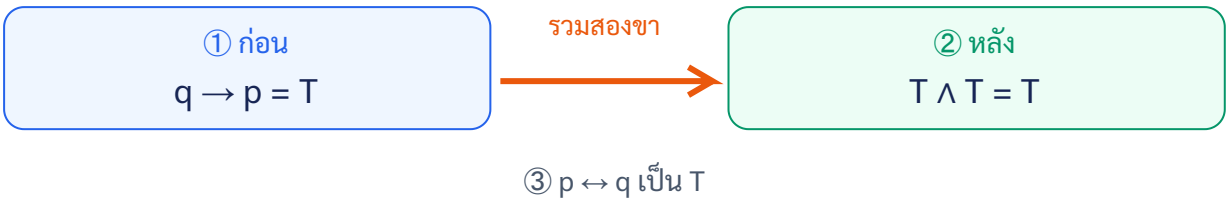
ให้ p=F, q=F: ขาไป F→F=T



③ ยังเหลือขากลับต้องตรวจ

② ตรวจขากลับ

ขากลับ q→p ก็เป็น F→F=T จึงรวมด้วยและได้ T∧T=T



③ p ↔ q เป็น T

③ เช็กกลับ

เทียบ p กับ q โดยตรง: F และ F เท่ากันจริง จึงยืนยันผลเดียวกับการแยกลูกศร



③ ↔ จริงเมื่อค่าเท่ากัน

ลองทำผิดแล้วดูจุดที่พัง

ถ้าใช้กฎของ “และ” แล้วบอกว่า F↔F เป็น F จะทำให้กรณีทั้งคู่ไม่เกิดถูกตัดผิด ทั้งที่ ↔ ถามว่าค่าเท่ากันหรือไม่

ลงมือทำตามนี้

1. แปล iff เป็นลูกศรสองทิศ
2. ตรวจแต่ละทิศแยกกัน
3. เชื่อมด้วย ∧
4. ตรวจซ้ำว่าค่าสองข้างเท่ากัน แล้วหยุด

2.6 จากประโยคยาวไปสู่คำตอบ: ตัวอย่าง 1.8 ข้อ 1–3

ประโยค “1 > 2 หรือ 5 > 3” มีสองชิ้นที่ตรวจแยกกันได้ เราไม่ต้องเดาจากความรู้สึกว่าทั้งประโยคดูจริงหรือไม่

ลองก่อนเปิดเฉลย

ชิ้นแรกผิด แต่ชิ้นที่สองถูก คำว่า “หรือ” จะให้ผลอะไร

เฉลย ได้ T เพราะมีชิ้นที่จริงอย่างน้อยหนึ่งชิ้น

การประเมินค่าความจริง คือแทนข้อความเล็กด้วย T/F แล้วคำนวณจากด้านในออกด้านนอก วงเล็บเป็นคำสั่งให้รวมชิ้นนั้นก่อน

การเก็บผลชิ้นเล็กไว้ทำให้เราใช้กฎถูกตัว ไม่เผลอให้เครื่องหมายด้านนอกไปทำก่อนเงื่อนไขที่อยู่ในวงเล็บ

① แยกข้อมูลที่เปลี่ยนได้ ② < เป็น strict ③ ห้ามเดาวัน

สถานะวัน	6<6	ผลที่ตรวจ
อังคาร	F	ใช้ค่าจริง
ไม่ใช่อังคาร	F	วันเปลี่ยน แต่ 6<6 ยัง F

ข้อ 1 · ① ตรวจข้อความย่อย

1 > 2 เป็น F; 5 > 3 เป็น T



③ ใช้กฎหรือเป็นขั้นถัดไป

ข้อ 1 · ② รวมและเช็กกลับ

FvT=T ตรวจย้อนว่า 5>3 จริงหนึ่งข้างก็เพียงพอ



③ ตรงกับประโยคเดิม

ข้อ 2 · ① แยกส่วนที่ยังไม่ทราบ

“ถ้า 5>3 แล้ววันนี้เป็นวันอังคาร” ให้ d เป็นข้อความวันนี้เป็นวันอังคาร จะได้ T→d



③ ยังไม่ทราบวันจากโจทย์

ข้อ 2 · ② แตกสองกรณีและเช็กกลับ

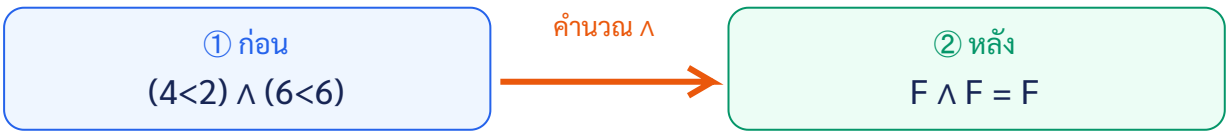
ถ้า d=T ได้ T→T=T; ถ้า d=F ได้ T→F=F ดังนั้นทั้งประโยคมีค่าเท่ากับ d ต้นฉบับไม่ระบุวัน จึงให้คำตอบ T/F เดียวไม่ได้

① อ่านค่าตั้งต้น ② ทำคอลัมน์กลาง ③ เทียบผล

d	T → d
T	T
F	F

ข้อ 3 · ① คำนวณในวงเล็บ

4<2 เป็น F และ 6<6 เป็น F จึง (4<2 ∧ 6<6)=F



③ เครื่องหมาย < ไม่รวมเท่ากับ

ข้อ 3 · ② รวมและเช็กกลับ

7<10 เป็น T ได้ F→T=T เงื่อนไขตั้งต้นไม่เกิด จึงไม่เกิดกรณี T→F



③ เช็กว่าคู่ค่าไม่ใช่ T,F

ลองทำผิดแล้วดูจุดที่พัง

อย่าเติมวันปัจจุบันให้โจทย์ที่ไม่ได้ระบุวัน และอย่าแปล 6<6 เป็น T เพราะคำว่า “น้อยกว่า” ไม่รวมความเท่ากัน

ลงมือทำตามนี้

1. วงข้อความย่อย
2. คำนวณแต่ละข้อความที่ข้อมูลครบ
3. ถ้าข้อมูลไม่ครบ ให้เก็บเป็นตัวแปรแล้วแยกกรณี
4. รวมจากในวงเล็บออกมาและตรวจความหมายเดิมก่อนหยุด

2.7 ประโยคซ้อนและตารางสามตัว: ตัวอย่าง 1.8 ข้อ 4–5

ถ้าพูดว่า “ไม่ใช่ว่าทั้งสองอย่างผิดพร้อมกัน” คำว่าไม่กำลังครอบทั้งกลุ่ม ไม่ได้เกาะแค่คำแรก เราจึงต้องรักษาวงเล็บให้ครบ

ลองก่อนเปิดเฉลย

เมื่อในวงเล็บได้ F การใส่ “ไม่” ครอบทั้งวงเล็บทำให้เป็นค่าอะไร

เฉลย เป็น T เพราะเราปฏิเสธผลของทั้งกลุ่มแล้ว ไม่ใช่ปฏิเสธแต่ชิ้นแรก

เราเรียกส่วนที่ถูกเครื่องหมายครอบว่า **ขอบเขตของตัวเชื่อม** วิธีปลอดภัยคือเขียนวงเล็บให้ชัด และทำตารางให้มีคอลัมน์กลางทุกส่วนที่ยังต้องใช้

สามตัวแปรมีกรณีเป็นไปได้ 2×2×2=8 แถว เพราะแต่ละตัวเลือก T หรือ F ได้โดยอิสระ การไล่ครบจึงไม่พลาดกรณีที่ทำให้คำตอบเปลี่ยน

① ใช้แถวค้านเดียวกัน ② คำนวณสองวงเล็บ ③ ผลต่างกัน

p	q	r	(p∧q)∨r	p∧(q∨r)
F	T	T	T	F

ข้อ 4 · ① เขียนตามขอบเขต

“ถ้าไม่ใช่กรณีที่ (6<6 และ 7 ไม่น้อยกว่า 10) แล้ว 4<2” เขียนเป็น ¬[(6<6)∧¬(7<10)]→(4<2)



③ 6<6 ก็เป็น F

ข้อ 4 · ② ทำวงเล็บแล้วพลิก

ในวงเล็บเป็น F∧F=F จากนั้น ¬F=T



③ ห้ามข้ามการพลิกทั้งกลุ่ม

ข้อ 4 · ③ รวมและเช็กกลับ

ด้านหลัง 4<2 เป็น F จึง T→F=F ตรวจว่าเงื่อนไขตั้งต้นจริงแต่ผลสรุปเท็จพอดี



③ พบกรณีผิดสัญญา

ข้อ 5 · ① ตั้งคอลัมน์กลาง

สำหรับ (p∧q)∨r ยังไม่มีค่า p,q,r จึงต้องตอบด้วยตารางครบทุกแถว เริ่มคำนวณ p∧q ก่อน

① อ่านค่าตั้งต้น ② ทำคอลัมน์กลาง ③ เทียบผล

p	q	r	p ∧ q	(p ∧ q) ∨ r
T	T	T	T	T
T	T	F	T	T
T	F	T	F	T
T	F	F	F	F
F	T	T	F	T
F	T	F	F	F
F	F	T	F	T
F	F	F	F	F

ข้อ 5 · ② อ่านแถวและเช็กกลับ

แถว p=T,q=F,r=T ให้ p∧q=F แล้ว F∨T=T; แถวสุดท้าย F,F,F ให้ F∨F=F จึงไม่ใช่ประโยคที่จริงเสมอ



③ ใช้ค่าจากแถวเดียวกันตลอด

ลองทำผิดแล้วดูจุดที่พัง

ถ้าสลับเป็น p∧(q∨r) โดยพลการ แถว T,F,T ยังบังเอิญได้ T แต่แถว F,T,T จะได้ F แทน T เดิม จึงใช้แถวเดียวรับรองการสลับวงเล็บไม่ได้

ลงมือทำตามนี้

1. รักษาวงเล็บจากภาษา
2. นับตัวแปรอิสระเพื่อเตรียมทุกแถว
3. สร้างคอลัมน์กลางก่อนคอลัมน์ผล
4. ทดลองแถวที่อาจทำให้รูปที่สลับวงเล็บต่างกัน แล้วหยุด

2.8 สองรูปเขียนแทนกันได้เมื่อเท่ากันทุกแถว

ตารางสองคอลัมน์อาจตรงกันในแถวแรก แต่แถวต่อมาคนละค่า ถ้าจะใช้ข้อความหนึ่งแทนอีกข้อความหนึ่ง เราต้องแน่ใจว่าจะไม่เปลี่ยนคำตอบเมื่อเปลี่ยนค่าตั้งต้น

ลองก่อนเปิดเฉลย

p→q กับ q→p ให้ T เหมือนกันเมื่อ p=q=T เพียงแถวเดียวพอยืนยันว่าสองรูปแทนกันได้ไหม

เฉลย ไม่พอ เพราะแถว p=T,q=F ให้รูปแรก F แต่รูปที่สอง T

สมมูลเชิงตรรกศาสตร์ (logical equivalence) เขียน P≡Q หมายถึงสองนิพจน์ให้ค่าตรงกันทุกการกำหนดค่าของประพจน์ย่อย สัญลักษณ์ ≡ เป็นการกล่าวถึงรูปประโยคทั้งสอง ส่วน ↔ เป็นตัวเชื่อมที่อยู่ในประโยค

ทุกแถวคือทุกสถานการณ์ที่ประพจน์ย่อยอาจเป็นได้ ถ้ามีแถวเดียวต่างกัน การแทนรูปจะเปลี่ยนความหมายในสถานการณ์นั้นทันที

① ทำรูปเดิม

ตัวอย่าง 1.9 ต้องเทียบ p→q กับ ¬q→¬p เริ่มจากเติม ¬q และ ¬p ให้ถูก

① อ่านค่าตั้งต้น ② ทำคอลัมน์กลาง ③ เทียบผล

p	q	¬q	¬p	p → q	¬q → ¬p
T	T	F	F	T	T
T	F	T	F	F	F
F	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T

② อ่านกรณีที่น่ากลัว

ที่ p=T,q=F รูปซ้าย T→F=F รูปขวา ¬F→¬T=T→F=F จึงยังตรงกัน



③ ทั้งสองลูกศรได้ F

③ เช็กกลับครบทุกแถว

ผลทั้งสองคอลัมน์เรียงเป็น T,F,T,T เหมือนกันครบ จึงสรุป p→q≡¬q→¬p ไม่ใช่เพียงเพราะเห็นแถวหนึ่งตรงกัน



③ ไม่มีแถวต่างกัน

ลองทำผิดแล้วดูจุดที่พัง

ถ้ากลับลูกศรเฉย ๆ เป็น q→p จะได้ T,T,F,T ซึ่งต่างจากเดิม ต้องทั้งสลับตำแหน่งและปฏิเสธจึงได้รูปแย้งสลับที่

ลงมือทำตามนี้

1. รวมตัวแปรที่ปรากฏทั้งสองรูป
2. ไล่ทุกชุด T/F
3. ทำแต่ละรูปจากด้านในออก
4. เทียบผลทีละแถว: ต่างหนึ่งแถวหยุดว่าไม่สมมูล; ตรงครบจึงหยุดว่าสมมูล

2.9 เปลี่ยนลูกศรเป็น “หรือ” และเปลี่ยนสองทางเป็นสองขา

เครื่องหมายลูกศรผิดเฉพาะเมื่อหน้า T หลัง F ถ้าเราสร้างข้อความใหม่ที่ผิดตรงแถวเดียวกันพอดี ก็แทนลูกศรได้โดยความหมายไม่เปลี่ยน

ลองก่อนเปิดเฉลย

$\neg p \vee q$ จะผิดได้เมื่อ $\neg p$ และ q เป็นค่าอะไร

เฉลย ต้องเป็น F ทั้งคู่ จึงเท่ากับ $p=T, q=F$ ซึ่งตรงกับกรณีผิดของ $p \to q$ พอดี

กฎแปลงเงื่อนไข (implication law) คือ $p \to q \equiv \neg p \vee q$ ส่วน **กฎสองเงื่อนไข (biconditional law)** คือ $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$

เราสร้างรูปแทนจากตำแหน่งที่ทำให้เท็จ ไม่ใช่จำว่าเอาเครื่องหมายไปเปลี่ยนเฉย ๆ นิเสธจึงต้องอยู่ที่ p ซึ่งเป็นต้นลูกศร

① แปลงลูกศรหนึ่งขา

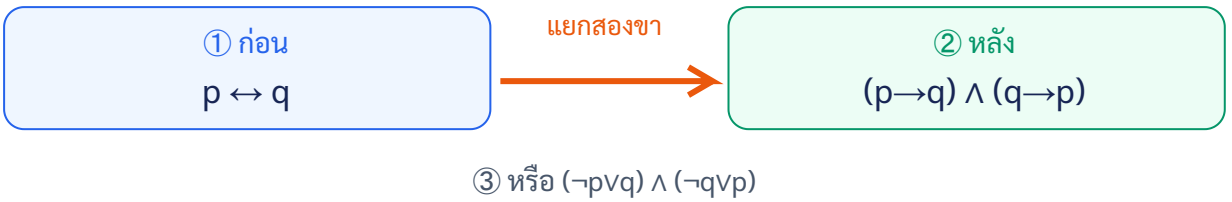
พลิก p แล้วเชื่อม q ด้วย $\vee$ จะตรงกันครบทุกแถว

① อ่านค่าตั้งต้น ② ทำคอลัมน์กลาง ③ เทียบผล

p	q	$p \to q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$
T	T	T	F	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

② แปลงลูกศรสองขา

รูป p↔q ต้องเก็บทั้ง p→q และ q→p ไว้ แล้วเชื่อมด้วย ∧ เพราะขาดขาใดขาหนึ่งไม่ได้



③ หรือ (¬p∨q) ∧ (¬q∨p)

③ เช็กกลับ

ที่ p=T,q=F ขาไป F แต่ขากลับ T จึงรวม F∧T=F ตรงกับ p↔q ที่ค่าต่างกัน

① อ่านค่าตั้งต้น ② ทำคอลัมน์กลาง ③ เทียบผล

p	q	p ↔ q	(p→q) ∧ (q→p)
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	F	F
F	F	T	T

ลองทำผิดแล้วดูจุดที่พัง

เขียน ¬q∨p แทน p→q จะเป็นทิศย้อน q→p แถว T,F ทำให้รูปผิดนี้เป็น T แต่รูปเดิมเป็น F

ลงมือทำตามนี้

1. ชี้ต้นลูกศรก่อน
2. ปฏิเสธเฉพาะต้น แล้วเปลี่ยน → เป็น ∨
3. ถ้าเป็น ↔ ให้แยกสองทิศก่อน
4. เช็กที่แถว T,F และเทียบครบตารางก่อนหยุด

2.10 ปฏิเสธทั้งกลุ่มต้องเปลี่ยนตัวเชื่อมด้วย

ประโยค “ไม่ได้เปิดไฟทั้งสองดวงพร้อมกัน” ยอมให้ดับแค่ดวงเดียวได้ จึงไม่เหมือน “ไฟดับทั้งสองดวง”

ลองก่อนเปิดเฉลย

ถ้าดวงแรกติด ดวงที่สองดับ ข้อความ “ไม่ได้ติดพร้อมกัน” จริงไหม แล้ว “ดับทั้งคู่” จริงไหม

เฉลย ข้อแรกจริง ข้อหลังเท็จ จุดต่างนี้บอกว่าเมื่อปฏิเสธ “และ” ต้องกลายเป็น “หรือ”

กฎปฏิเสธกลุ่ม (De Morgan’s laws) คือ $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ และ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ การปฏิเสธซ้อนสองครั้ง $\neg\neg p \equiv p$ เรียกว่า double negation

การไม่ผ่านข้อกำหนดที่ต้องครบทั้งคู่ ต้องเสียเพียงข้างเดียวก็พอ ส่วนการไม่ผ่านข้อกำหนดที่ขออย่างน้อยหนึ่ง ต้องเสียทั้งสองข้าง จึงทำให้ $\wedge$ และ $\vee$ สลับกัน

① ปฏิเสธและ

เทียบ $\neg(p \wedge q)$ กับ $\neg p \vee \neg q$ โดยแถว T,F แสดงชัดว่าต้องมี $\vee$

① อ่านค่าตั้งต้น ② ทำคอลัมน์กลาง ③ เทียบผล

p	q	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$
T	T	F	F
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	T	T

② ปฏิเสธหรือ

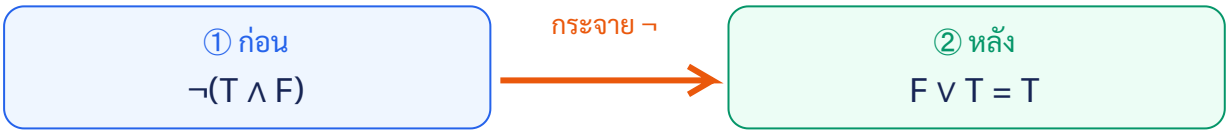
เทียบ ¬(p∨q) กับ ¬p∧¬q คอลัมน์ทั้งคู่จริงเฉพาะแถว F,F

① อ่านค่าตั้งต้น ② ทำคอลัมน์กลาง ③ เทียบผล

p	q	¬(p∨q)	¬p ∧ ¬q
T	T	F	F
T	F	F	F
F	T	F	F
F	F	T	T

③ เช็กกลับการใช้จริง

¬(T∧F)=¬F=T ขวามือ ¬T∨¬F=F∨T=T ตรงกัน ถ้าปฏิเสธอีกครั้งจะคืน F เดิม



③ เปลี่ยน ∧ เป็น ∨ พร้อมพลิกทุกข้าง

ลองทำผิดแล้วดูจุดที่พัง

รูปผิด ¬(p∧q)=¬p∧¬q ให้ F ที่แถว T,F ขณะที่รูปเดิมให้ T เหตุผิดคือพลิกค่าแล้วลืมเปลี่ยนเกณฑ์จากครบคู่เป็นอย่างน้อยหนึ่ง

ลงมือทำตามนี้

1. ขีดขอบเขตของ ¬ ว่าครอบกลุ่มใด
2. พลิกตัวเชื่อม ∧↔∨ ภายในกลุ่มนั้น
3. ส่ง ¬ ให้ทั้งสองข้าง
4. ลบ ¬¬ เฉพาะคู่ที่ติดกัน แล้วตรวจตัวอย่างก่อนหยุด

2.11 สลับที่กับย้ายวงเล็บ: อะไรเปลี่ยนได้

ถ้าขอให้ไฟสามดวงติดครบ ไม่ว่าจะเช็กสองดวงแรกก่อนหรือสองดวงหลังก่อน สุดท้ายก็ยังต้องติดครบสามดวงเหมือนกัน

ลองก่อนเปิดเฉลย

เมื่อ $p=T, q=F, r=T$ จะย้ายวงเล็บของ $(p \wedge q) \wedge r$ เป็น $p \wedge (q \wedge r)$ แล้วทำให้ผลเปลี่ยนไหม

เฉลย ไม่เปลี่ยน ทั้งสองรูปมี $q=F$ ขวางการติดครบ จึงเป็น F เหมือนกัน

กฎการจัดหมู่ (associative laws) ย้ายวงเล็บเมื่อใช้ตัวเชื่อมชนิดเดียวกัน: $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ และ $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ ส่วน **กฎการสลับที่ (commutative laws)** ให้ $p \wedge q \equiv q \wedge p$ และ $p \vee q \equiv q \vee p$

การจัดหมู่ไม่ได้เปลี่ยนว่าต้องครบทั้งหมดหรือขออย่างน้อยหนึ่ง การสลับที่ก็ไม่ได้เปลี่ยนสมาชิกที่ต้องตรวจ แต่เหตุผลนี้ใช้ไม่ได้กับลูกศรที่มีทิศทาง

① ลองย้ายวงเล็บของและ

คงค่าทั้งสามไว้แล้วคิดแต่ละวงเล็บก่อน จะได้เหมือนกันทุกแถว

① อ่านค่าตั้งต้น ② ทำคอลัมน์กลาง ③ เทียบผล

p	q	r	$(p \wedge q) \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
T	T	T	T	T
T	T	F	F	F
T	F	T	F	F
T	F	F	F	F
F	T	T	F	F
F	T	F	F	F
F	F	T	F	F
F	F	F	F	F

② ลองย้ายวงเล็บของหรือ

กรณี T,F,T: (T∨F)∨T=T∨T=T และ T∨(F∨T)=T∨T=T ทั้งสองรูปต้องการอย่างน้อยหนึ่งตัวจริง



③ เช็กกลับการสลับที่

T∨F กับ F∨T เป็น T ทั้งคู่; T∧F กับ F∧T เป็น F ทั้งคู่ ตรวจครบสี่แถวได้ดังนี้

① อ่านค่าตั้งต้น ② ทำคอลัมน์กลาง ③ เทียบผล

p	q	p∨q	q∨p	p∧q	q∧p
T	T	T	T	T	T
T	F	T	T	F	F
F	T	T	T	F	F
F	F	F	F	F	F

ลองทำผิดแล้วดูจุดที่พัง

ห้ามใช้ชื่อกฎจัดหมู่กับ (p∧q)∨r เพื่อย้ายเป็น p∧(q∨r) เพราะเครื่องหมายต่างชนิด แถว F,T,T ทำให้ซ้าย T แต่ขวา F

ลงมือทำตามนี้

1. ดูว่าเปลี่ยนลำดับหรือเปลี่ยนวงเล็บ
2. การจัดหมู่ต้องมีตัวเชื่อมเดียวกันทั้งหมดในช่วงที่ย้าย
3. การสลับที่ใช้กับ ∧ หรือ ∨ ไม่ใช่ →
4. ทดสอบแถวที่มีค่าผสมก่อนหยุด

2.12 กระจายตัวเชื่อมให้เงื่อนไขยังครบ

ถ้าการเข้าใช้ห้องต้องมีบัตร และมีอย่างใดอย่างหนึ่งระหว่างรหัสกับใบอนุญาต เราแยกทางเข้าได้เป็น “บัตรพร้อมรหัส” หรือ “บัตรพร้อมใบอนุญาต” ทุกทางยังต้องมีบัตร

ลองก่อนเปิดเฉลย

ในสองทางใหม่ ถ้าลืมเขียนบัตรไว้กับทางใบอนุญาต จะอนุญาตคนที่ไม่มีบัตรหรือไม่

เฉลย จะอนุญาตผิดได้ จึงต้องคัดลอกเงื่อนไขบัตรไปทั้งสองทาง

กฎการแจกแจง (distributive laws) คือ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ และ $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

รูปแรกแตกเป็นทางเลือกสองทางที่มี p ร่วมกัน รูปที่สองตรวจได้ด้วย p สองกรณี: ถ้า p จริงทั้งสองรูปจริงทันที; ถ้า p เท็จทั้งสองรูปต้องการ $q \wedge r$ เหมือนกัน

① แจกแจงและเหนือหรือ

เก็บ p ไปทั้งกิ่ง q และกิ่ง r แล้วเชื่อมกิ่งด้วย ∨



② เทียบครบทุกแถวของกฎแรก

คอลัมน์สองช่องท้ายต้องตรงกันทุกแถว โดย p ถูกเก็บไว้ทั้งสองกิ่ง

① อ่านค่าตั้งต้น ② ทำคอลัมน์กลาง ③ เทียบผล

p	q	r	p∧(q∨r)	(p∧q)∨(p∧r)
T	T	T	T	T
T	T	F	T	T
T	F	T	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	F	F
F	T	F	F	F
F	F	T	F	F
F	F	F	F	F

②ก เทียบครบทุกแถวของกฎที่สอง

เมื่อ p=F ทั้งสองคอลัมน์ท้ายเหลือผลเดียวกับ q∧r เมื่อ p=T ทั้งคู่จริงทันที

① อ่านค่าตั้งต้น ② ทำคอลัมน์กลาง ③ เทียบผล

p	q	r	p∨(q∧r)	(p∨q)∧(p∨r)
T	T	T	T	T
T	T	F	T	T
T	F	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	T	T
F	T	F	F	F
F	F	T	F	F
F	F	F	F	F

③ เช็กกลับกรณีที่ลืมแจก

ให้ p=F,q=F,r=T: รูปเดิม F∧(F∨T)=F แต่รูปผิด (p∧q)∨r ให้ (F∧F)∨T=T



③ ห้ามปล่อยกิ่ง r ไม่มี p

ลองทำผิดแล้วดูจุดที่พัง

การจำว่าแจกแจงเหมือนเลขโดยไม่ดูเครื่องหมาย ทำให้ลืมกฎที่ ∨ แจกเหนือ ∧ ได้ด้วย ในตรรกศาสตร์ทั้งสองสูตรถูก แต่ต้องคงตัวเชื่อมตามรูปให้ครบ

ลงมือทำตามนี้

1. วงส่วนด้านนอกที่ต้องแจก
2. คัดลอกส่วนนั้นเข้าทั้งสองกิ่ง
3. ใช้ตัวเชื่อมด้านในเดิมเชื่อมสองกิ่ง
4. เช็กว่าทั้งสองคอลัมน์ตรงกันครบ แล้วหยุด

2.13 พิสูจน์สมมูลด้วยกฎทีละบรรทัด: ตัวอย่าง 1.10

จาก “ถ้ากดปุ่ม ไฟติด” ลองมองกลับจากเหตุการณ์ไฟไม่ติด ถ้าข้อความเดิมจริงอยู่ แปลว่าต้องไม่ได้กดปุ่ม มิฉะนั้นจะเป็นกดแล้วไม่ติดที่ทำให้ข้อความเดิมพัง

ลองก่อนเปิดเฉลย

ควรเขียนใหม่ว่า “ถ้าไฟไม่ติด จะไม่ได้กดปุ่ม” หรือ “ถ้าไฟติด จะกดปุ่ม”

เฉลย รูปแรก เพราะมันห้ามเหตุการณ์กดแล้วไม่ติดเหมือนรูปเดิม รูปหลังอนุมานสาเหตุจากผลมากเกินไป

รูป $\neg q \to \neg p$ เรียกว่า **แย้งสลับที่ (contrapositive)** ของ $p \to q$ ทั้งสองสมมูลกัน ส่วน $q \to p$ คือรูปกลับ (converse) และ $\neg p \to \neg q$ คือรูปผกผัน (inverse) ซึ่งไม่จำเป็นต้องสมมูลกับเดิม

แต่ละบรรทัดต่อไปเปลี่ยนรูปด้วยกฎที่ผ่านตารางแล้ว จึงรักษาค่าความจริงทุกแถว เราจะไม่ข้ามนิเสธซ้อนที่ทำให้เห็นต้นของลูกศรใหม่



③ เปลี่ยนครบสองอย่าง จึงคงค่าเดิม

① เอาลูกศรออก

$p \to q \equiv \neg p \vee q$ ใช้กฎแปลงเงื่อนไข



③ ต้นลูกศร p ถูกปฏิเสธ

② สลับลำดับของหรือ

¬pvq ≡ qv¬p ใช้กฎการสลับที่



③ ยังเป็นหรือ ไม่ใช่ลูกศร

③ ทำให้เห็นต้นลูกศรใหม่

qv¬p ≡ ¬(¬q)v¬p เพราะ ¬¬q≡q



③ ตอนนี้ตรงรูป ¬A ∨ B

④ พับกลับเป็นลูกศร

ให้ A=¬q และ B=¬p ใช้ ¬A∨B≡A→B ได้ ¬q→¬p



③ ทั้งสลับตำแหน่งและปฏิเสธ

⑤ เช็กกลับ

คอลัมน์ p→q กับ ¬q→¬p เป็น T,F,T,T ทั้งคู่ตามตารางใน 2.8; แถว T,F ให้ F ทั้งคู่ จึงไม่มีทิศที่เปลี่ยนความหมาย

① อ่านค่าตั้งต้น ② ทำคอลัมน์กลาง ③ เทียบผล

p	q	เดิม	แย้งสลับที่	รูปกลับ	รูปผกผัน
T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T
F	T	T	T	F	F
F	F	T	T	T	T

ลองทำผิดแล้วดูจุดที่พัง

ถ้าเปลี่ยน q∨¬p เป็น q→¬p โดยตรง จะลืมว่าเครื่องหมายหน้า q ต้องเป็น ¬ ของต้นลูกศรใหม่ ทำให้เอานิเสธผิดตำแหน่ง

ลงมือทำตามนี้

1. เอา → ออกก่อน
2. จัดลำดับด้วยกฎของ ∨
3. ทำให้เห็นรูป ¬A∨B ชัด ๆ
4. พับเป็น A→B แล้วตรวจค่าเดิมทุกแถวก่อนหยุด

2.14 ปฏิเสธ “ถ้า...แล้ว...”: ตัวอย่าง 1.11

ถ้าจะบอกว่ากติกา “กดปุ่มแล้วไฟติด” ไม่จริง เราต้องพบเหตุการณ์กดปุ่มแล้วไฟไม่ติด การไม่ได้กดปุ่มยังกล่าวหากติกานี้ไม่ได้

ลองก่อนเปิดเฉลย

คำปฏิเสธควรเป็น “กดปุ่ม และไฟไม่ติด” หรือ “ถ้าไม่กดปุ่มแล้วไฟไม่ติด”

เฉลย ต้องเป็น “กดปุ่ม และไฟไม่ติด” เพราะนี่คือเหตุผิดสัญญาที่ระบุได้จริง

รูปปฏิเสธของเงื่อนไขคือ **¬(p→q)≡p∧¬q** เราจะยืนยันทั้งด้วยตารางและด้วยการแปลงรูป เพื่อให้ตรวจคำตอบได้สองทาง

เมื่อประโยคเดิมเท็จอยู่เพียงแถว T,F การปฏิเสธประโยคเดิมจึงจริงเฉพาะแถวนั้น รูป p∧¬q ก็เลือกแถวเดียวกันพอดี

① ตาราง: หาผลเดิมแล้วพลิก

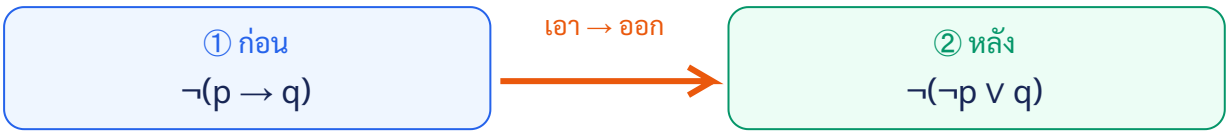
คำนวณ p→q ก่อน จากนั้นจึงทำ ¬(p→q) อย่าปฏิเสธเฉพาะ p

① อ่านค่าตั้งต้น ② ทำคอลัมน์กลาง ③ เทียบผล

p	q	p→q	¬(p→q)	¬q	p∧¬q
T	T	T	F	F	F
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	F	F
F	F	T	F	T	F

② กฎ: เอาลูกศรด้านในออก

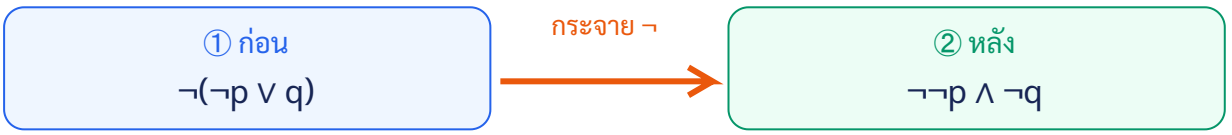
¬(p→q)≡¬(¬p∨q) โดยคง ¬ ตัวนอกไว้ครอบทั้งวงเล็บ



③ ¬ ด้านนอกยังอยู่

③ กฎ: กระจายนิเสธ

¬(¬p∨q)≡¬¬p∧¬q ใช้กฎปฏิเสธหรือเป็นและ



③ พลิกทั้งสองส่วน เปลี่ยน ∨ เป็น ∧

④ กฎ: ลบนิเสธซ้อนและเช็กกลับ

¬¬p∧¬q≡p∧¬q ตรงกับคอลัมน์ขวาที่ได้ F,T,F,F ทุกแถว



③ จริงเฉพาะเมื่อ p=T และ q=F

ลองทำผิดแล้วดูจุดที่พัง

ถ้าปฏิเสธเป็น ¬p→¬q แถว p=T,q=F ให้ F→T=T แต่แถว p=F,q=F ก็ให้ T→T=T เพิ่มขึ้นมา ทั้งที่ ¬(p→q) แถวนั้นเป็น F จึงไม่ใช่นิเสธของเดิม

ลงมือทำตามนี้

1. ครอบวงเล็บให้ ¬ ปฏิเสธลูกศรทั้งอัน
2. ใช้ →≡¬p∨q ด้านใน
3. กระจาย ¬ แล้วตัด ¬¬
4. ตรวจว่าจริงเฉพาะเหตุผิดสัญญา แล้วหยุด

2.15 ประโยคที่รอเติมตัวเลข: ตัวอย่าง 2.1

ข้อความ “จำนวนนี้เป็นเลขคี่” ยังไม่มีตัวเลขให้ตรวจ ถ้าอนุญาตให้เติมได้แค่ 1, 2, 3 เราก็ตรวจแยกได้สามกรณี

ลองก่อนเปิดเฉลย

เติม 2 แล้วข้อความเป็นจริงไหม เติม 3 แล้วผลเหมือนเดิมไหม

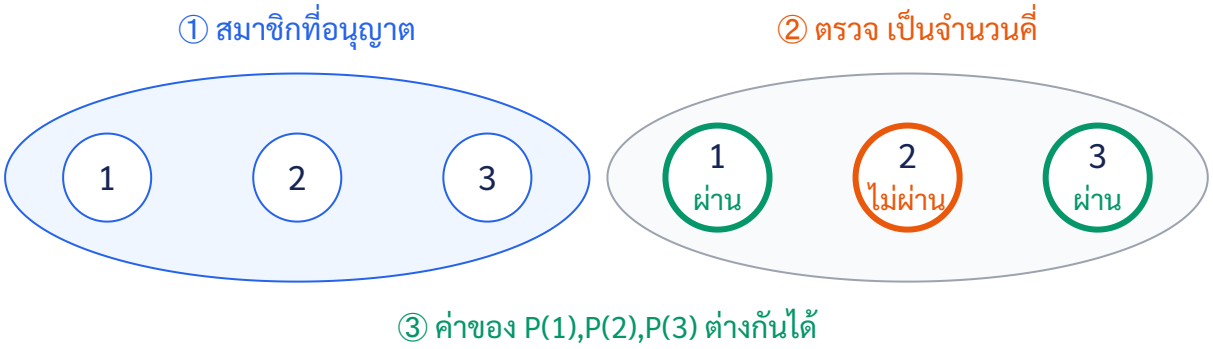
เฉลย เติม 2 ได้ F แต่เติม 3 ได้ T จึงเห็นว่าคำตอบขึ้นกับค่าที่เติม

ฟังก์ชันประพจน์หรือภาคแสดง (propositional function / predicate) P(x) คือข้อความที่เมื่อแทน x ด้วยสมาชิกที่อนุญาตแล้วจะได้ประพจน์ เซตที่อนุญาตเรียกว่า **โดเมนของการกล่าวถึง (domain of discourse)** เขียน D

ต้องกำหนดโดเมนก่อน เพราะการแทนค่าต้องมีความหมายสำหรับสมาชิกทุกตัวของโดเมนนั้น P(n): “n เป็นจำนวนคี่” ใช้กับ D={1,2,3} ได้เพราะตรวจแต่ละค่าจนได้ T หรือ F

① ตั้งรายการที่ต้องตรวจ

D={1,2,3} และ P(n): n เป็นจำนวนคี่ ยังไม่สรุป P(n) รวมเป็น T/F เพราะ n ยังไม่ได้ระบุ



② แทนทีละสมาชิก

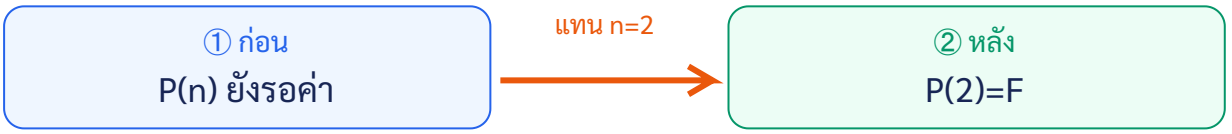
P(1)=T เพราะ 1=2×0+1; P(2)=F เพราะ 2 หารสองลงตัว; P(3)=T เพราะ 3=2×1+1

① อ่านค่าตั้งต้น ② ทำคอลัมน์กลาง ③ เทียบผล

n	การหารด้วย 2	P(n)
1	เศษ 1	T
2	เศษ 0	F
3	เศษ 1	T

③ เช็กกลับนิยาม

ทุกสมาชิกของ D แทนแล้วมีค่าแน่นอนหนึ่งค่า จึง P เป็นฟังก์ชันประพจน์บน D นี้ แม้ผลไม่ได้จริงทุกตัว



③ ได้ประพจน์ที่เท็จ ก็ยังใช้ได้

ลองทำผิดแล้วดูจุดที่พัง

อย่าสรุปว่า P ไม่ใช่ฟังก์ชันประพจน์เพราะ P(2) เท็จ นิยามขอให้ตัดสินได้ ไม่ได้ขอให้จริงหมด

ลงมือทำตามนี้

1. เขียนโดเมนก่อน
2. เขียนสิ่งที่ P(x) อ้าง
3. แทนสมาชิกแต่ละตัวและตรวจว่ามีค่า T/F
4. หยุดเมื่อสมาชิกทุกตัวในโดเมนให้ประพจน์ได้

2.16 คำว่า “ทุกตัว” แพ้เพียงตัวเดียว: ตัวอย่าง 2.2

ถุงแรกมี 1,2,3 ถุงที่สองมี 3,5,7 เราจะพูดว่า “ในถุงมีแต่เลขคี่” ได้กับถุงใด ต้องมองทุกชิ้นหรือมองแค่ชิ้นแรก

ลองก่อนเปิดเฉลย

พบ 1 เป็นเลขคี่แล้วเพียงพอจะบอกว่าถุงแรกมีแต่เลขคี่ไหม

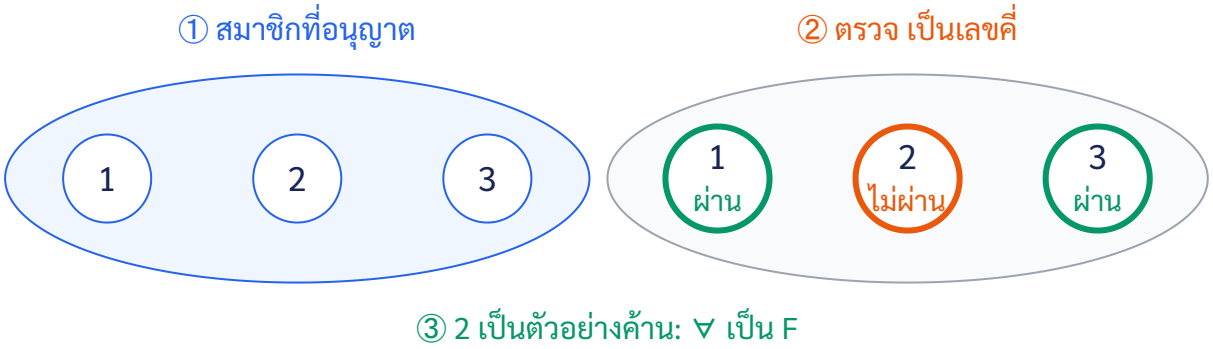
เฉลย ยังไม่พอ เพราะถุงแรกยังมี 2 ที่ไม่ใช่เลขคี่ ส่วนถุงสองต้องตรวจ 3,5,7 ครบจึงรับรองได้

ตัวบ่งปริมาณสากล (universal quantifier) $\forall x \in D\ P(x)$ อ่านว่า ทุก x ใน D ทำให้ P(x) จริง ค่าที่ทำให้ P(x) เท็จเรียกว่า **ตัวอย่างค้าน (counterexample)** และทำให้ประโยค ∀ เท็จทันที

คำว่า “ทุก” เหมือนนำค่าของสมาชิกทั้งหมดมาเชื่อมด้วย ∧ จึงต้องผ่านครบ หากตกหนึ่งตัว ผลรวมแบบและจะตกทันที

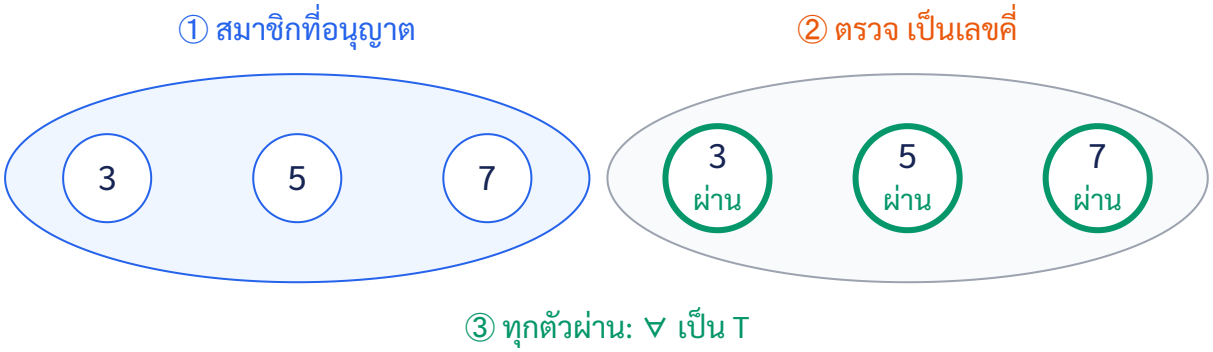
① ตรวจถุงแรก

$D_1=\{1,2,3\}$: $P(1)=T, P(2)=F, P(3)=T$ จึง $\forall x \in D_1\ P(x)=T \wedge F \wedge T=F$



② เปลี่ยนโดเมนแล้วตรวจใหม่

$D_2=\{3,5,7\}$: ทั้งสามตัวเป็นเลขคี่ จึง $T \wedge T \wedge T = T$



③ เช็กกลับหลักฐาน

คำตอบ F ของถุงแรกมีหลักฐานเป็น 2 ซึ่งอยู่ใน D_1 จริง คำตอบ T ของถุงสองมีรายการตรวจครบทั้ง 3,5,7 ไม่มีตัวที่ข้าม



ลองทำผิดแล้วดูจุดที่พัง

ถ้าหยิบ 4 มาค้านถุงสองจะผิด เพราะ 4 ไม่อยู่ใน D_2 ตัวอย่างค้านต้องอยู่ในโดเมนของโจทย์ก่อนจึงมีสิทธิ์ใช้

ลงมือทำตามนี้

1. จดโดเมน
2. ตรวจ P(x) ของสมาชิกที่อยู่ในโดเมนเท่านั้น
3. พบ F หนึ่งตัวหยุดและตอบ F พร้อมชี้ตัวอย่างค้าน
4. ถ้าไม่พบ F ต้องตรวจครบจึงหยุดตอบ T

2.17 “ทุกจำนวนจริง” ต้องมีเหตุผลครอบคลุม: ตัวอย่าง 2.3

ถ้าลองยกกำลังสองของ −2, 0, 3 จะได้ 4,0,9 ซึ่งไม่ติดลบ แต่จำนวนจริงมีไม่สิ้นสุด การลองสามตัวจึงยังไม่ได้ตรวจทุกจำนวน

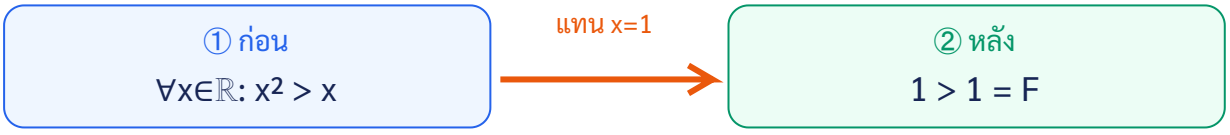
ลองก่อนเปิดเฉลย

ถ้าต้องการล้มข้อความ “ทุก x มี $x^2-1>0$” เราจำเป็นต้องตรวจจำนวนจริงทั้งหมดหรือไม่

เฉลย ไม่ต้อง แค่ x=1 ก็ให้ $1^2-1=0$ ซึ่งไม่มากกว่า 0 และทำให้ข้อความทุกตัวพังได้แล้ว

การรับรองข้อความ ∀ บนโดเมนอนันต์ ต้องให้เหตุผลสำหรับสมาชิกทั่วไป ส่วนการหักล้างยังใช้ตัวอย่างค้านเพียงตัวเดียวได้ ภาพค่าตัวอย่างเป็นตัวช่วยมอง ไม่ใช่ข้อพิสูจน์ครอบคลุมทั้งหมด

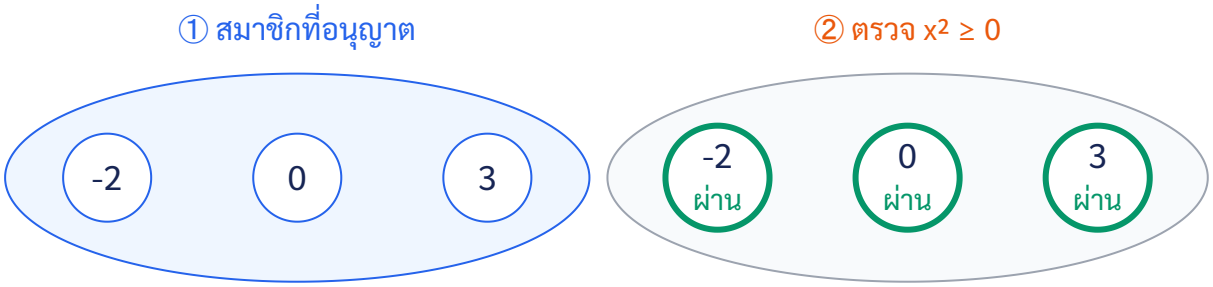
ตัวเลขที่ลองอาจช่วยให้เดาได้ แต่หลักฐานว่า “ทุก” จริงต้องไม่ผูกกับเลขที่เลือกมาไม่กี่ตัว เราจะใช้สมบัติของจำนวนจริงแทนการอ้างว่าลองเยอะพอ



③ 1 อยู่ใน ℝ; กรณีค้านเดียวล้ม ∀

ข้อ 1 · ① ครอบคลุมเครื่องหมายของ x

ถ้า x≥0 ผลคูณ x×x≥0; ถ้า x<0 ผลคูณลบสองตัวเป็นบวก ทั้งสองกรณีรวมจำนวนจริงทั้งหมด จึง ∀x∈ℝ $x^2\geq 0$ เป็น T



③ ตัวอย่างให้ 4,0,9; เหตุผลด้านบนครอบคลุมทุก x

ข้อ 1 · ② เช็กกลับจุดขอบ

ที่ $x=0$ ได้ $x^2=0$ จึงต้องใช้ $\geq$ ไม่ใช่ $>$



③ ข้อความ $x^2>0$ ทุกตัวจะผิด

ข้อ 2 · ① สมมติเฉพาะตอนหน้าเกิด

พิจารณา $x>1$ แล้วบวก 1 ทั้งสองข้าง ได้ $x+1>2$ และ $2>1$ จึง $x+1>1$; ถ้า $x\leq 1$ ต้นลูกศรเท็จ ลูกศรเป็นจริงตามนิยาม จึง $\forall x\in\mathbb{R}\ (x>1\to x+1>1)$ เป็น T



③ เมื่อหน้าไม่เกิด ลูกศรไม่ถูกละเมิด

ข้อ 2 · ② เช็กกลับ

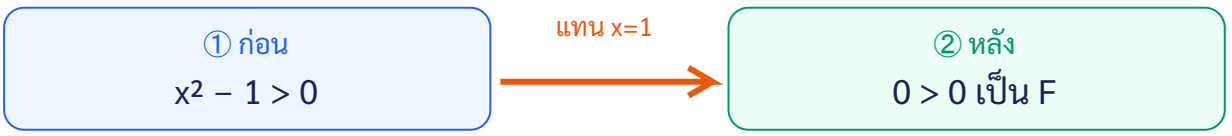
ลอง $x=2$ ให้ $2>1$ และ $3>1$ ทั้งคู่ T; ลอง $x=0$ ให้ $F\to F=T$ ยืนยันว่าต้องเก็บลูกศรไว้ ไม่แทนด้วย $\wedge$

① อ่านค่าตั้งต้น ② ทำคอลัมน์กลาง ③ เทียบผล

x	x>1	x+1>1	ลูกศร
2	T	T	T
0	F	F	T

ข้อ 3 · ① ค้านและเช็กกลับ

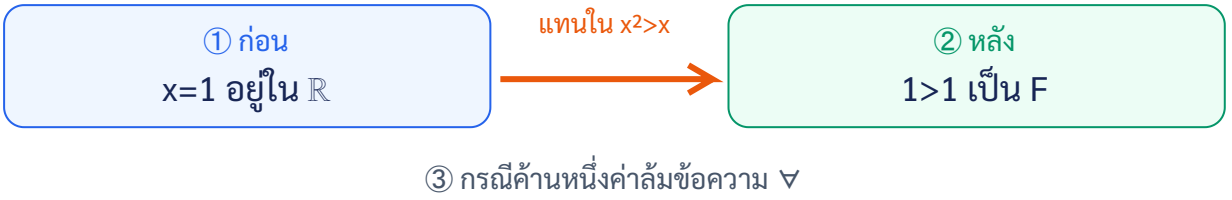
เลือก $x=1\in\mathbb{R}$ ได้ $1^2-1=0$ และ $0>0$ เป็น F จึง $\forall x\in\mathbb{R}\ x^2-1>0$ เป็น F



③ พบตัวอย่างค้านในโดเมน

ลองทำผิดแล้วดูจุดที่พัง

การลอง $x=2$ กับ $x=3$ แล้วเห็น $x^2-1>0$ ทั้งสองครั้งไม่ทำให้ข้อความจริงทุกจำนวน เพราะ $x=1$ ที่ยังไม่ได้ลองทำให้ผิด



③ กรณีค้านหนึ่งค่าล้มข้อความ ∀

ลงมือทำตามนี้

1. ถ้าอยากตอบ F ให้มองหาตัวอย่างค้านในโดเมน
2. ถ้าอยากตอบ T ให้ใช้สมาชิกทั่วไปหรือแตกกรณีที่ครอบคลุมทั้งหมด
3. แยกหลักฐานทั่วไปออกจากตัวอย่างทดลอง
4. แทนค่าขอบเพื่อตรวจเครื่องหมายก่อนหยุด

2.18 คำว่า “มีอย่างน้อยหนึ่ง” ชนะได้ตัวเดียว: ตัวอย่าง 2.4

ถ้าอยากรู้ว่าถุง 1,2,3 มีเลขคี่อยู่หรือไม่ เราพบ 1 ก็พอแล้ว การมี 2 ปนอยู่ไม่ได้ลบการมีอยู่ของ 1

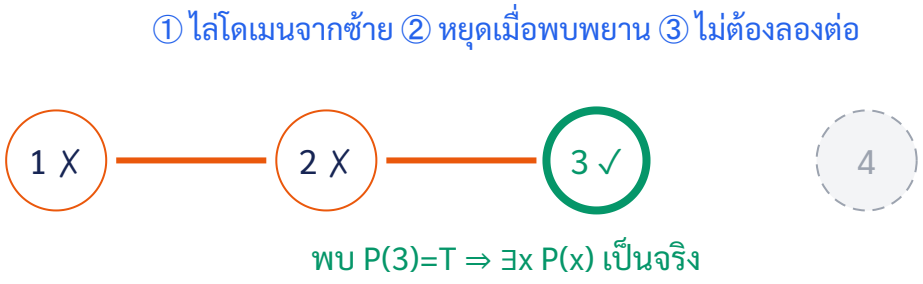
ลองก่อนเปิดเฉลย

ถ้าถุงมี 2,4,6 แล้วเจอ 2 ไม่ใช่เลขคี่ เราหยุดบอกว่าไม่มีเลขคี่ได้เลยไหม

เฉลย ยังไม่ได้ ต้องตรวจ 4 กับ 6 ให้ครบด้วย แต่เมื่อครบแล้วทั้งสามไม่ใช่เลขคี่ จึงบอกว่าไม่มีได้

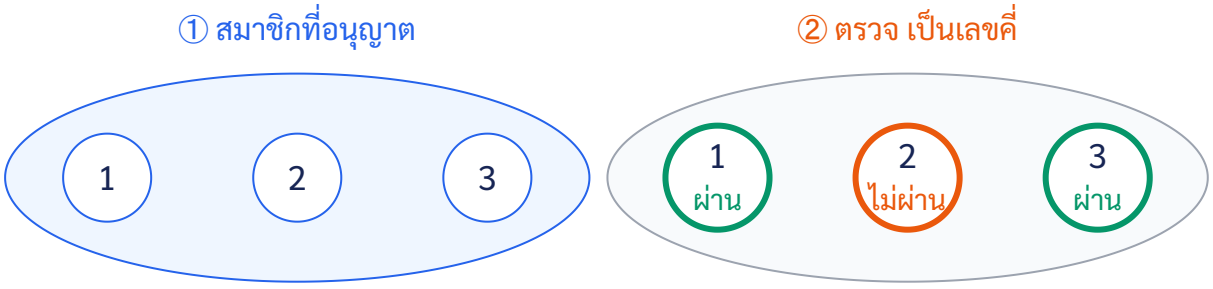
ตัวบ่งปริมาณมีอยู่ (existential quantifier) $\exists x \in D\ P(x)$ อ่านว่า มี x อย่างน้อยหนึ่งตัวใน D ที่ทำให้ P(x) จริง ตัวที่เลือกมาแสดงว่าจริงเรียกว่า **พยาน (witness)**

คำว่า “มีอย่างน้อยหนึ่ง” เหมือนนำค่าทั้งโดเมนมาเชื่อมด้วย ∨ จึงผ่านเมื่อมีจริงหนึ่งตัว แต่ถ้าจะบอกว่าไม่มีเลยต้องปิดทุกทางเลือก



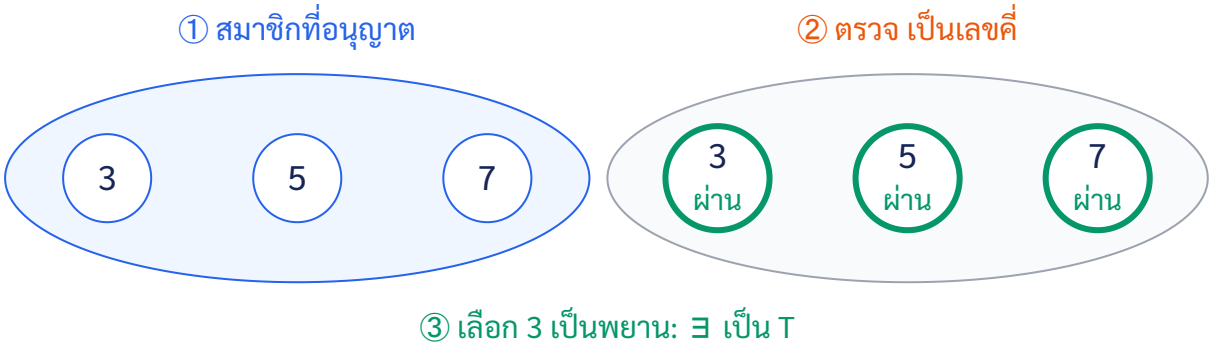
① ตรวจ D_1

$D_1=\{1,2,3\}$: P(1)=T เป็นพยานแล้ว จึง $\exists x \in D_1\ P(x)=T$



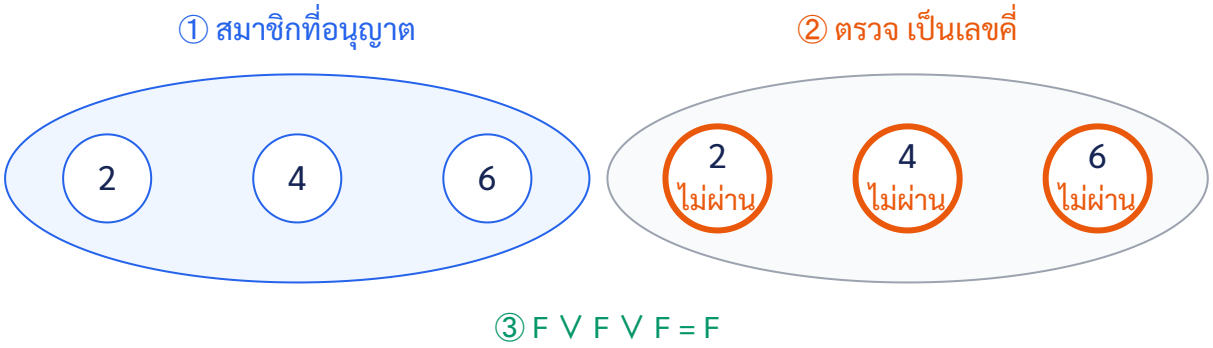
② ตรวจ D_2

$D_2=\{3,5,7\}$: เลือก 3 เป็นพยานได้ จึง $\exists x\in D_2\ P(x)=T$



③ ตรวจ D_3

$D_3=\{2,4,6\}$: ทั้งสามหารสองลงตัว จึง P เป็น F ครบโดเมน และ $\exists x\in D_3\ P(x)=F$



④ เช็กกลับความหมาย

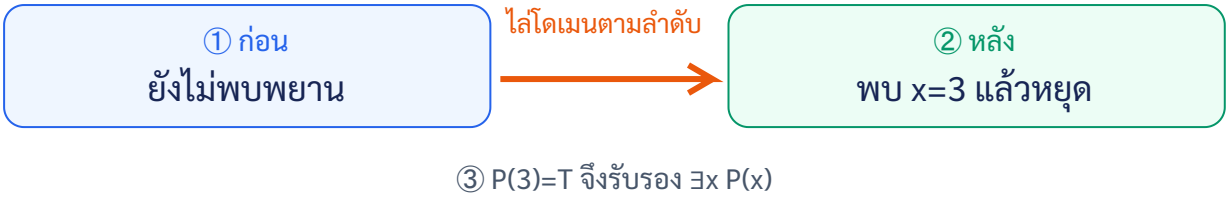
∃ ใน D_1 เป็น T ทั้งที่ ∀ ใน D_1 เป็น F เพราะคำถามหนึ่งขอแค่หนึ่งตัว อีกคำถามขอครบทุกตัว



③ โดเมนเดิม คำสรุปต่างเพราะตัวบ่งปริมาณ

ลองทำผิดแล้วดูจุดที่พัง

∃ ไม่ได้หมายความว่ามีเพียงตัวเดียว D_2 มีเลขคี่หลายตัวก็ยังทำให้ ∃ จริง และการพบตัวที่ไม่ผ่านหนึ่งตัวไม่ได้หักล้าง ∃



ลงมือทำตามนี้

1. จดโดเมน
2. ค้นหาสมาชิกที่ทำให้ข้อความจริง
3. พบหนึ่งตัวหยุดตอบ T พร้อมพยาน
4. ถ้าจะตอบ F ต้องตรวจครบหรือให้เหตุผลครอบคลุมว่าไม่มีตัวผ่าน

2.19 สร้างพยานแล้วแทนกลับ: ตัวอย่าง 2.5

ถ้าต้องการแสดงว่ามีเลขที่ทำให้ $5x+20=0$ เราไม่จำเป็นต้องบอกค่าของทุกจำนวนจริง ขอเพียงหาเลขหนึ่งตัวแล้วแทนกลับให้สมการเป็นจริง

ลองก่อนเปิดเฉลย

ลอง $x=-4$ จะได้ $5x+20$ เท่าไร และพอเป็นหลักฐานว่ามีคำตอบไหม

เฉลย ได้ $5(-4)+20=-20+20=0$ จึงพอ และ -4 อยู่ในจำนวนจริงตามที่โจทย์อนุญาต

การพิสูจน์ข้อความ ∃ ด้วยพยาน มีสองงาน: เลือกค่าที่อยู่ในโดเมน แล้วตรวจว่าค่านั้นทำให้ข้อความหลัง ∃ จริง การแก้สมการช่วยหา แต่การแทนกลับช่วยยืนยัน

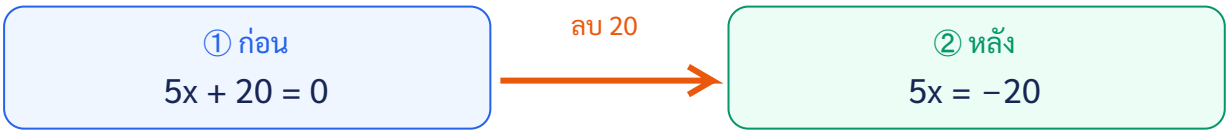
ข้ออ้างว่า “มี” เป็นจริงทันทีที่ชี้ตัวอย่างที่ตรงเงื่อนไขได้ จึงไม่ต้องหาคำตอบครบทุกตัวถ้าโจทย์ถามแค่มีหรือไม่มี



③ -4 หลุดจากโดเมนจำนวนเต็มบวก

ข้อ 1 · ① หาค่าที่จะลอง

$5x+20=0$ ลบ 20 ทั้งสองข้างได้ $5x=-20$ แล้วหารด้วย 5 ได้ $x=-4$



③ หารทั้งสองข้างด้วย 5 ได้ $x=-4$

ข้อ 1 · ② เช็กกลับ

$-4 \in \mathbb{R}$ และ $5(-4)+20=0$ จึง $\exists x \in \mathbb{R}\ (5x+20=0)$ เป็น T



③ พยานผ่านทั้งโดเมนและเงื่อนไข

ข้อ 2 · ① หาพยาน

$x^2+2x-8=(x+4)(x-2)$ เลือก $x=2$ ทำให้ตัวประกอบขวาเป็น 0



③ เลือก $x=2$

ข้อ 2 · ② เช็กกลับ

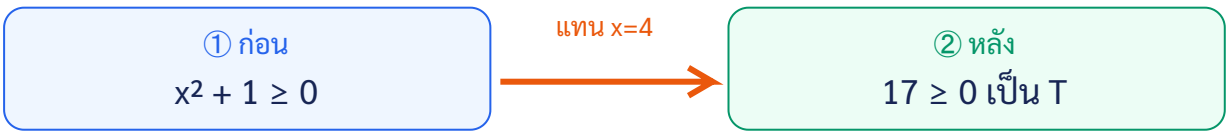
$2 \in \mathbb{R}$ และ $2^2+2(2)-8=4+4-8=0$ จึงข้อความ ∃ เป็น T; $x=-4$ ก็ผ่าน แต่ไม่จำเป็นต้องมีพยานสองตัว



③ มีหนึ่งตัวก็รับรอง ∃ ได้

ข้อ 3 · ① เลือกและเช็กกลับ

เลือก $x=4 \in \mathbb{R}$ ได้ $x^2+1=16+1=17 \geq 0$ จึง $\exists x \in \mathbb{R}\ (x^2+1 \geq 0)$ เป็น T



③ หนึ่งพยานเพียงพอ

ข้อ 3 · ② แยกสิ่งที่มากกว่าจำเป็น

ในข้อนี้จริง ๆ ทุก x ใช้ได้ เพราะ $x^2 \geq 0$ แล้ว $x^2+1 \geq 1 > 0$ แต่ข้อสอบถาม ∃ จึงใช้พยานเดียวจบได้



③ เหตุผลทั่วไปสอดคล้องกับพยาน 4

ลองทำผิดแล้วดูจุดที่พัง

ถ้าโจทย์เปลี่ยนโดเมนเป็นจำนวนเต็มบวก พยาน -4 ใช้ไม่ได้ แม้แทนสมการแล้วได้ 0 ต้องตรวจสิทธิ์ของพยานก่อนทุกครั้ง

ลงมือทำตามนี้

1. อ่านโดเมน
2. หาค่าหนึ่งที่น่าจะผ่าน
3. ตรวจว่าค่าอยู่ในโดเมน
4. แทนกลับในข้อความเดิม ถ้าจริงให้หยุดตอบ T

2.20 เลือกหลักฐานให้ตรงกับคำว่า “ทุก” หรือ “มี”

การตรวจสินค้าทั้งกล่องว่า “ทุกชิ้นดี” กับ “มีชิ้นดีอย่างน้อยหนึ่ง” ใช้วิธีหยุดตรวจไม่เหมือนกัน แม้กล่องเดียวกันจะมีผลรายชิ้นเหมือนเดิม

ลองก่อนเปิดเฉลย

ถ้ารายชิ้นเป็น T,F,T เราจะตอบคำว่า “ทุก” กับ “มี” อย่างไร พร้อมชี้หลักฐาน

เฉลย ทุกเป็น F เพราะชิ้นที่สองเป็น F; มีเป็น T เพราะชิ้นแรกเป็น T สองคำถามใช้หลักฐานคนละชิ้น

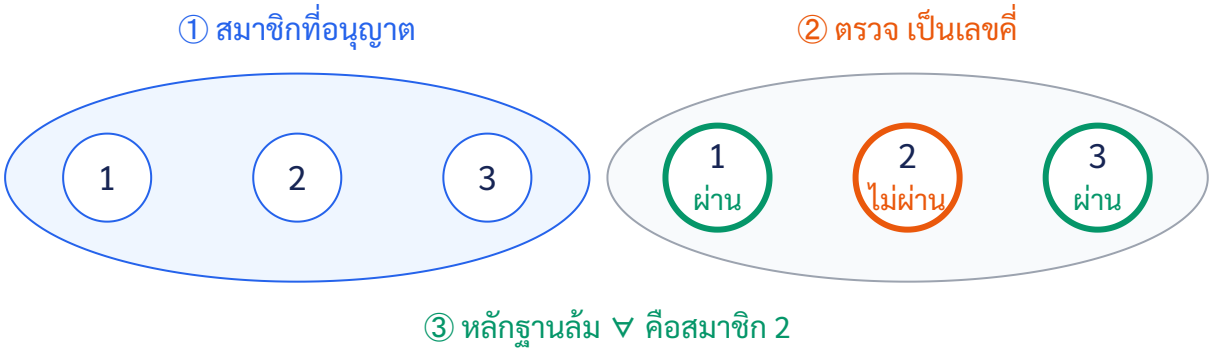
ตารางต่อไปเป็น **ภาระหลักฐานของตัวบ่งปริมาณ** แยกทั้งสิ่งที่ต้องพิสูจน์ว่าจริงและสิ่งที่ต้องแสดงว่าเท็จ

เวลาหลงว่าจะลองอีกกี่ค่า ให้ถามว่าคำตอบที่ต้องการเป็นชนิดไหน การตอบ ∀ ว่าจริงกับ ∃ ว่าเท็จต้องครอบคลุมทั้งโดเมน อีกสองชนิดใช้พยานหรือตัวอย่างค้านเพียงตัวเดียว

ข้อความ	จะตอบจริง	จะตอบเท็จ
∀x P(x)	ทุก x ผ่าน	ชี้ x หนึ่งตัวที่ไม่ผ่าน
∃x P(x)	ชี้ x หนึ่งตัวที่ผ่าน	ทุก x ไม่ผ่าน

① ตอบทุก

บน D={1,2,3}, P(x): x เป็นเลขคี่ พบ 2∈D แล้ว P(2)=F จึงตอบ ∀ เป็น F ได้ทันที



② ตอบมี

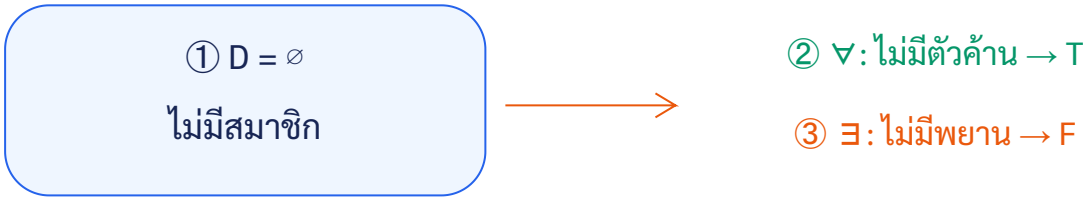
บนโดเมนเดิม P(1)=T จึงตอบ ∃ เป็น T ได้ ไม่ต้องลบสมาชิกที่ไม่ผ่านออก



③ เลข 2 ที่ไม่ผ่านไม่ทำลายการมีเลข 1

③ เช็กกลับกรณีว่าง

ถ้า D=∅ จะไม่มีตัวอย่างค้าน ∀ จึงเป็น T และไม่มีพยานของ ∃ จึงเป็น F ตามนิยาม เป็นกรณีขอบช่วยจำว่าทุกกับมีไม่เหมือนกัน



ลองทำผิดแล้วดูจุดที่พัง

ถ้าลองแล้วพบว่าบางตัวไม่ผ่าน จึงหยุดตอบ ∃ เป็น F จะพลาดพยานที่ยังไม่ได้ลอง ให้เทียบช่อง “จะตอบเท็จ” ก่อนหยุดเสมอ

ลงมือทำตามนี้

1. ระบุว่าเป็น ∀ หรือ ∃
2. ระบุว่าจะรับรองจริงหรือหักล้าง
3. เลือกชนิดหลักฐานจากตาราง
4. โดเมนจำกัดให้ตรวจครบเมื่อจำเป็น; โดเมนอนันต์ใช้เหตุผลทั่วไป แล้วหยุดเมื่อภาระครบ

2.21 ปฏิเสธ “ทุก” เป็น “มีตัวที่ไม่”: ตัวอย่างหน้า 11

คำว่า “ไม่ใช่ทุกชิ้นที่ดี” ไม่ได้บอกว่าทุกชิ้นเสีย มันบอกเพียงว่ามีชิ้นเสียอย่างน้อยหนึ่ง ส่วน “ไม่มีชิ้นดีเลย” จึงค่อยหมายถึงเสียทุกชิ้น

ลองก่อนเปิดเฉลย

ถุงที่ผลเป็น T,F,T ทำให้ “ไม่ใช่ทุกตัวผ่าน” จริงไหม และทำให้ “ทุกตัวไม่ผ่าน” จริงไหม

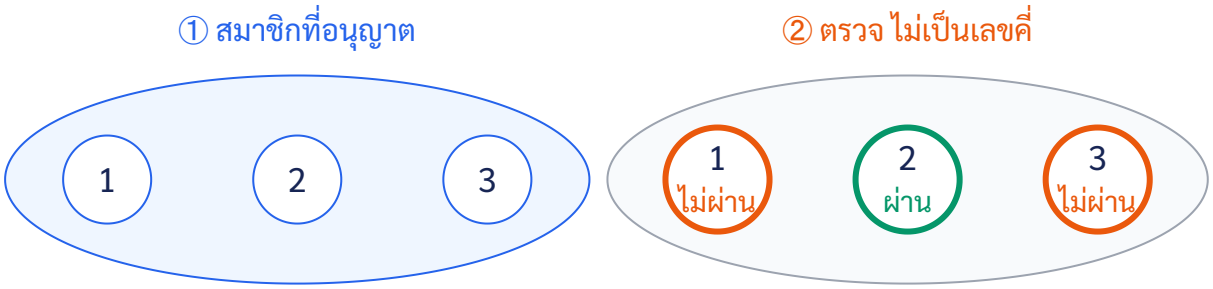
เฉลย ข้อแรก T ข้อหลัง F จึงห้ามปฏิเสธโดยเก็บคำว่าทุกไว้เหมือนเดิม

กฎนิเสธตัวบ่งปริมาณ คือ $\neg(\forall x\, P(x)) \equiv \exists x\, \neg P(x)$ และ $\neg(\exists x\, P(x)) \equiv \forall x\, \neg P(x)$ ต้องสลับ $\forall \leftrightarrow \exists$ พร้อมปฏิเสธข้อความด้านใน โดยคงโดเมนเดิม

ในโดเมนจำกัด $\forall$ ทำหน้าที่เหมือน $\wedge$ หลายตัว ส่วน $\exists$ เหมือน $\vee$ หลายตัว การปฏิเสธจึงเปลี่ยนทั้งตัวบ่งปริมาณและค่าภายในตามกฎปฏิเสธกลุ่ม

① เห็นการเปลี่ยนจากโดเมน

P เป็น T,F,T ทำให้ $\neg\forall P = T$ ส่วน $\neg P$ เป็น F,T,F จึง $\exists\neg P = T$ เหมือนกัน



③ 2 เป็นพยานของ $\exists x\, \neg P(x)$

② ปฏิเสธประโยคกำลังสอง

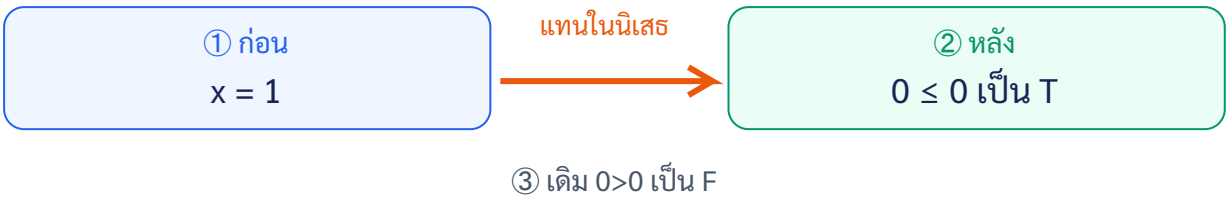
$\neg[\forall x \in \mathbb{R}\ (x^2 - 1 > 0)] \equiv \exists x \in \mathbb{R}\ \neg(x^2 - 1 > 0) \equiv \exists x \in \mathbb{R}\ (x^2 - 1 \le 0)$



③ $>$ ต้องพลิกเป็น $\le$ เพื่อรวมกรณีเท่ากับ

③ เช็กกลับประโยคกำลังสอง

เลือก $x=1$ ได้ $0\le 0$ เป็น T จึงประโยคปฏิเสธจริง สอดคล้องกับประโยคเดิมที่เท็จ



③ เดิม $0>0$ เป็น F

④ ปฏิเสธสมการเชิงเส้น

$\neg[\exists x\in\mathbb{R}\ (5x+20=0)] \equiv \forall x\in\mathbb{R}\ (5x+20\neq 0)$



③ คงโดเมน $\mathbb{R}$ เปลี่ยน $\exists$ และ $=$

⑤ เช็กกลับสมการเชิงเส้น

ที่ $x=-4$ ได้ $5(-4)+20=0$ ทำให้ข้อความ $\neq 0$ เท็จ ประโยค $\forall$ ที่เป็นนิเสธจึง F ตรงข้ามกับ $\exists$ เดิมที่ T



③ ประโยคเดิมจริง นิเสธจึงเท็จ

ลองทำผิดแล้วดูจุดที่พัง

ปฏิเสธ $x>0$ เป็น $x<0$ จะตกหล่น $x=0$ ต้องใช้ $x\le 0$; เช่นเดียวกัน $\ge$ พลิกเป็น $<$ และ $=$ พลิกเป็น $\neq$

ลงมือทำตามนี้

1. ครอบประโยคเต็มก่อนใส่ ¬
2. สลับตัวบ่งปริมาณทีละตัว
3. ปฏิเสธเครื่องหมายเปรียบเทียบให้ครอบกรณีเท่ากันถูกฝั่ง
4. คงโดเมนและเช็กค่าขอบก่อนหยุด

2.22 จะบอกว่าไม่มีเลย ต้องปิดทุกทาง: ตัวอย่าง 2.6

เศษส่วนที่มีตัวบนเป็น 1 และตัวล่างไม่น้อยกว่า 1 ไม่อาจมากกว่า 1 ได้ ลองนึกถึงการแบ่งเค้กหนึ่งก้อนเป็นหนึ่งส่วนหรือหลายส่วน แต่ไม่ได้สร้างก้อนเพิ่ม

ลองก่อนเปิดเฉลย

ถ้าตัวล่าง x^2+1 เป็นอย่างน้อย 1 ค่า $1/(x^2+1)$ จะเกิน 1 ได้หรือไม่

เฉลย ไม่ได้ เพราะตัวล่างเป็นบวกและไม่น้อยกว่า 1 ค่าส่วนกลับจึงไม่เกิน 1

โจทย์ถามว่าข้อความ $\exists x \in \mathbb{R}\ [1/(x^2+1)>1]$ เป็นเท็จหรือไม่ เราใช้ **การพิสูจน์นิเสธ**: แสดงว่า $\forall x \in \mathbb{R}\ [1/(x^2+1) \le 1]$ เป็นจริง

การลอง $x=0$ แล้วได้ค่า 1 บอกได้เพียงว่าค่านี้ไม่ผ่าน ยังต้องอธิบายสำหรับ x ทั่วไป เหตุผลด้านล่างไม่มีการจำกัดว่าต้องเลือกเลขใด

① เริ่มจากจำนวนจริงทั่วไป

ให้ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว $x^2 \ge 0$ เพราะกำลังสองไม่ติดลบ



③ ไม่เลือกค่าพิเศษแทนทั้งหมด

② เพิ่มตัวล่างให้ครบ

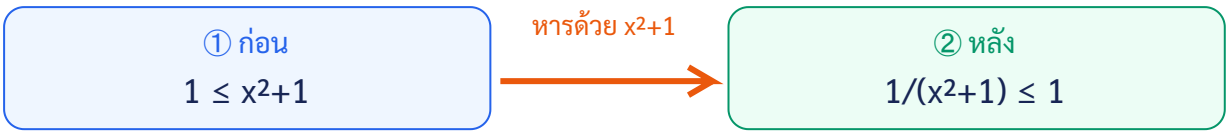
บวก 1 ทั้งสองข้าง ได้ $x^2+1 \ge 1$ ดังนั้น $x^2+1>0$ ด้วย



③ ยืนยันตัวหารไม่เป็นศูนย์

③ หารด้วยจำนวนบวก

จาก $1 \le x^2+1$ หารทั้งสองข้างด้วย x^2+1 ซึ่งเป็นบวก ได้ $1/(x^2+1) \le 1$



③ ไม่พลิกเครื่องหมายเพราะตัวหารเป็นบวก

④ สรุปและเช็กกลับ

ทุก x ให้ค่าไม่เกิน 1 จึงไม่มี x ที่ให้ค่ามากกว่า 1 ข้อความ ∃ เดิมเป็น F ลอง $x=0$ ได้ 1; $x=1$ และ $x=-1$ ได้ 1/2 ซึ่งสอดคล้องกับขอบเขตที่พิสูจน์

① อ่านค่าตั้งต้น ② ทำคอลัมน์กลาง ③ เทียบผล

x	x^2+1	$1/(x^2+1)$	>1 ?
0	1	1	F
1	2	1/2	F
-1	2	1/2	F

ลองทำผิดแล้วดูจุดที่พัง

อย่าเปลี่ยนจาก $x^2+1 \ge 1$ เป็น $1/(x^2+1) \ge 1$ โดยคงทิศเดิม การกลับเศษส่วนจำนวนบวกทำให้ลำดับกลับกัน ใช้วิธีหารทั้งสองข้างตามขั้น ③ จะเห็นเหตุผลชัด

ลงมือทำตามนี้

1. เปลี่ยนเป้าหมายไม่มี x เป็นทุก x ไม่ผ่าน
2. ใช้ x ทั่วไป
3. ตรวจเครื่องหมายและศูนย์ของตัวหารก่อนหาร
4. สรุปถึง ∃ เดิมแล้วเช็กค่าขอบก่อนหยุด

2.23 เมื่อข้อความมีสองช่องว่าง

คราวนี้ข้อความคือ “ตัวเลขตัวแรกเท่ากับตัวเลขตัวที่สอง” ถ้าแต่ละช่องเลือกได้จาก 1,2,3 เราต้องเห็นคู่ทั้งหมด ไม่ใช่ดูตัวเลขช่องเดียว

ลองก่อนเปิดเฉลย

ถ้าเลือกช่องแรกเป็น 2 เราต้องเลือกช่องที่สองเป็นอะไรจึงให้ข้อความจริง

เฉลย เลือก 2 เช่นกันได้คู่ (2,2) ที่ผ่าน แต่คู่ (2,1) กับ (2,3) ไม่ผ่าน

ตัวบ่งปริมาณซ้อน (nested quantifiers) ใช้หลายตัวบ่งปริมาณผูกตัวแปรหลายตัว ข้อความ P(x,y) จะเป็นจริงหรือเท็จหลังเลือกทั้ง x และ y แล้ว ตารางใช้แถวแทน x และคอลัมน์แทน y

วิธีประเมินคือเลือกตามตัวบ่งปริมาณด้านนอกก่อน แล้วตรวจงานด้านในสำหรับค่านั้น ตารางทำให้เห็นว่างานด้านในกำลังขอทั้งแถวหรือเพียงช่องหนึ่งของแถว

① สร้างค่ารายคู่

ให้ D={1,2,3}, P(x,y): x=y ตารางมีทุกคู่ใน D×D

① เลือกแถว x ② เลือกคอลัมน์ y ③ อ่าน P(x,y)

x \ y	1	2	3
1	T	F	F
2	F	T	F
3	F	F	T

② ขอให้ทุกคู่ผ่าน

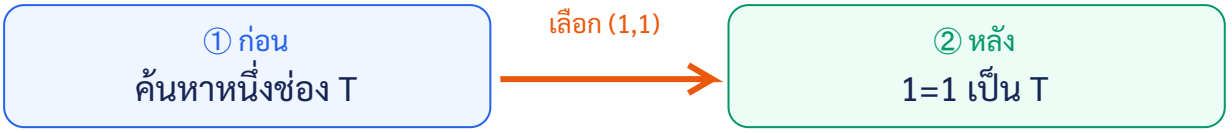
∀x∀y P(x,y) เป็น F เพราะคู่ (1,2) ให้ 1=2 เป็น F ต้องการทั้งตาราง T แต่มีช่องที่ไม่ผ่าน



③ ตัวอย่างค้านหนึ่งคู่พอ

③ ขอให้มีคู่หนึ่งผ่าน

∃x∃y P(x,y) เป็น T เพราะคู่ (1,1) ผ่าน จะเลือกคู่ (2,2) ก็ได้



③ พยานเป็นคู่ ไม่ใช่เลขตัวเดียว

④ เช็กกลับขอบเขต

คู่ (1,2) และ (1,1) ใช้ตัวเลขใน D ทั้งสองตำแหน่ง จึงเป็นหลักฐานที่ถูกสิทธิ์ทั้งคู่



③ แต่ค่าความจริงของสองคู่นี้ต่างกัน

ลองทำผิดแล้วดูจุดที่พัง

ถ้าเลือก x แล้วรีบตัดสิน P(x,y) โดยยังไม่เลือก y จะเหลือช่องว่างที่อาจเปลี่ยนผลได้ ต้องอ่านทุกตัวบ่งปริมาณก่อนสรุป

ลงมือทำตามนี้

1. ระบุโดเมนของแต่ละตัวแปร
2. ตั้งแถวและคอลัมน์
3. เลือกค่าตามตัวบ่งปริมาณด้านนอก
4. ตรวจด้านในให้ครบตามทุก/มี แล้วจึงสรุปด้านนอก

2.24 อ่านสี่รูปด้วยตารางเดียว: ตัวอย่างคนในห้อง

ห้องตัวอย่างมีสมาชิก ก, ข, ค ข้อความ P(x,y) บอกว่า x ชอบ y ตารางด้านล่างให้ ก ชอบ ก และ ข; ข ชอบ ข; ค ชอบ ค ข้อมูลสมมตินี้ใช้ตรวจความหมายของประโยคให้เห็นชัด

ลองก่อนเปิดเฉลย

ทุกคนมีใครสักคนที่ชอบไหม และมีคนหนึ่งที่ชอบทุกคนไหม

เฉลย ทุกคนมีอย่างน้อยหนึ่งคนที่ชอบ แต่ไม่มีใครชอบครบทั้งสามคน จึงต้องแยกสองคำถามนี้

สี่รูปที่ต้องอ่านคือ **∀x∀y** ทุก x ชอบทุก y; **∃x∀y** มี x คนหนึ่งชอบทุก y; **∀x∃y** ทุก x มี y ที่ตนชอบ; **∃x∃y** มีคู่ x,y ที่ชอบกันตามทิศ x ไป y

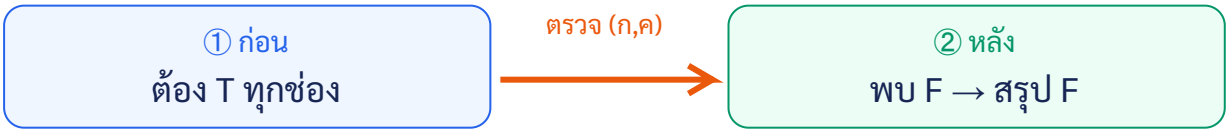
คำว่า ∃ ที่อยู่ข้างใน ∀ ยอมให้เลือก y ใหม่เมื่อ x เปลี่ยน ส่วน ∃x ที่อยู่ข้างนอกต้องเลือก x คนเดียวให้ผ่านงานทั้งหมดด้านใน ข้อความเชิงสัญลักษณ์นี้รวม x=y ด้วย ถ้าจะยกเว้นตนเองต้องเขียน x≠y เพิ่มให้ชัด

① อ่านค่าตั้งต้น ② ทำคอลัมน์กลาง ③ เทียบผล

x \ y	ก	ข	ค
ก	T	T	F
ข	F	T	F
ค	F	F	T

① ∀x∀y: ขอทุกช่อง

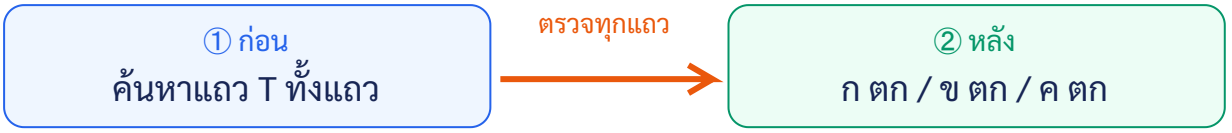
แถว ก คอลัมน์ ค เป็น F จึงรูปนี้ F ตัวอย่างค้านคือ (ก,ค)



③ คู่เดียวที่ตกก็ล้มข้อความทุกคู่

② ∃x∀y: ขอแถวที่ T ทั้งแถว

ก ตกที่ ค; ข ตกที่ ก; ค ตกที่ ก ทุกแถวมีช่องตก จึงไม่มีแถวที่ผ่านทั้งหมด และรูปนี้ F



③ ∃x∀y เป็น F

③ ∀x∃y: ขอ T ในแต่ละแถว

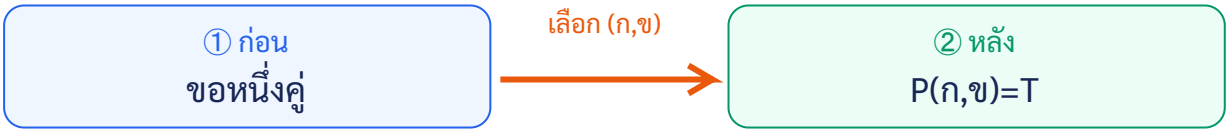
เลือกพยาน ก→ก, ข→ข, ค→ค ได้ ทุกแถวมีอย่างน้อยหนึ่ง T จึงรูปนี้ T



③ y เปลี่ยนได้ตาม x

④ ∃x∃y: ขอหนึ่งช่องแล้วเช็กกลับ

เลือก (ก,ข) ได้ T ซึ่งตรงกับข้อมูลตั้งต้น จึงรูปนี้ T ไม่ต้องให้ ก ชอบทุกคน



③ สี่ผลเรียง F,F,T,T

ลองทำผิดแล้วดูจุดที่พัง

คำว่า “ทุกคนชอบใครบางคน” ไม่ได้บอกว่าเป็นคนเดียวกันทั้งหมด และคำว่า “ทุกคนชอบทุกคน” ในสูตรที่ไม่มี x≠y ยังรวมการชอบตนเองด้วย

ลงมือทำตามนี้

1. อ่านตัวนอกว่าขอทุกแถวหรือขอแถวหนึ่ง
2. อ่านตัวในว่าขอครบแถวหรือหนึ่งช่อง
3. ชี้พยานหรือตัวอย่างค้านในตาราง
4. ตรวจว่าไม่แอบตัดกรณี x=y แล้วหยุด

2.25 รหัสของแต่ละบัญชี กับรหัสเดียวของทุกบัญชี

ระบบตัวอย่างมีบัญชี ก และ ข รหัส A เปิดได้เฉพาะบัญชี ก รหัส B เปิดได้เฉพาะบัญชี ข ทั้งสองบัญชีเข้าได้ แต่ไม่มีรหัสเดียวที่เปิดทั้งสองบัญชี

ลองก่อนเปิดเฉลย

จากการที่ทุกบัญชีมีรหัสของตัวเอง เราสรุปว่ามีรหัสกลางที่ใช้ได้กับทุกบัญชีหรือไม่

เฉลย สรุปไม่ได้ ในข้อมูลนี้แต่ละบัญชีใช้คนละรหัส และแต่ละรหัสเปิดได้ไม่ครบทุกบัญชี

ให้ A(u,p) หมายถึงบัญชี u เข้าได้ด้วยรหัส p รูป **∀u∃p A(u,p)** ยอมให้รหัสขึ้นกับบัญชี แต่รูป **∃p∀u A(u,p)** ขอรหัสเดียวที่ทำงานกับทุกบัญชี ลำดับตัวบ่งปริมาณต่างชนิดจึงสำคัญ

การเลือกทีหลังสามารถอาศัยค่าที่เลือกก่อนแล้วได้ แต่การเลือกรหัสก่อนเห็นบัญชีต้องเตรียมรหัสเดียวให้ผ่านทุกกรณี ภาพนี้เป็นเพียงเรื่องขอบเขตของคำกล่าว การมีรหัสแยกบัญชีเพียงอย่างเดียวยังไม่ได้รับรองความปลอดภัยทั้งระบบ

① อ่านค่าตั้งต้น ② ทำคอลัมน์กลาง ③ เทียบผล

บัญชี \ รหัส	A	B
ก	T	F
ข	F	T

① เลือกบัญชีก่อนรหัส

บัญชี ก เลือก A ได้ T; บัญชี ข เลือก B ได้ T จึงทุกบัญชีมีรหัสที่ใช้ได้ และ ∀u∃p เป็น T



② เลือกรหัสก่อนทุกบัญชี

ลอง A: บัญชี ข เข้าไม่ได้; ลอง B: บัญชี ก เข้าไม่ได้ จึงไม่มีคอลัมน์ที่ T ทั้งคอลัมน์ และ ∃p∀u เป็น F

① อ่านค่าตั้งต้น ② ทำคอลัมน์กลาง ③ เทียบผล

รหัสที่ล็อกไว้	บัญชี ก	บัญชี ข	ใช้ได้ทุกบัญชี?
A	T	F	F
B	F	T	F

③ เช็กกลับข้อสรุป

ตารางเดียวกันให้ ∀u∃p=T แต่ ∃p∀u=F จึงเป็นตัวอย่างค้านที่พิสูจน์ว่าสองรูปไม่สมมูลกัน



③ ค่าต่างกันบนระบบเดียวกัน

ลองทำผิดแล้วดูจุดที่พัง

ถ้าอ่านสูตรจากขวาไปซ้ายแล้วเลือก A ให้ ก และเลือก B ให้ ข ในโจทย์ ∃p∀u จะละเมิดข้อกำหนดที่ให้ตรึง p เพียงค่าเดียวก่อนตรวจ u ทั้งหมด

ลงมือทำตามนี้

1. เขียนโดเมนบัญชีและโดเมนรหัสแยกกัน
2. เลือกตามตัวนอกก่อน
3. ตัวที่เลือกก่อนต้องคงเดิมตลอดงานด้านใน
4. ชี้แถวหรือคอลัมน์ที่พิสูจน์คำตอบ แล้วหยุด

2.26 แปลคำว่า “จำนวนบวกสองจำนวนใด ๆ”

เลือกจำนวนจริงบวกสองตัว เช่น 1 กับ 2 แล้วบวกกันได้ 3 ซึ่งยังเป็นบวก ถ้าอยากกล่าวให้ครบทุกคู่ เราต้องระบุว่ากำลังตรวจสองตัว ไม่ใช่เลือกไว้ตัวเดียว

ลองก่อนเปิดเฉลย

ถ้า x ไม่ใช่จำนวนบวก ข้อความ “เมื่อทั้ง x และ y บวก ผลบวกจะบวก” ถูกละเมิดทันทีหรือไม่

เฉลย ไม่ถูกละเมิด เพราะข้อความนี้กำหนดผลเฉพาะเมื่อทั้งสองตัวเป็นบวก

ประโยค “ผลบวกของจำนวนจริงบวกสองจำนวนใด ๆ เป็นบวก” เขียนได้เป็น $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ [((x>0) \wedge (y>0)) \rightarrow (x+y>0)]$ หรือกำหนดโดเมนเป็นจำนวนจริงบวกตั้งแต่ต้นแล้วเขียน $\forall x \forall y\ (x+y>0)$

รูปแรกใช้ลูกศรเพื่อจำกัดเงื่อนไขในโดเมนใหญ่ ส่วนรูปหลังจำกัดที่โดเมนแล้ว จึงไม่ต้องเขียนเงื่อนไขบวกซ้ำ สองวิธีต้องสอดคล้องกันทั้งโดเมนและข้อความ

① เก็บเงื่อนไขทั้งสอง

เมื่อ $x>0$ และ $y>0$ ให้บวก y ทั้งสองข้างของ $x>0$ ได้ $x+y>y$



③ ยังใช้เงื่อนไข $y>0$ ในขั้นถัดไป

② ต่ออสมการ

เพราะ $y>0$ จึง $x+y>y>0$ ทำให้ผลสรุปเป็นจริงสำหรับทุกคู่ที่ผ่านเงื่อนไข



③ ไม่ผูกกับคู่ตัวเลขที่เลือก

③ ตรวจกรณีเงื่อนไขไม่ครบ

เช่น $x=-2, y=1$: เงื่อนไขทั้งคู่บวกเป็น F และผลบวก $-1>0$ เป็น F แต่ $F \to F = T$ จึงยังไม่ขัดข้อความเดิม

① อ่านค่าตั้งต้น ② ทำคอลัมน์กลาง ③ เทียบผล

x	y	ทั้งคู่บวก	x+y>0	ลูกศร
1	2	T	T	T
-2	1	F	F	T

④ เช็กกลับคำแปล

ในโดเมน $\mathbb{R}$ ต้องไม่เปลี่ยน $\to$ เป็น $\wedge$ เพราะคู่ $-2, 1$ จะทำให้ $\wedge$ เท็จ ทั้งที่ภาษาเดิมไม่ได้เรียกร้องว่าทุกจำนวนจริงต้องบวก



③ ถ้าใช้ $\wedge$ จะกลายเป็น F ผิดความหมาย

ลองทำผิดแล้วดูจุดที่พัง

เขียน $\forall x \forall y[(x>0) \wedge (y>0) \wedge (x+y>0)]$ บน $\mathbb{R}$ จะอ้างว่าจำนวนจริงทุกตัวเป็นบวก จึงผิดตั้งแต่ $x=-2$ ไม่ใช่การแปลข้อความเดิม

ลงมือทำตามนี้

1. ตรวจว่าบวกอยู่ในโดเมนหรืออยู่ในเงื่อนไข
2. ถ้าอยู่ในโดเมนใหญ่ ใช้เงื่อนไข $\to$ ผลสรุป
3. ผูกตัวแปรทั้งสองด้วย $\forall$
4. ลองคู่นอกเงื่อนไขเพื่อเช็กการแปล แล้วหยุด

2.27 จำนวนเต็มบวกไม่มีตัวที่เล็กกว่า 1: ตัวอย่าง 2.7 ข้อ 1–3

บนจำนวนเต็มบวก เราเริ่มที่ 1 แล้วต่อด้วย 2,3,... การหาตัวที่เล็กกว่า 1 จึงเป็นไปไม่ได้ แต่การเลือก 1 เป็นตัวที่ไม่มากกว่าตัวอื่นทำได้

ลองก่อนเปิดเฉลย

ถ้าคนหนึ่งเลือก x=1 เราหา y เป็นจำนวนเต็มบวกที่ทำให้ x>y ได้ไหม

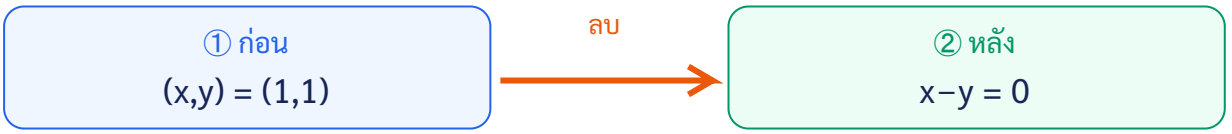
เฉลย หาไม่ได้ เพราะ y ทุกตัวอย่างน้อย 1 จึงไม่มี y ที่เล็กกว่า x=1

ตอนนี้โดเมนคือ **จำนวนเต็มบวก** $\mathbb{Z}^+=\{1,2,3,\ldots\}$ ไม่มี 0 ในโดเมน การตัดสินตัวบ่งปริมาณซ้อนต้องระบุว่าใครเลือกก่อน และต้องรับผิดชอบค่าที่อีกฝ่ายอาจเลือกใดบ้าง

การใช้ 1 เป็นค่าขอบช่วยแยกคำว่า “มีตัวเล็กกว่าเสมอ” ออกจาก “มีตัวเล็กที่สุด” ได้ โดยยังต้องให้เหตุผลทั่วไปเมื่ออ้างถึง y ทุกตัว

ข้อ 1 · ① เลือกคู่ค้าน

$\forall x \forall y\ (x-y\neq 0)$: เลือก $x=1, y=1$ ซึ่งอยู่ใน $\mathbb{Z}^+$ ทั้งคู่



③ กำลังตรวจข้อความ $\neq 0$

ข้อ 1 · ② สรุปและเช็กกลับ

$0\neq 0$ เป็น F จึงข้อความทุกคู่เป็น F เงื่อนไขไม่ได้บังคับให้ x,y ต่างกัน จึงใช้คู่เท่ากันได้



③ หนึ่งคู่ล้ม $\forall x \forall y$

ข้อ 2 · ① ตรึง x ที่ทำให้ทั้งแถวพัง

$\forall x \exists y\ (x>y)$: เลือก $x=1$ แล้วทุก $y \in \mathbb{Z}^+$ มี $y \geq 1$ จึง $1>y$ เป็น F ทุกตัว

① ดูแถว $x=1$ ② ไม่มี T ③ เหตุผล $y \geq 1$ ครอบคลุมต่อไป

$x \setminus y$	1	2	3
1	F	F	F
2	T	F	F
3	T	T	F

ข้อ 2 · ② สรุปและเช็กกลับ

มี $x=1$ ที่ไม่มี y ผ่าน จึง $\forall x \exists y$ เป็น F ห้ามหยิบ $y=0$ มาช่วยเพราะ 0 ไม่อยู่ในโดเมน



③ ภาพตัดถึง 3 แต่เหตุผลครอบคลุม $\mathbb{Z}^+$

ข้อ 3 · ① เลือก x แล้วตรวจทุก y

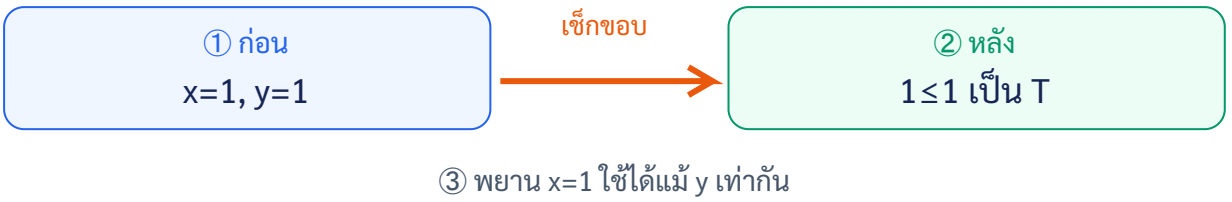
$\exists x \forall y\ (x \leq y)$: เลือก $x=1$ โดยทุก $y \in \mathbb{Z}^+$ มี $y \geq 1$ อยู่แล้ว จึง $1 \leq y$ จริงทุกตัว

① เลือกแถว $x=1$ ② ทั้งแถว T ③ $y \geq 1$ ใช้ได้ทุก y

$x \setminus y$	1	2	3
1	T	T	T
2	F	T	T
3	F	F	T

ข้อ 3 · ② สรุปและเช็กกลับ

x=1 อยู่ในโดเมน และผ่านทุก y จึง ∃x∀y เป็น T ที่ y=1 ให้ 1≤1 จริงด้วย จึงห้ามเปลี่ยน ≤ เป็น <



③ พยาน x=1 ใช้ได้แม้ y เท่ากัน

ลองทำผิดแล้วดูจุดที่พัง

แถวที่วาดแค่ y=1,2,3 ไม่ได้เป็นข้อพิสูจน์สำหรับโดเมนอนันต์ เหตุผล y≥1 ต่างหากที่รับรองแถวต่อไปทั้งหมด

ลงมือทำตามนี้

1. เขียนว่าโดเมนเริ่มที่ 1
2. อ่านข้อความเป็นงานเลือก x แล้วงานหา/ตรวจ y
3. ลองค่าขอบเมื่อข้อความมี < หรือ >
4. ให้เหตุผลครอบคลุมทุก y เมื่อจำเป็น แล้วเช็กค่าที่เท่ากันก่อนหยุด

2.28 y เปลี่ยนตาม x ได้หรือถูกล็อกไว้: ตัวอย่าง 2.7 ข้อ 4–5

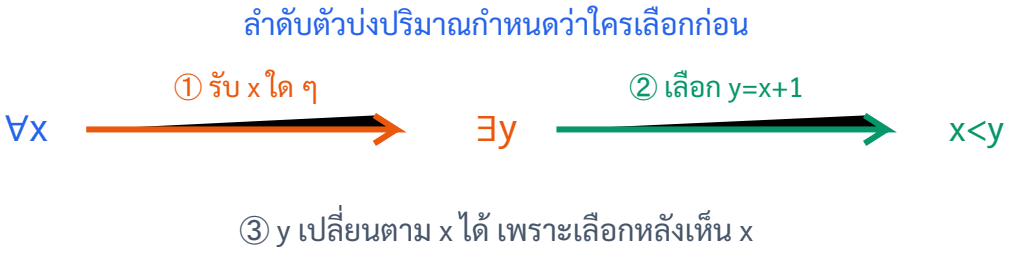
ถ้าบอกเลขมาก่อนแล้วให้เลือกเลขที่เท่ากัน เราเลือกตามได้เสมอ แต่ถ้าต้องเลือกเลขของเราไว้ตัวเดียวให้เท่ากับทุกเลขที่อีกฝ่ายจะพูดภายหลัง ย่อมทำไม่ได้

ลองก่อนเปิดเฉลย

เมื่ออีกฝ่ายให้ x เราเลือก y=x ได้เสมอไหม แล้วมี x คงที่ตัวเดียวที่เท่ากับ y ทุกตัวไหม

เฉลย แบบแรกทำได้ แบบหลังทำไม่ได้ เพราะเปลี่ยน y เป็น x+1 ก็ไม่เท่ากับ x แล้ว

รูป **$\forall x \exists y\,(x-y=0)$** อนุญาตให้พยาน y ขึ้นกับ x ส่วนรูป **$\exists x \forall y\,(x-y=0)$** บังคับให้ x คงที่ตัวเดียวผ่าน y ทุกค่า เมื่อพิสูจน์ข้อความทุก x มี y ให้บอกกติกาสร้าง y สำหรับ x ใด ๆ ไม่ใช่ยกตัวอย่างบางคู่ ส่วนการหักล้างมี x ที่ผ่านทุก y ต้องแสดงว่า x ใด ๆ ก็มี y ที่ทำให้ล้มได้



ข้อ 4 · ① รับ x ทั่วไปแล้วสร้างพยาน

ให้ $x \in \mathbb{Z}^+$ ใด ๆ เลือก y=x จะได้ $y \in \mathbb{Z}^+$ ด้วย จึงเป็นการเลือกที่ถูกโดเมน



ข้อ 4 · ② แทนกลับและสรุป

$x-y=x-x=0$ จริงทุก x จึง $\forall x \exists y\,(x-y=0)$ เป็น T

① รับแต่ละ x ② เลือก $y=x$ ③ แต่ละแถวมี T บนแนวทแยง

$x \setminus y$	1	2	3
1	T	F	F
2	F	T	F
3	F	F	T

ข้อ 5 · ① ปฏิเสธเป้าหมาย

ปฏิเสธ $\exists x \forall y\,(x-y=0)$ ได้ $\forall x \exists y\,(x-y\neq 0)$: ทุก x ต้องมี y ที่ทำให้ไม่เท่ากัน



③ สลับทั้ง $\exists$ และ $\forall$ ไม่ใช่ตัวเดียว

ข้อ 5 · ② สร้างตัวทำให้ล้ม

ให้ $x \in \mathbb{Z}^+$ ใด ๆ เลือก $y=x+1$ ซึ่งยังเป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว $x-y=x-(x+1)=-1\neq 0$



③ ไม่มี x ตัวไหนรอด y ที่เลือกนี้

ข้อ 5 · ③ เช็กกลับและสรุป

เช่น x=1 เลือก y=2 ได้ −1; x=2 เลือก y=3 ได้ −1 กติกานี้ใช้ได้ทุก x จึงข้อความนิเสธจริง และ ∃x∀y เดิมเป็น F

① อ่านค่าตั้งต้น ② ทำคอลัมน์กลาง ③ เทียบผล

x	เลือก y=x+1	x−y	x−y=0 ?
1	2	-1	F
2	3	-1	F
3	4	-1	F

ลองทำผิดแล้วดูจุดที่พัง

การเลือก y=x ในข้อ 5 เพียงพิสูจน์ว่ามี y หนึ่งตัวที่เข้ากับ x แต่โจทย์ขอทุก y จึงยังไม่ครบภาระ และ y=x+1 ทำให้ข้อนี้พัง

ลงมือทำตามนี้

1. อ่านว่าเลือกตัวไหนก่อน
2. ตัวที่เลือกทีหลังขึ้นกับตัวที่เลือกก่อนแล้วได้
3. ตรวจว่าสูตรเลือกยังอยู่ในโดเมน
4. แทนสูตรกลับก่อนสรุป ถ้าหักล้างให้ปฏิเสธทุกตัวบ่งปริมาณให้ครบแล้วหยุด

บทที่ 3 วิธีพิสูจน์ — จากสิ่งที่ให้ไปถึงสิ่งที่ต้องแสดง



ลูกศรเดินจากของที่มี ผ่านเหตุผลทีละบรรทัด แล้วหยุดเมื่อถึงกรอบเส้นประ

3.1 เห็นหลายครั้ง ยังไม่เท่ากับจริงทุกครั้ง

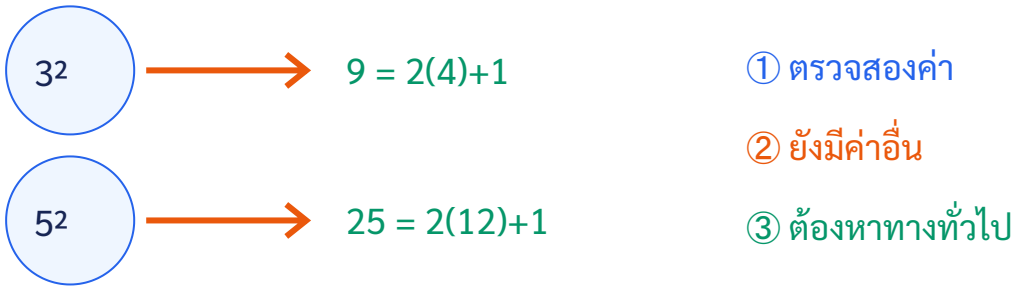
หยิบจำนวน 3 มายกกำลังสองได้ 9 หยิบ 5 ได้ 25 ทั้งสองผลเหลือเศษ 1 เมื่อแบ่งเป็นคู่ แต่คำว่า “ทุกจำนวนที่แบ่งเป็นคู่แล้วเหลือหนึ่ง” กว้างกว่าสองตัวนี้มาก เราต้องมีเหตุผลที่ใช้กับจำนวนที่ยังไม่ได้หยิบด้วย

ลองก่อนอ่านเฉลย

ถ้าลอง 3 กับ 5 แล้วผ่าน เราพูดว่าทุกจำนวนผ่านได้เลยไหม?

เฉลย ยังไม่ได้ เราตรวจเพียงสองจำนวน คำว่า “ทุก” ต้องมีเหตุผลที่ครอบคลุมจำนวนใด ๆ

การพิสูจน์ (proof) คือการเดินจากข้อมูลที่อนุญาตให้ใช้ ผ่านเหตุผลที่ถูกต้อง ไปถึงข้อความที่ต้องการยืนยัน ตัวอย่างช่วยให้เห็นทาง แต่ไม่แทนเหตุผลสำหรับทุกค่า



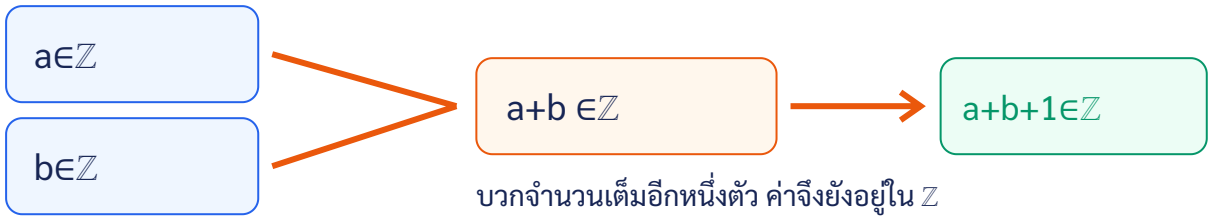
ก่อนเดินต้องรู้ว่าอะไรใช้ได้ตั้งแต่ต้น **สัจพจน์ (axiom)** คือข้อตกลงพื้นฐานที่รับไว้ เช่น ผลบวกและผลคูณของจำนวนเต็มยังเป็นจำนวนเต็ม **นิยาม (definition)** คือการระบุความหมายให้ตรงกัน เช่น “คู่” หมายถึงเขียนเป็นสองเท่าของจำนวนเต็มได้

ข้อความที่พิสูจน์แล้วเรียก **ทฤษฎีบท (theorem)** ถ้าใช้เป็นตัวช่วยในข้อใหญ่เรียก **บทตั้ง (lemma)** ถ้าได้ต่อจากทฤษฎีบทอย่างง่ายเรียก **บทแทรก (corollary)** ชื่อเหล่านี้บอกบทบาท ไม่ได้อนุญาตให้ข้ามเหตุผล



บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. ตั้งขอบเขต	ให้ a,b เป็นจำนวนเต็มใด ๆ
2. ใช้ข้อตกลง	a+b เป็นจำนวนเต็ม

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
3. ใช้ข้อตกลงอีกครั้ง	(a+b)+1 เป็นจำนวนเต็ม เพราะ 1 เป็นจำนวนเต็ม
4. เช็กกลับ	เราได้ความเป็นจำนวนเต็มของ a+b+1 โดยไม่ต้องเลือกค่า a,b เฉพาะตัว



เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

ถ้าอ้างว่า “จริงเพราะน่าจะจริง” แล้วเอาข้อความเดียวกันกลับมายืนยันตนเอง เราไม่ได้เดินจากข้อมูลใหม่เลย ลูกศรวิ่งเป็นวงรอบข้อความที่ยังไม่พิสูจน์

เช็กลิสต์ก่อนหยุด

① ระบุข้อความที่จะพิสูจน์ ② ระบุขอบเขตตัวแปร ③ แยกของที่ใช้ได้กับของที่ยังต้องแสดง ④ ทุกลูกศรต้องมีเหตุผล ⑤ หยุดเมื่อได้ข้อความเดิมครบเงื่อนไข

3.2 เริ่มจากสิ่งที่โจทย์ให้: คู่ คี่ และการพิสูจน์ตรง

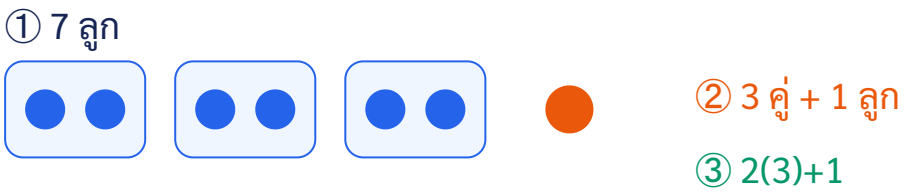
ลูกแก้ว 6 ลูกจับคู่ได้ 3 คู่พอดี ลูกแก้ว 7 ลูกจับคู่ได้ 3 คู่แล้วเหลือ 1 ลูก สิ่งที่ทำให้ต่างกันคือ “มีลูกเหลือหนึ่งหรือไม่” ไม่ใช่ว่าจำนวนนั้นใหญ่แค่ไหน

ลองก่อนอ่านเฉลย

7 เขียนเป็นสองเท่าของจำนวนเต็มแล้วบวก 1 ได้อย่างไร?

เฉลย $7=2(3)+1$ ส่วน $6=2(3)$ ที่จับคู่พอดีเรียกจำนวนคู่ ที่เหลือหนึ่งเรียกจำนวนคี่

สำหรับจำนวนเต็ม n: **คู่ (even)** หมายถึง $n=2k$ สำหรับจำนวนเต็ม k บางตัว; **คี่ (odd)** หมายถึง $n=2k+1$ สำหรับจำนวนเต็ม k บางตัว ใช้ได้กับศูนย์และจำนวนลบด้วย เช่น $-3=2(-2)+1$



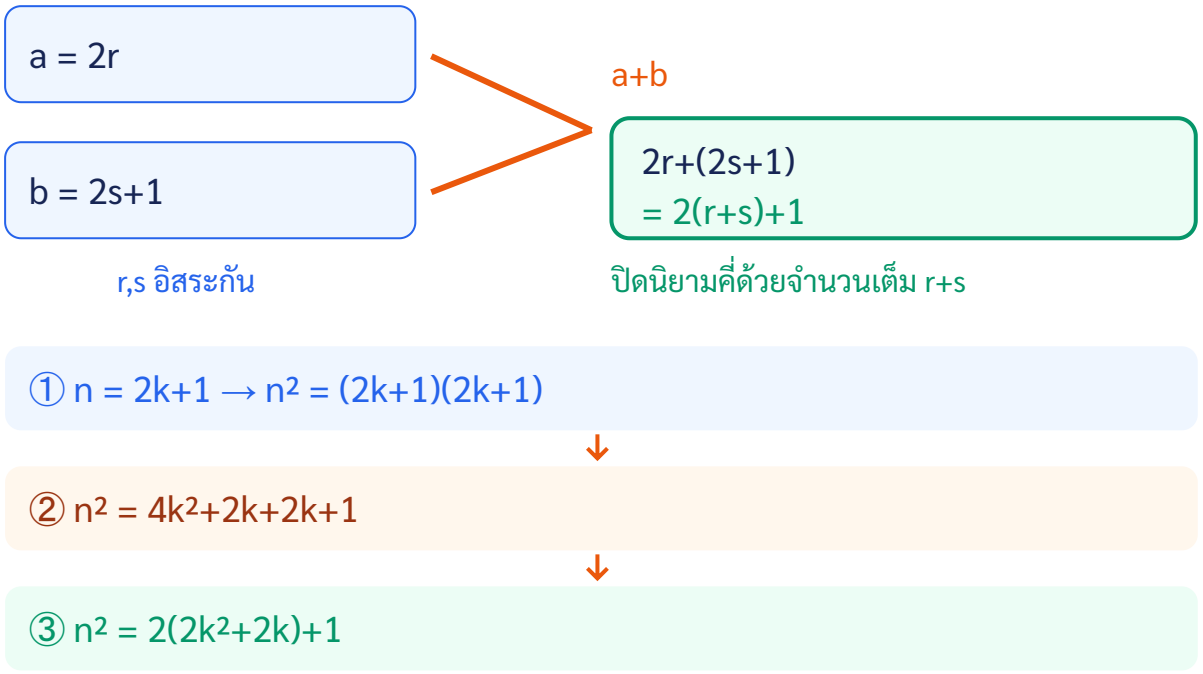
ถ้าโจทย์เขียนว่า “ถ้า p แล้ว q” เราเริ่มโดยรับ p ตามเงื่อนไข แล้วหาทางไป q วิธีนี้เรียก **การพิสูจน์ตรง (direct proof)** คำว่า **สมมติ (assume)** ตรงนี้ไม่ได้แปลว่าเดา แต่แปลว่า “กำลังพิจารณากรณีที่เงื่อนไข p เป็นจริง”



ตัวอย่าง 2.1: ถ้า n คี่ แล้ว n^2 คี่ เป้าหมายยังใช้ไม่ได้ เราต้องทำให้นิพจน์ n^2 กลายเป็น 2(จำนวนเต็ม)+1

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. สมมติเงื่อนไข	ให้ n เป็นจำนวนเต็มคี่ใด ๆ
2. เปิดนิยาม	$n=2k+1$ โดย k เป็นจำนวนเต็ม
3. แทนค่า	$n^2=(2k+1)^2$
4. กระจาย	$n^2=4k^2+4k+1$

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
5. ดึง 2 ออก	$n^2=2(2k^2+2k)+1$
6. ยืนยันก้อนในวงเล็บ	$m=2k^2+2k$ เป็นจำนวนเต็ม เพราะบวกและคูณจำนวนเต็ม
7. สรุปและเช็กกลับ	$n^2=2m+1$ จึงคี่ ตรงกับสิ่งที่โจทย์ต้องแสดง



เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

เขียน $n^2=2m+1$ ตั้งแต่ต้นแล้วบอกว่า n^2 คี่ คือใช้เป้าหมายเป็นของที่มีแล้ว ถ้ายังไม่บอก m มาจากไหนและเป็นจำนวนเต็มอย่างไร ก็ยังไม่พิสูจน์

เช็กลิสต์ก่อนหยุด

① รับเฉพาะเงื่อนไข n คี่ ② เปลี่ยนเป็น $n=2k+1$ ③ ทำกับ n^2 ④ จัดรูปให้เห็น $2m+1$ ⑤ ตรวจ m เป็นจำนวนเต็มแล้วจบ

3.3 สองจำนวนไม่จำเป็นต้องใช้ตัวแทนเดียวกัน

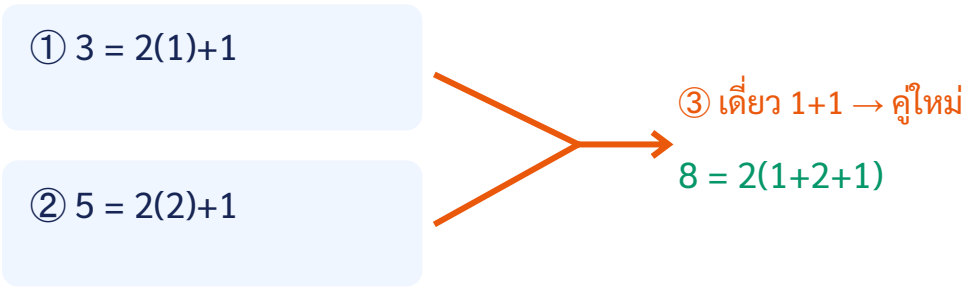
เอาลูกแก้ว 3 ลูกกับ 5 ลูกมารวมกัน กลุ่มแรกเหลือเดี่ยวหนึ่งลูก กลุ่มหลังเหลือเดี่ยวหนึ่งลูก เมื่อเอาสองลูกที่เหลือมาจับคู่กันก็ไม่มีลูกค้าง รวมได้ 8 ลูก

ลองก่อนอ่านเฉลย

ถ้าจำนวนคี่ตัวแรกมี 1 คู่ อีกตัวมี 2 คู่ ต้องใช้ตัวอักษรแทนจำนวนคู่เหมือนกันไหม?

เฉลย ไม่ต้อง ตัวแรกกับตัวหลังอาจมีจำนวนคู่ต่างกัน เราจึงใช้ k_1 และ k_2

ตัวอย่าง 2.2: ผลบวกของจำนวนเต็มคี่สองจำนวนเป็นจำนวนคู่ นี่ใช้วิธีตรงเหมือนเดิม แต่ต้องให้ตัวแปรอิสระแก่แต่ละจำนวน



บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. สมมติ	ให้ n_1, n_2 เป็นจำนวนเต็มคี่ใด ๆ
2. เปิดนิยามแยกกัน	$n_1=2k_1+1$ และ $n_2=2k_2+1$ โดย k_1, k_2 เป็นจำนวนเต็ม
3. แทนค่า	$n_1+n_2=(2k_1+1)+(2k_2+1)$
4. รวมพจน์	$n_1+n_2=2k_1+2k_2+2$
5. ดึงตัวประกอบ	$n_1+n_2=2(k_1+k_2+1)$
6. ปิดด้วยนิยาม	k_1+k_2+1 เป็นจำนวนเต็ม ผลบวกจึงเป็นจำนวนคู่
7. เช็กกลับ	3+5=8=2(4) สอดคล้องกับตัวอย่าง แต่เหตุผลทั่วไปอยู่ที่บรรทัดตัวแปรด้านบน

① $(2k_1+1)+(2k_2+1)$

↓

② $2k_1+2k_2+(1+1)$

↓

③ $2(k_1+k_2+1)$

เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

ถ้าเขียนทั้ง $n_1=2k+1$ และ $n_2=2k+1$ เราบังคับให้ $n_1=n_2$ โดยไม่รู้ตัว ตัวอย่าง 3 กับ 5 จะถูกตัดทิ้งจากการพิสูจน์ แม้ข้อความโจทย์ไม่ได้บอกว่าสองจำนวนเท่ากัน

เช็กลิสต์ก่อนหยุด

① จำนวนที่เลือกได้อิสระต้องมีตัวแทนของตน ② แทนทุกตัว ③ รวมส่วนที่เหลือ ④ แสดงรูป 2m พร้อม m เป็นจำนวนเต็ม ⑤ หยุดเมื่อครอบคลุมสองจำนวนใด ๆ

3.4 ทางเดียวไปไม่ถึงทุกจำนวน: แยกให้ครบสองกรณี

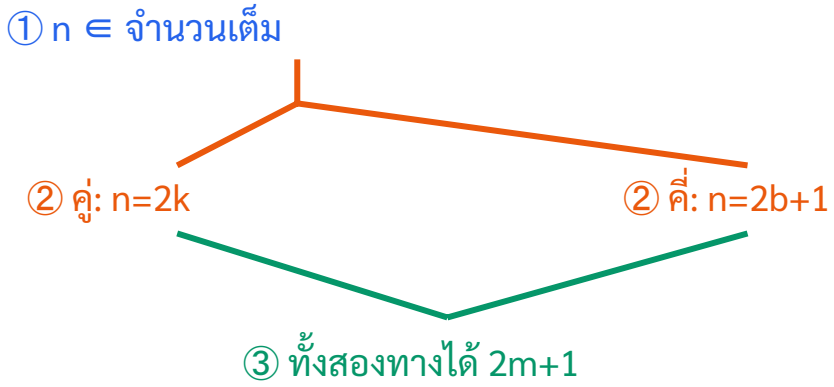
ลองแทน $n=2$ ใน n^2-3n+5 ได้ 3; แทน $n=3$ ได้ 5 ทั้งคู่คี่ แต่ถ้าเริ่มว่า $n=2k$ เรารับเฉพาะจำนวนคู่แล้วจำนวนคี่หายไปจากงานทันที

ลองก่อนอ่านเฉลย

จำนวนเต็มทุกตัวเป็นคู่หรือคี่ได้ไหม และมีตัวไหนเป็นทั้งสองอย่างหรือเปล่า?

เฉลย ทุกตัวอยู่ในกรณีใดกรณีหนึ่งพอดี เราจึงตรวจคู่หนึ่งทาง คี่อีกหนึ่งทาง แล้วรวมผลได้

การแยกพื้นที่ของโจทย์ให้ครบ แล้วพิสูจน์ในทุกส่วน เรียก **การพิสูจน์แบบแจงกรณี (proof by cases)** ส่วนที่เลือกต้องครอบคลุมทั้งหมด ไม่ใช่เลือกเฉพาะส่วนที่ทำง่าย



ตัวอย่าง 2.3: สำหรับจำนวนเต็ม n ทุกตัว n^2-3n+5 เป็นคี่

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. ตั้งกรณีคู่	$n=2k$ โดย k เป็นจำนวนเต็ม
2. แทนค่า	$n^2-3n+5=(2k)^2-3(2k)+5$
3. คำนวณ	$=4k^2-6k+5$
4. จัดรูป	$=2(2k^2-3k+2)+1$ จึงคี่
5. ตั้งกรณีคี่	$n=2b+1$ โดย b เป็นจำนวนเต็ม
6. แทนค่าและกระจาย	$=(2b+1)^2-3(2b+1)+5 =4b^2+4b+1-6b-3+5$
7. รวมพจน์	$=4b^2-2b+3$
8. จัดรูป	$=2(2b^2-b+1)+1$ จึงคี่

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
9. เช็กกลับ	ก้อนในวงเล็บทั้งสองเป็นจำนวนเต็ม ครบคู่และคี่ จึงครบทุกจำนวนเต็ม

① คู่: $4k^2-6k+5 \to 2(2k^2-3k+2)+1$

↓

② คี่: $4b^2-2b+3 \to 2(2b^2-b+1)+1$

เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

ทำเฉพาะ n=2k แล้วสรุป “ทุกจำนวนเต็ม” ไม่ได้ ตัวเลข n=3 ไม่อยู่ใน n=2k สำหรับ k ที่เป็นจำนวนเต็ม หลุมนี้ไม่ได้แก้ด้วยการลอง 3 เพิ่มหนึ่งค่า ต้องทำกรณีคี่ทั่วไป

เช็กลิสต์ก่อนหยุด

① ประกาศกรณีทั้งหมด ② บอกว่าครบโดเมนอย่างไร ③ ทำแต่ละกรณีจนถึงเป้าหมายเดียวกัน ④ ตรวจจำนวนเต็มในวงเล็บ ⑤ รวมผลแล้วหยุด

3.5 ต้องสร้างตัวที่ใช้ได้ ไม่ใช่บอกว่าคงมี

ถ้า x=2 เราเลือก y=−3 ได้ เพราะ 2≥−3 แต่ 2²=4<9=(−3)² ถ้า x=−2 เราก็เลือก y=−3 ได้อีก คราวนี้ −2≥−3 และ 4<9

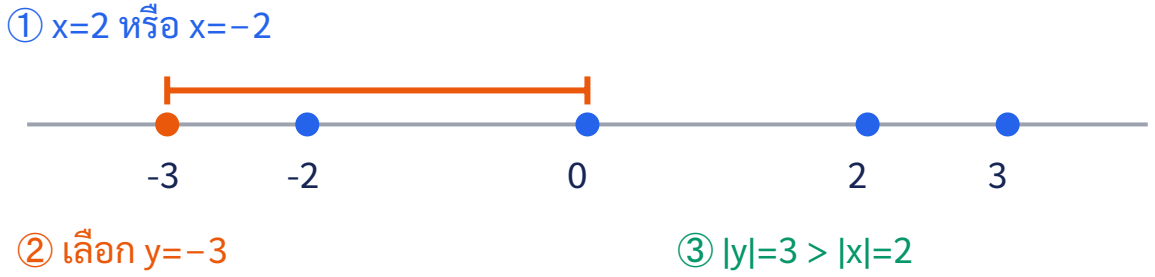
ลองก่อนอ่านเฉลย

ถ้า x=0 แล้วเลือก y=0 จะผ่านเงื่อนไข x²<y² ไหม?

เฉลย ไม่ผ่าน เพราะ 0<0 เป็นเท็จ ต้องขยับ y ให้ไกลจากศูนย์กว่า x จริง ๆ

ตัวอย่าง 2.4: พิสูจน์ $\forall x \in \mathbb{R}\, \exists y \in \mathbb{R}\, [x^2 < y^2 \wedge x \geq y]$ เครื่องหมาย ∀ บอกว่าให้รับ x ใด ๆ มาก่อน; ∃ บอกว่าเราต้องสร้าง y ที่เหมาะกับ x นั้น วิธีนี้เรียก **การสร้างพยาน (constructive existence proof)**

ใช้ $y = -(|x| + 1)$ โดย |x| คือระยะจาก x ถึงศูนย์ ไม่ติดลบ เราจงใจให้ y อยู่ด้านลบและห่างจากศูนย์เพิ่มอีกหนึ่งหน่วย



บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. รับ x ใด ๆ	ให้ x เป็นจำนวนจริง ไม่เลือกเฉพาะบวก
2. สร้าง y	กำหนด y=−(|x|+1) ซึ่งเป็นจำนวนจริง
3. กรณี x≥0: เปิด |x|	|x|=x จึง y=−x−1≤x
4. ตรวจเงื่อนไขกำลังสอง	y²−x²=(x+1)²−x²=2x+1>0 เพราะ x≥0
5. กรณี x<0: เปิด |x|	|x|=−x จึง y=x−1<x
6. ตรวจเงื่อนไขกำลังสอง	y²−x²=(x−1)²−x²=−2x+1>0 เพราะ x<0
7. เช็กกลับ	ทุกกรณีได้ y≤x และ y²>x² พร้อมกัน พยานตัวเดียวกันผ่านทั้งสองเงื่อนไข

① $x \geq 0$: $y^2 - x^2 = (x+1)^2 - x^2 = 2x+1 > 0$

↓

② $x < 0$: $y^2 - x^2 = (x-1)^2 - x^2 = -2x+1 > 0$

เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

เลือก $y = -|x|$ จะได้ $y^2 = x^2$ เสมอ จึงพังที่เครื่องหมาย $<$ การแสดงเพียง $y^2 \geq x^2$ ก็ยังไม่พอ ต้องแสดงว่า “มากกว่าอย่างเคร่งครัด” เหตุที่เติม 1 ก็เพื่อสร้างช่องว่างบวกนี้

เช็กลิสต์ก่อนหยุด

① รับ x ก่อน ② เสนอ y ที่ขึ้นกับ x ได้ ③ ตรวจว่า y อยู่ในโดเมน ④ ตรวจทุกเงื่อนไขกับ y ตัวเดิม ⑤ ตรวจ $<$ กับ $\leq$ ให้ตรงโจทย์

3.6 ค่าที่เล็กกว่าเป็นจุดเชื่อมอสมการ

มีขอบเขตสองตัวคือ 4 กับ 7 ถ้า x ไม่เกิน 4 ก็ไม่เกิน 7 ด้วย เพราะ 4 อยู่ก่อน 7 บนเส้นจำนวน สิ่งที่ต้องระวังคือขอบเขตที่เล็กกว่าอาจเป็นตัวแรกหรือตัวที่สองก็ได้

ลองก่อนอ่านเฉลย

ถ้าสลับเป็น $d_1=7$ และ $d_2=4$ ค่าที่เล็กกว่ายังเป็น d_1 ไหม?

เฉลย ไม่ใช่แล้ว คราวนี้เป็น d_2 เราต้องตรวจทั้งสองตำแหน่ง

$\min\{u, v\}$ อ่านว่า **ค่าน้อยสุด (minimum)** ของสองตัว: เท่ากับ u เมื่อ u≤v และเท่ากับ v เมื่อ u>v เราใช้หลักการต่ออสมการ: ถ้า x≤y และ y≤z แล้ว x≤z

ตัวอย่าง 2.5: ถ้า $d=\min\{d_1,d_2\}$ และ $x\le d$ จงพิสูจน์ $x\le d_1$ และ $x\le d_2$

① $x \le d$



② ต่อ $x \le 4 \le 7$ ③ ได้ $x \le$ ทั้งสองขอบเขต

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. รับเงื่อนไข	ให้ $d=\min\{d_1,d_2\}$ และ $x\le d$
2. กรณีแรก $d_1\le d_2$	นิยาม min ให้ $d=d_1$ จึง $x\le d_1$
3. ต่อเส้นทางแรก	$x\le d_1\le d_2$ จึง $x\le d_2$
4. กรณีที่สอง $d_1>d_2$	นิยาม min ให้ $d=d_2$ จึง $x\le d_2$
5. ต่อเส้นทางที่สอง	$x\le d_2<d_1$ จึง $x\le d_1$
6. เช็กกลับ	แต่ละกรณีได้ทั้ง $x\le d_1$ และ $x\le d_2$ กรณีเท่ากันรวมอยู่ในกรณีแรกแล้ว

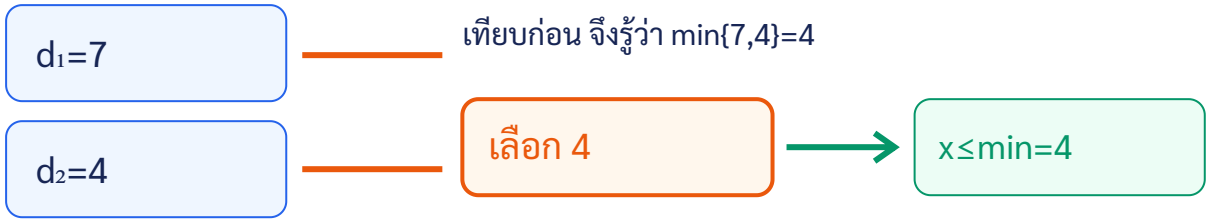
① $d_1\le d_2$: $x\le d=d_1\le d_2$

↓

② $d_1>d_2$: $x\le d=d_2<d_1$

เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

เขียน $d=d_1$ โดยไม่ตรวจ $d_1 \le d_2$ จะผิดทันทีเมื่อ $d_1=7, d_2=4$ เพราะ $\min\{7,4\}=4$ ไม่ใช่ 7 เงื่อนไขในนิยามเป็นสิ่งที่ต้องเปิดตรวจ ไม่ใช่ของตกแต่ง



เช็กลิสต์ก่อนหยุด

① เปิดนิยาม min ② แยกตามเงื่อนไขในนิยาม ③ เชื่อม x ผ่าน d ไปแต่ละขอบเขต ④ ต้องได้ข้อสรุปทั้งสอง ไม่ใช่ข้อใดข้อหนึ่ง

3.7 เริ่มจากปลายทางที่ไม่เกิด: แย้งสลับที่

ถ้า n เป็นคู่ เช่น n=4 จะได้ 3n+2=14 ซึ่งเป็นคู่ด้วย นั่นบอกว่า ถ้าเราพบ 3n+2 เป็นคี่ n จะเป็นคู่ไม่ได้

ลองก่อนอ่านเฉลย

ข้อความ “ถ้า 3n+2 คี่ แล้ว n คี่” ถ้าเริ่มจาก “n ไม่คี่” เราต้องไปให้ถึงอะไร?

เฉลย ต้องไปให้ถึง “3n+2 ไม่คี่” ไม่ใช่กลับไปสมมติว่ามันคี่

จากบทตรรกศาสตร์ $p \to q$ มีค่าความจริงเหมือน $\neg q \to \neg p$ วิธีหลังเรียก **การพิสูจน์โดยแย้งสลับที่ (contrapositive proof)** เราปฏิเสธข้อสรุป แล้วทำให้เงื่อนไขเดิมเป็นไปไม่ได้



ตัวอย่าง 2.6: ให้ n เป็นจำนวนเต็ม ถ้า 3n+2 คี่ แล้ว n คี่

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. กำหนด p,q	p: 3n+2 คี่; q: n คี่
2. เขียนทางใหม่	¬q: n คู่ → ¬p: 3n+2 คู่ เพราะโดเมนเป็นจำนวนเต็ม
3. สมมติ ¬q	ให้ n=2k โดย k เป็นจำนวนเต็ม
4. แทนค่า	3n+2=3(2k)+2
5. คำนวณ	=6k+2
6. จัดรูป	=2(3k+1)
7. อ่านผล	3k+1 เป็นจำนวนเต็ม จึง 3n+2 คู่ ได้ ¬p
8. เช็กกลับ	เราได้ ¬q→¬p จึงได้ p→q ตามสมมูล ไม่ได้สลับลูกศรเฉย ๆ

① n คู่ → n=2k

↓

② 3n+2 = 3(2k)+2 = 6k+2

↓

③ 3n+2 = 2(3k+1) → คู่

เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

เปลี่ยน p→q เป็น q→p เฉย ๆ คือ “บทกลับ” ซึ่งไม่สมมูลทั่วไป ลอง p=เท็จ,q=จริง: p→q จริง แต่ q→p เท็จ จึงห้ามใช้การพิสูจน์บทกลับแทนโจทย์ แม้บางข้อบทกลับจะบังเอิญจริง

เช็กลิสต์ก่อนหยุด

① ตั้งชื่อ p,q ให้ถูกก้อน ② ปฏิเสธทั้งสอง ③ สลับตำแหน่ง ④ สมมติ ¬q เท่านั้น ⑤ ไปถึง ¬p แล้วอ้างสมมูลกลับ

3.8 ปฏิเสธ “หรือ” ต้องปฏิเสธให้ครบทั้งคู่

ถ้า x<1 และ y<1 ผลบวก x+y ย่อมน้อยกว่า 2 เช่น 0.8+0.7=1.5 เราจึงคาดได้ว่าผลบวกตั้งแต่ 2 ขึ้นไปต้องมีอย่างน้อยตัวหนึ่งไม่ต่ำกว่า 1

ลองก่อนอ่านเฉลย

การบอกว่า “ไม่มีตัวไหนถึง 1 เลย” คือ x<1 หรือ y<1 หรือว่าต้องเป็นทั้งสอง?

เฉลย ต้องเป็น x<1 และ y<1 ถ้ามีแค่ตัวหนึ่งต่ำกว่า 1 อีกตัวอาจสูงมาก

ตัวอย่าง 2.7: ถ้า x+y≥2 แล้ว x≥1 หรือ y≥1 สำหรับจำนวนจริง x,y การปฏิเสธ “A หรือ B” คือ “ไม่ A และไม่ B” เพราะต้องปิดทุกทางที่ทำให้ข้อความเดิมจริง

① เป้าหมายเดิม: x≥1 ∨ y≥1

↓

② ปฏิเสธทั้งก้อน: x<1 ∧ y<1

↓

③ รวมขอบเขต: x+y<1+1=2

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. ปฏิเสธข้อสรุป	สมมติ ¬(x≥1 หรือ y≥1)
2. เปิดคำปฏิเสธ	จึง x<1 และ y<1
3. บวกอสมการ	x+y<1+1 เพราะบวกข้างซ้ายและข้างขวาของอสมการ < ได้
4. คำนวณขอบเขต	x+y<2
5. เช็กกลับ	นี่คือปฏิเสธของ x+y≥2 เราพิสูจน์ ¬q→¬p ครบแล้ว

① x < 1 y < 1

↓

② x+y < 1+1

↓

③ x+y < 2

เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

ถ้าใช้ “x<1 หรือ y<1” แล้วบอกผลรวม<2 จะพังเมื่อ x=0,y=3 เพราะเงื่อนไข “หรือ” จริง แต่ 0+3=3 ไม่ต่ำกว่า 2 คำเชื่อมที่ปฏิเสธผิดทำให้มีกรณีหลุดเข้ามา

รูปที่ถูก: x<1 และ y<1
สองประตูต้องผ่านพร้อมกัน
จึง x+y<2

รูปผิด: x<1 หรือ y<1
x=0 ผ่าน แต่ y=3 ไม่ผ่าน
0+3=3 ไม่ต่ำกว่า 2

กรณีหลุดนี้หักล้างคำปฏิเสธแบบ “หรือ”

เช็กลิสต์ก่อนหยุด

① วงทั้งข้อสรุป ② ปฏิเสธทั้งก้อน ③ เปลี่ยน ≥ เป็น < ④ เปลี่ยน หรือ เป็น และ ⑤ บวกแล้วเทียบกับปฏิเสธของเงื่อนไขเดิม

3.9 ลองเปิดกรณีที่โจทย์พัง แล้วชนข้อขัดแย้ง

ถ้า xy=0 แต่ x ไม่ใช่ศูนย์ เราหารด้วย x แล้วได้ y=0 จะเกิดปัญหาทันทีถ้าสมมติไว้ด้วยว่า y ไม่ใช่ศูนย์ เพราะจำนวนเดียวกันเป็นศูนย์และไม่เป็นศูนย์พร้อมกันไม่ได้

ลองก่อนอ่านเฉลย

เพื่อให้ “ถ้า xy=0 แล้ว x=0 หรือ y=0” เป็นเท็จ ต้องให้ส่วนไหนจริงและส่วนไหนเท็จ?

เฉลย ต้องมี xy=0 จริง แต่ x=0 หรือ y=0 เท็จ นั่นคือ x≠0 และ y≠0 พร้อมกัน

การเปิดกรณีที่ข้อความต้องการพิสูจน์เป็นเท็จ แล้วแสดงว่ากรณีนั้นเป็นไปไม่ได้ เรียก **การพิสูจน์โดยขัดแย้ง (proof by contradiction)** สำหรับ p→q เราสมมติ p และ ¬q ต่างจากแย้งสลับที่ซึ่งเริ่มเพียง ¬q



ตัวอย่าง 2.8: สำหรับจำนวนจริง x,y ถ้า xy=0 แล้ว x=0 หรือ y=0

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. สมมติกรณีที่โจทย์พัง	ให้ xy=0 และ x≠0 และ y≠0
2. เขียนศูนย์อีกแบบ	x·0=0
3. เทียบสองผลคูณ	xy=x·0
4. ตัดตัวคูณที่ไม่เป็นศูนย์	เพราะ x≠0 จึง y=0
5. ชี้จุดชน	ได้ y=0 แต่สมมติ y≠0 ไว้ เป็นข้อความตรงข้ามกัน
6. สรุป	กรณี p∧¬q เป็นไปไม่ได้ จึง p→q จริง
7. เช็กกลับ	เมื่อผลคูณเป็นศูนย์ต้องมีอย่างน้อยหนึ่งตัวเป็นศูนย์ ไม่ได้บอกว่าต้องเป็นศูนย์ทั้งสอง

① สมมติ y≠0

② xy=x·0 และ x≠0

③ y=0  ชนกับ y≠0 ที่รับไว้

เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

ถ้าตัด x จาก xy=x·0 โดยไม่ได้ตรวจ x≠0 จะผิดเมื่อ x=0,y=5 เพราะ 0·5=0·0 จริง แต่ 5=0 เท็จ เงื่อนไขของกฎตัดตัวคูณคือประตูที่ต้องตรวจทุกครั้ง

เช็กลิสต์ก่อนหยุด

① เขียน p∧¬q ② เดินด้วยกฎที่ใช้ได้ ③ ชี้คู่ข้อความที่ขัดกันให้ชัด ④ ถอนกรณีที่สมมติว่าพัง ⑤ สรุปข้อความเดิม

3.10 โจทย์เดิม เปลี่ยนสิ่งที่รับไว้ตอนเริ่ม

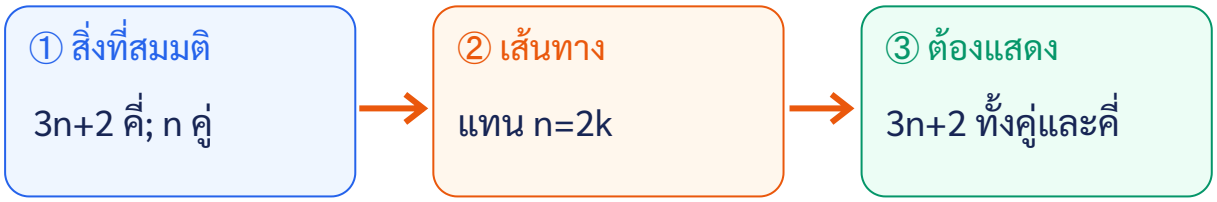
เรารู้จากการคำนวณแล้วว่า ถ้า n คู่ 3n+2 จะคู่ คราวนี้ลองรับเพิ่มว่า 3n+2 คี่ จะเกิดการชนระหว่าง “คู่” กับ “คี่” ของจำนวนเดียวกัน

ลองก่อนอ่านเฉลย

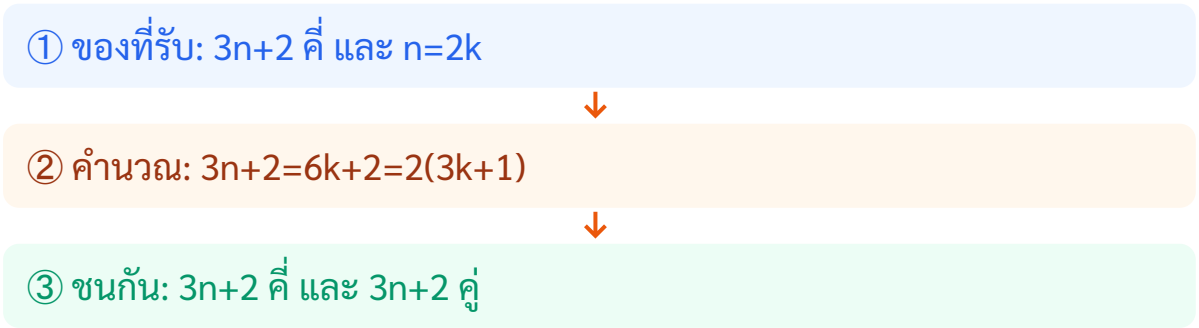
ถ้าเริ่มเพียง n คู่ แล้วได้ 3n+2 คู่ เราชนข้อขัดแย้งแล้วหรือยัง?

เฉลย ยัง ถ้าอยากใช้วิธีขัดแย้งต้องรับว่า 3n+2 คี่ไว้ด้วย มิฉะนั้นสิ่งที่ได้ก็เป็นข้อความปกติ

ตัวอย่าง 2.9: ถ้า 3n+2 คี่ แล้ว n คี่ ใช้การพิสูจน์โดยขัดแย้ง การคำนวณเหมือนตัวอย่าง 2.6 แต่สิ่งที่สมมติและประโยคจบต่างกัน

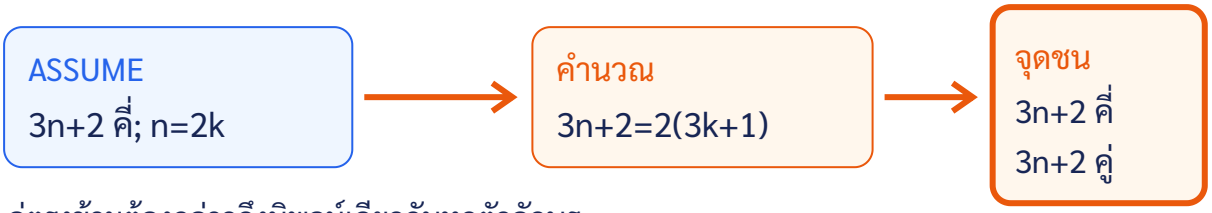


บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. สมมติกรณีผิด	ให้ 3n+2 คี่ แต่ n ไม่คี่
2. ใช้โดเมนจำนวนเต็ม	n ไม่คี่จึง n คู่ เขียน n=2k โดย k เป็นจำนวนเต็ม
3. แทนค่า	3n+2=3(2k)+2
4. คำนวณ	=6k+2
5. จัดรูป	=2(3k+1) จึงเป็นคู่
6. ชี้ข้อขัดแย้ง	3n+2 เป็นคู่จากการคำนวณ แต่เป็นคี่จากสมมติฐาน
7. เช็กกลับ	กรณี 3n+2 คี่แต่ n คู่เป็นไปไม่ได้ จึงถ้า 3n+2 คี่ แล้ว n คี่



เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

บอก “ขัดแย้ง” ลอย ๆ โดยไม่ชี้ว่าชนกับบรรทัดใดทำให้ตรวจงานไม่ได้ ต้องเขียนชื่อจำนวนเดิมครบ เช่น 3n+2 คู่และ 3n+2 คี่ ไม่ใช่ n คู่แต่ 3n+2 คี่ เพราะสองจำนวนต่างกันอาจมีความเป็นคู่คี่ต่างกันได้



คู่ตรงข้ามต้องกล่าวถึงนิพจน์เดียวกันทุกตัวอักษร

เช็กลิสต์ก่อนหยุด

① เปรียบเทียบกับแย้งสลับที่: รับเพิ่ม p ② คำนวณให้ได้ ¬p ③ ชี้ p กับ ¬p ของข้อความเดียวกัน ④ สรุปว่าเงื่อนไขเดิมบังคับข้อสรุป

3.11 เศษส่วนที่ถูกต้องต้องมีตัวส่วนไม่เป็นศูนย์

จำนวน 2/3 ยกกำลังสองได้ 4/9 ซึ่งยังเป็นอัตราส่วนของจำนวนเต็ม ลองเปลี่ยนเป็น −2/3 ก็ได้ 4/9 เช่นกัน สิ่งสำคัญไม่ใช่เครื่องหมายลบ แต่คือตัวส่วนยังไม่เป็นศูนย์

ลองก่อนอ่านเฉลย

ถ้า r,s เป็นจำนวนเต็มและ $s\neq 0$ แล้ว r^2 กับ s^2 ยังเป็นจำนวนเต็มไหม? s^2 เป็นศูนย์ได้ไหม?

เฉลย ทั้งสองยังเป็นจำนวนเต็ม และ $s^2\neq 0$ เพราะ $s\neq 0$ จึงใช้เป็นเศษและส่วนของเศษส่วนใหม่ได้

จำนวนที่เขียนเป็น r/s โดย r,s เป็นจำนวนเต็มและ $s\neq 0$ เรียก **จำนวนตรรกยะ (rational number)** จำนวนจริงที่เขียนเช่นนี้ไม่ได้เรียก **จำนวนอตรรกยะ (irrational number)** จะย่อเศษส่วนให้ไม่มีตัวประกอบร่วมที่มากกว่า 1 ก็ได้ แต่การย่อไม่จำเป็นต่อข้อพิสูจน์นี้

ตัวอย่าง 2.10: ถ้า x^2 ไม่เป็นตรรกยะ แล้ว x ไม่เป็นตรรกยะ



บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. สมมติกรณีผิด	ให้ x^2 ไม่เป็นตรรกยะ แต่ x เป็นตรรกยะ
2. เปิดนิยาม	$x=r/s$ โดย $r,s\in\mathbb{Z}$ และ $s\neq 0$
3. ยกกำลังสอง	$x^2=(r/s)^2$
4. กระจายกำลัง	$x^2=r^2/s^2$
5. ตรวจตัวเศษ	r^2 เป็นจำนวนเต็ม
6. ตรวจตัวส่วน	s^2 เป็นจำนวนเต็มและไม่เป็นศูนย์
7. อ่านผล	x^2 เป็นตรรกยะ ขัดกับสมมติฐานแรก
8. เช็กกลับ	จึงไม่มี x ที่เป็นตรรกยะแต่ x^2 อตรรกยะ ข้อความเดิมเป็นจริง

① $x = r/s$ $s \neq 0$

↓

② $x^2 = (r/s)(r/s)$

↓

③ $x^2 = r^2/s^2$ $s^2 \neq 0$

เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

ลืมเงื่อนไข $s \neq 0$ แล้วบอกว่าตัวส่วนเป็นจำนวนเต็มก็พอ จะรับเศษส่วน 1/0 เข้ามาผิด ๆ เพราะศูนย์ก็เป็นจำนวนเต็ม แต่ 1/0 ไม่ใช่จำนวนจริงที่นิยามไว้ จึงต้องตรวจทั้ง “เป็นจำนวนเต็ม” และ “ไม่เป็นศูนย์”

เช็กลิสต์ก่อนหยุด

① ปฏิเสธข้อสรุปให้ถูก ② เขียนเศษส่วนพร้อม $s \neq 0$ ③ ยกกำลังทั้งเศษและส่วน ④ ตรวจนิยามครบ ⑤ ชี้ว่าชนกับ x^2 อตรรกยะ

3.12 ถุงซ้อนกัน: เลือกสมาชิกที่หลุดมาสักตัว

ถ้าของทุกชิ้นในถุง X อยู่ในถุง Y และของทุกชิ้นในถุง Y อยู่ในถุง Z ของใน X จะไปอยู่นอก Z ได้หรือไม่? ตามของเพียงชิ้นเดียวก็เห็นเส้นทาง X→Y→Z ได้

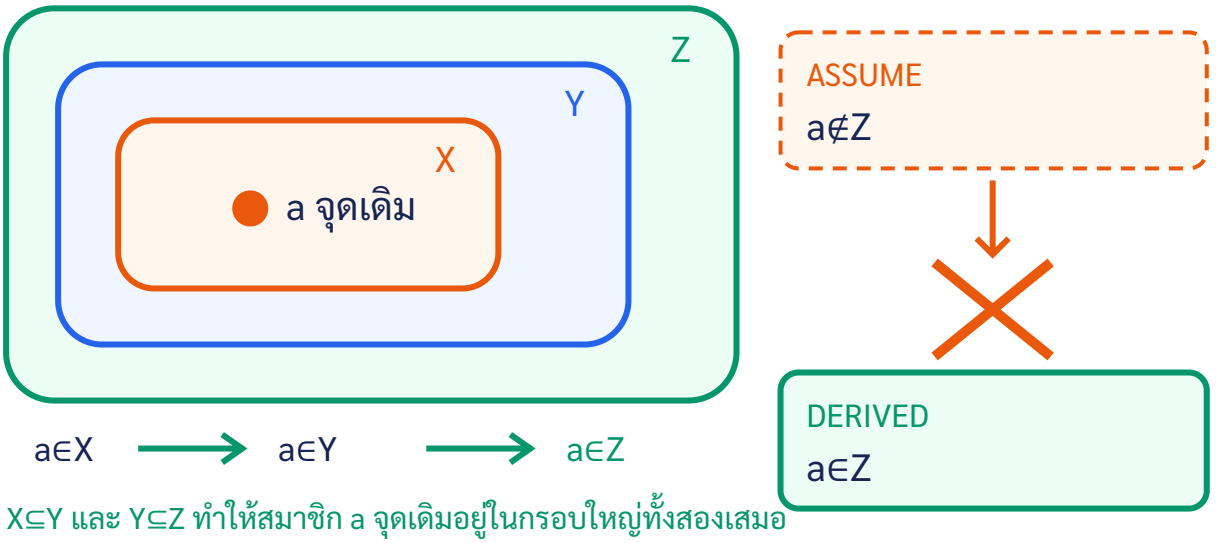
ลองก่อนอ่านเฉลย

ถ้าบอกว่า X ไม่ได้เป็นส่วนหนึ่งของ Z เราต้องหาอะไรมาให้เห็น?

เฉลย สมาชิก a อย่างน้อยหนึ่งตัวที่อยู่ใน X แต่ไม่อยู่ใน Z ไม่ใช่บอกว่าไม่มีสมาชิกตัวไหนอยู่ใน Z เลย

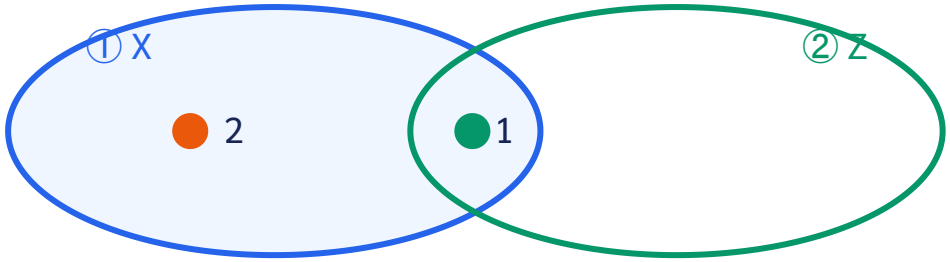
ทวนว่า X⊆Y หมายถึงทุกสมาชิกของ X อยู่ใน Y ด้วย การปฏิเสธ X⊆Z คือ $\exists a\,(a \in X \wedge a \notin Z)$

ตัวอย่าง 2.11: ถ้า X⊆Y และ Y⊆Z แล้ว X⊆Z ใช้วิธีขัดแย้ง



X⊆Y และ Y⊆Z ทำให้สมาชิก a จุดเดิมอยู่ในกรอบใหญ่ทั้งสองเสมอ

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. รับเงื่อนไขเดิม	X⊆Y และ Y⊆Z
2. สมมติข้อสรุปผิด	X⊈Z จึงมี a∈X ที่ a∉Z
3. เดินลูกศรแรก	เพราะ a∈X และ X⊆Y จึง a∈Y
4. เดินลูกศรที่สอง	เพราะ a∈Y และ Y⊆Z จึง a∈Z
5. ชี้จุดชน	a∈Z ขัดกับ a∉Z
6. เช็กกลับ	สมาชิกที่เป็นพยานให้ X⊈Z มีไม่ได้ จึง X⊆Z รวมกรณี X ว่างด้วย



③ พยาน 2 อยู่ใน X แต่อยู่นอก Z → $X \not\subseteq Z$

เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

ปฏิเสธ “ทุกตัวอยู่ใน Z” เป็น “ทุกตัวไม่อยู่ใน Z” แรงเกินไป ตัวอย่าง $X=\{1,2\}$, $Z=\{1\}$: $X \not\subseteq Z$ จริงเพราะ 2 หลุด แต่ 1 ยังอยู่ใน Z คำปฏิเสธต้องขอเพียงหนึ่งตัวที่หลุด

เช็กลิสต์ก่อนหยุด

① เก็บเงื่อนไขเซตย่อยทั้งสอง ② เลือกพยานหนึ่งตัวจากการปฏิเสธ ③ ตามสมาชิกเดิมตลอดทาง ④ ชี้เข้า Z/ไม่เข้า Z ของตัวเดิมแล้วหยุด

3.13 เงื่อนไขทั้งหมดจริงแล้ว ข้อสรุปหลุดได้ไหม

มีสองบรรทัดว่า “ถ้าไฟเขียวแล้วประตูเปิด” และ “ไฟเขียว” เราจึงบอก “ประตูเปิด” ได้ แต่ถ้าบรรทัดที่สองเป็น “ประตูเปิด” อย่างเดียว ยังบอกไม่ได้ว่าไฟเขียว เพราะประตูอาจเปิดด้วยเหตุอื่น

ลองก่อนอ่านเฉลย

ถ้า p เป็นเท็จ q เป็นจริง เงื่อนไข p→q ยังจริงไหม? ถ้าจริง แปลว่า q จริงบังคับ p จริงหรือไม่?

เฉลย p→q ยังจริง จึงเห็นว่า q จริงไม่ได้บังคับ p จริง

การใช้ข้อความที่รับไว้หลายข้อเพื่อสรุปข้อความใหม่เรียก **การให้เหตุผลแบบนิรนัย (deductive reasoning)** ข้อที่รับไว้เรียก **เหตุ (premises)** ข้อที่ต้องตามมาเรียก **ข้อสรุป (conclusion)**

ข้ออ้างเหตุผล **สมเหตุสมผล (valid)** ถ้าไม่มีกรณีที่เหตุทุกข้อจริงแต่ข้อสรุปเท็จ เราจึงตรวจ $(p_1 \land \cdots \land p_n) \to q$ ว่าจริงทุกแถว ไม่จำเป็นต้องให้เหตุเป็นจริงทุกแถว



ตัวอย่าง 2.12: จาก p→q และ p สรุป q

p	q	p→q	เหตุรวม (p→q)∧p	เหตุรวม→q
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. สมมติเหตุจริง	รับ p→q จริง และ p จริง
2. ลองให้ข้อสรุปเท็จ	ถ้า q เท็จ จะเป็น p จริง→q เท็จ
3. ตรวจลูกศร	แถวนั้นทำให้ p→q เท็จ ขัดกับเหตุแรก
4. เช็กกลับ	จึง q ต้องจริงทุกครั้งที่เหตุทั้งสองจริง ตรงกับแถวเหตุรวม T เพียงแถวเดียว



กฎนี้เรียก **modus ponens** หรือกฎยืนยันเหตุ อีกกฎคือ **modus tollens**: จาก p→q และ ¬q สรุป ¬p เพราะถ้า p จริง q ต้องจริง ซึ่งชน ¬q

เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

จาก p→q และ q สรุป p เรียกการยืนยันผลอย่างผิด ๆ แถว p=F,q=T ทำให้เหตุทั้งสองจริง แต่ p ที่สรุปเท็จ มีเพียงแถวเดียวก็หักล้างความสมเหตุสมผลได้

เช็กลิสต์ก่อนหยุด

① แยกเหตุจากข้อสรุป ② สร้างทุกแถว ③ สนใจแถวที่เหตุทั้งหมด T ④ ถ้าข้อสรุป F แม้แถวเดียวให้หยุด: invalid ⑤ ถ้าไม่มีจึง valid

3.14 เปลี่ยนคำเชื่อมหนึ่งตัว ผลเปลี่ยนได้

ให้ p แทน “อ่านจริงจัง” และ q แทน “ได้ผลการเรียน A” ข้อความ “p ก็ต่อเมื่อ q” บังคับให้ p,q มีค่าเหมือนกัน ส่วน “p หรือ q” ห้ามทั้งคู่เป็นเท็จ

ลองก่อนอ่านเฉลย

ถ้า p,q ต้องเหมือนกัน และอย่างน้อยหนึ่งตัวจริง ค่าทั้งคู่เป็นอะไร?

เฉลย ต้องเป็น T,T เพราะ F,F ผิดเงื่อนไขอย่างน้อยหนึ่งตัวจริง

ตัวอย่าง 2.13 และส่วนต่อเนื่อง: ตรวจทีละข้อจากเหตุที่ระบุ คำว่า p↔q หมายถึงสองตัวมีค่าความจริงตรงกัน

ข้อ	เหตุ	ข้อสรุป	แถวที่เหตุทุกข้อจริง	ผล
A	p→q, q	p	TT, FT	ไม่สมเหตุสมผล: FT หลุด
B	p↔q, p∨q	p	TT	สมเหตุสมผล
C	p↔q, p∨¬q	p	TT, FF	ไม่สมเหตุสมผล: FF หลุด
D	p↔q, p∨¬q	¬p∨q	TT, FF	สมเหตุสมผล

TT TF FT FF

① p↔q เก็บ TT, FF

② p ∨ q เก็บ TT; p∨¬q เก็บ TT, FF

③ อ่านข้อสรุปในแถวที่ยังเหลือ

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. ข้อ A: สร้างแถวหลุด	ให้ p=F,q=T จะได้ p→q=T และ q=T แต่ p=F จึง invalid
2. ข้อ B: กรองด้วย ↔	เหลือ TT หรือ FF เพราะ p,q ต้องตรงกัน
3. ข้อ B: กรองด้วย ∨	FF ทำให้ p∨q=F จึงเหลือ TT ซึ่ง p=T จึง valid
4. ข้อ C: ตรวจ FF	p↔q=T และ p∨¬q=F∨T=T แต่ p=F จึง invalid

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
5. ข้อ D: กรณี TT	¬p∨q=F∨T=T
6. ข้อ D: กรณี FF	¬p∨q=T∨F=T จึง valid เพราะสองแถวที่เหตุจริงผ่านหมด
7. เช็กกลับ	ไม่ใช้แถวที่เหตุเท็จมาหักล้าง และไม่ทิ้งแถว FF เพียงเพราะตัวอักษรดูเป็นลบ

แถว	p↔q	p∨q	p∨¬q	
TT	T	T	T	
FF	T	F	T	← แถวที่เปลี่ยน

เปลี่ยน q เป็น ¬q ทำให้ FF รอด จึงต้องตรวจข้อสรุปในแถวนี้ด้วย

เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

ถ้าในข้อ C เห็น ↔ แล้วนึกว่าทั้งคู่ต้องจริง จะลืม FF ซึ่งทำให้ ↔ จริงด้วย ต้องจำว่า ↔ ขอ “เหมือนกัน” ไม่ได้ขอ “จริงเหมือนกัน”

เช็กลิสต์ก่อนหยุด

① เขียนคำเชื่อมตรงต้นฉบับ ② ไล่ TT,TF,FT,FF ③ กรองเหตุทุกข้อพร้อมกัน ④ อ่านข้อสรุปเฉพาะแถวเหลือ ⑤ ระบุแถวหลุดเมื่อ invalid

3.15 ตัดทางเลือกตรงข้าม แล้วเก็บทางที่เหลือ

เรารู้ว่า “p หรือ q” และ “ไม่ p หรือ r” ถ้า p ไม่เกิด ข้อแรกบังคับ q ถ้า p เกิด ข้อที่สองบังคับ r ไม่ว่า p จะเป็นอย่างไร อย่างน้อย q หรือ r ต้องเกิด

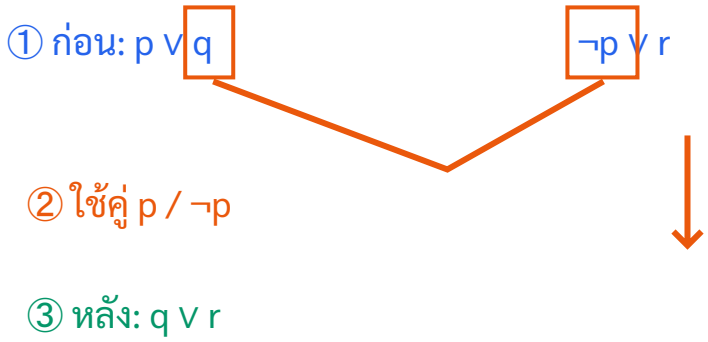
ลองก่อนอ่านเฉลย

จาก p∨q กับ ¬p∨r เราสรุป q อย่างเดียวได้ไหม?

เฉลย ไม่ได้ เช่น p=T,q=F,r=T ทำให้สองเหตุจริงแต่ q เท็จ สิ่งที่รับรองได้คือ q∨r

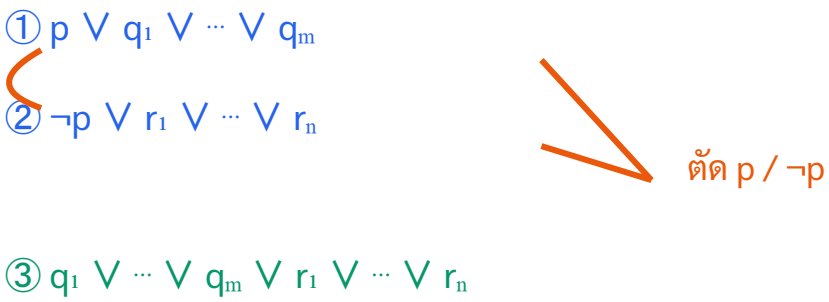
ข้อความที่เชื่อมตัวอักษรหรือคำปฏิเสธของตัวอักษรด้วย “หรือ” เท่านั้น เรียก **คลอส (clause)** แต่ละตัว เช่น p หรือ ¬p เรียก **ลิเทอรัล (literal)** คลอสมีตัวเดียวก็ได้ เช่น p

กฎ **เรโซลูชัน (resolution)** ใช้คลอสสองอันที่มีคู่ p กับ ¬p แล้วรวมส่วนที่เหลือ: จาก P∨Q และ ¬P∨R ได้ Q∨R โดย Q,R อาจเป็นหลายลิเทอรัลก็ได้



บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. รับเหตุ	p∨q และ ¬p∨r เป็นจริง
2. กรณี p=F	p∨q จะจริงได้ต้อง q=T จึง q∨r=T
3. กรณี p=T	¬p∨r จะจริงได้ต้อง r=T จึง q∨r=T
4. รวมกรณี	p มีเพียง T,F จึง q∨r จริงทุกกรณีที่เหตุจริง
5. เช็กกลับ	ข้อสรุปคือคลอสรวมส่วนที่เหลือ ไม่ได้เลือกส่วนใดส่วนหนึ่งเอง

รูปย่อยที่ใช้บ่อย: จาก p กับ ¬p∨r ได้ r; จาก p∨q กับ ¬p ได้ q ถ้าจาก p กับ ¬p จะไม่เหลือทางเลือกเลย เรียก คลอสว่าง หมายถึงข้อขัดแย้ง



เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

จาก p∨q กับ ¬p∨¬q ถ้าลบทั้ง p/¬p และ q/¬q พร้อมกันจะได้คลอสว่างอย่างผิด ๆ เพราะ p=T,q=F ทำให้สองเหตุจริงอยู่แล้ว กฎหนึ่งครั้งเลือกคู่ตรงข้ามเพียงหนึ่งคู่; ตัด p แล้วเหลือ q∨¬q ซึ่งจริงเสมอ

เช็กลิสต์ก่อนหยุด

① เปลี่ยนให้อยู่ในรูปหรือ ② เลือกคลอสสองอัน ③ วงคู่ตรงข้ามหนึ่งคู่ ④ รวมลิเทอรัลที่เหลือทั้งหมด ⑤ เขียนคลอสใหม่พร้อมเลขคลอสต้นทาง

3.16 ต่อคลอสสองครั้ง: อย่ากระโดดข้ามผลกลาง

สมมติเราได้ “b หรือ c” แล้วมีอีกเงื่อนไขว่า “ไม่ c หรือ d” เราตัดทาง c/ไม่ c ได้เหมือนครั้งก่อน ผลใหม่คือ “b หรือ d” จุดสำคัญคือคลอสที่เพิ่งได้กลายเป็นของที่ใช้ในก้าวถัดไปได้

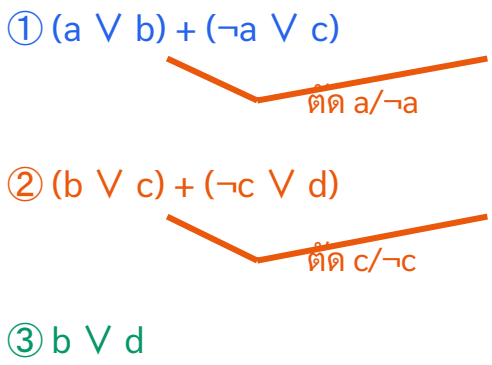
ลองก่อนอ่านเฉลย

จาก a∨b กับ ¬a∨c ผลกลางเป็น b∨c หรือ b∨d?

เฉลย เป็น b∨c ก่อน d ยังไม่อยู่ในสองคลอสที่กำลังใช้ จึงยังสร้าง d ไม่ได้

ตัวอย่าง 3.1: จาก (1) a∨b, (2) ¬a∨c, (3) ¬c∨d สรุป b∨d

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. รับเหตุ	(1) a∨b, (2) ¬a∨c, (3) ¬c∨d
2. ตัด a/¬a	ใช้ (1),(2) ได้ (4) b∨c
3. ตัด c/¬c	ใช้ (4),(3) ได้ (5) b∨d
4. เช็กกลับ	(5) ตรงข้อสรุปที่ต้องการ ทุกคลอสใหม่อ้างคลอสที่มีอยู่ก่อน จึง valid



ตัวอย่าง 3.2: เปลี่ยนเหตุแรกเป็น a แล้วต้องสรุป d ทาง b หายไป เราจึงได้คำตอบที่เจาะจงขึ้น

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. รับเหตุ	(1) a, (2) ¬a∨c, (3) ¬c∨d
2. ตัด a/¬a	ใช้ (1),(2) ได้ (4) c
3. ตัด c/¬c	ใช้ (4),(3) ได้ (5) d
4. เช็กกลับ	d เป็นข้อสรุปตรงเป้าหมาย เหตุแรกไม่มี b ให้ติดมาด้วย

① a + (¬a ∨ c) → c

↓

② c + (¬c ∨ d) → d

เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

หยิบ (1) a∨b กับ (3) ¬c∨d มาตัด a กับ ¬c ไม่ได้ เพราะ a และ c เป็นคนละตัว ต้องมีตัวอักษรเดียวกันและเครื่องหมายตรงข้ามกัน

เช็กลิสต์ก่อนหยุด

① เขียนเลขทุกคลอส ② เลือกคู่ตรงข้ามจริง ③ บันทึกผลกลาง ④ ใช้ผลกลางต่อได้ ⑤ หยุดทันทีเมื่อได้คลอสเป้าหมาย ไม่ต้องใช้ทุกคลอสถ้าไม่จำเป็น

3.17 ก่อนตัด ต้องทำให้เงื่อนไขเป็นคลอส

ข้อความ “a หรือ (ไม่ b และ c)” บอกสองข้อพร้อมกัน: a หรือไม่ b และ a หรือ c เพราะถ้า a ไม่จริง ทั้งไม่ b และ c ต้องช่วยรับให้ครบ

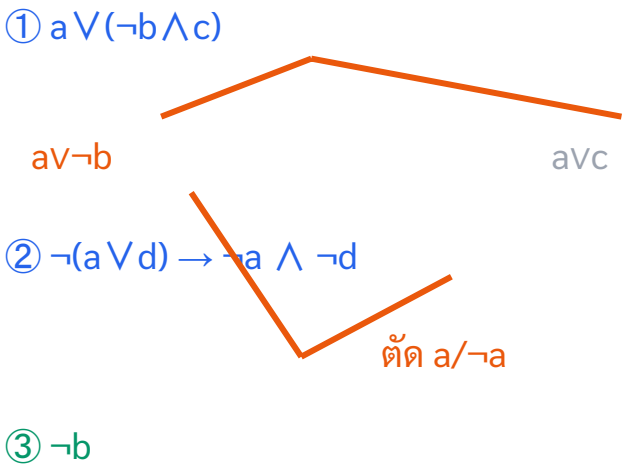
ลองก่อนอ่านเฉลย

ถ้า a=F แล้ว a∨(¬b∧c) จริง เรารู้ ¬b ไหม? แล้วรู้ c ไหม?

เฉลย รู้ทั้งสอง ถ้าเลือกเก็บเพียงด้านเดียวจะสูญเสียข้อมูลอีกด้าน

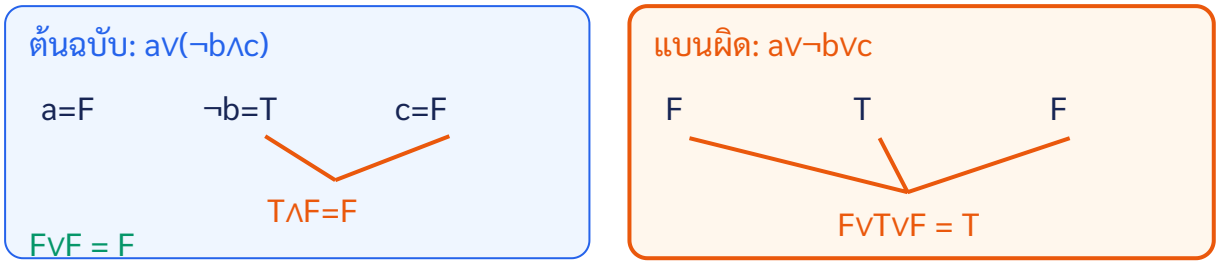
ตัวอย่าง 3.3: จาก a∨(¬b∧c) และ ¬(a∨d) พิสูจน์ ¬b ต้องเปิด “และ” กับปฏิเสธก่อนใช้เรโซลูชัน

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. รับเหตุแรก	a∨(¬b∧c)
2. แจกแจงหรือเหนือและ	เท่ากับ (a∨¬b)∧(a∨c)
3. แยกเหตุที่เชื่อมด้วยและ	ได้ (1) a∨¬b กับ (2) a∨c
4. รับเหตุที่สอง	¬(a∨d)
5. กระจายคำปฏิเสธ	เท่ากับ ¬a∧¬d
6. แยกเหตุ	ได้ (3) ¬a กับ (4) ¬d
7. ตัด a/¬a	ใช้ (1),(3) ได้ (5) ¬b
8. เช็กกลับ	ตรงข้อสรุป ¬b ส่วน (2),(4) เก็บไว้แต่ไม่จำเป็นต่อเส้นทางนี้



เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

จาก a∨(¬b∧c) เขียนเป็น a∨¬b∨c ไม่สมมูล: ให้ a=F,b=F,c=F จะได้ต้นฉบับ F∨(T∧F)=F แต่แบบที่ผิด F∨T∨F=T การลบวงเล็บโดยไม่สนคำเชื่อมทำให้เงื่อนไขอ่อนลง



ค่าเดียวกันให้ผล F กับ T ต่างกัน จึงห้ามลบโครงต้นไม้ของวงเล็บ

เช็กลิสต์ก่อนหยุด

① เปิด → และ ↔ ถ้ามี ② ผลัก ¬ เข้าไปถึงตัวอักษร ③ แจกแจง ∨ เหนือ ∧ ④ แยกคลอสที่เชื่อมด้วย ∧ ⑤ ทำเรโซลูชันแล้วตรวจข้อสรุป

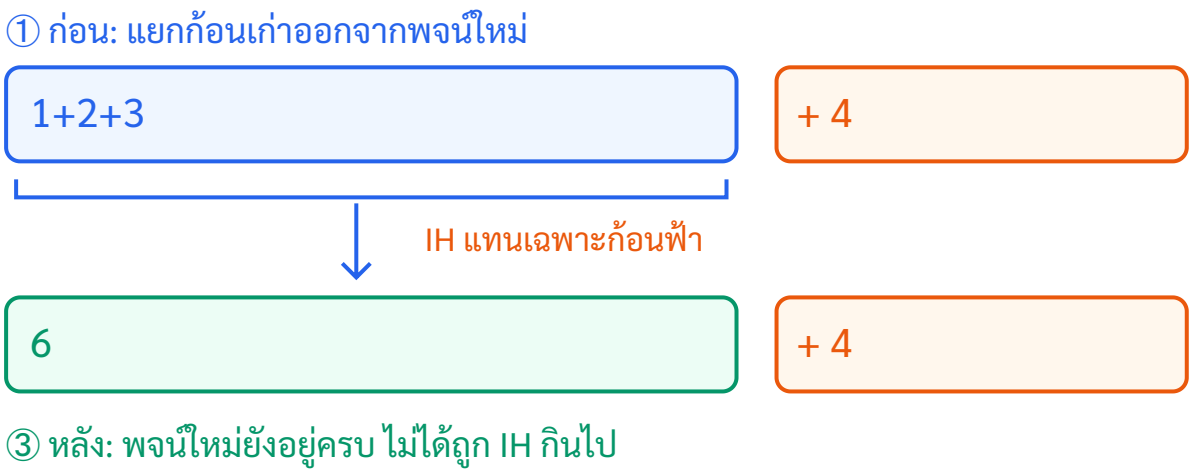
3.18 จากสามก้อนไปสี่ก้อน: เห็นสิ่งที่เพิ่มก่อน

ผลบวก 1+2+3 เท่ากับ 6 ถ้าจะหาผลบวก 1+2+3+4 เราไม่ต้องเริ่มบวกใหม่ทั้งหมด เก็บก้อนเดิมที่ได้ 6 แล้วเติม 4 ได้ 10

ลองก่อนอ่านเฉลย

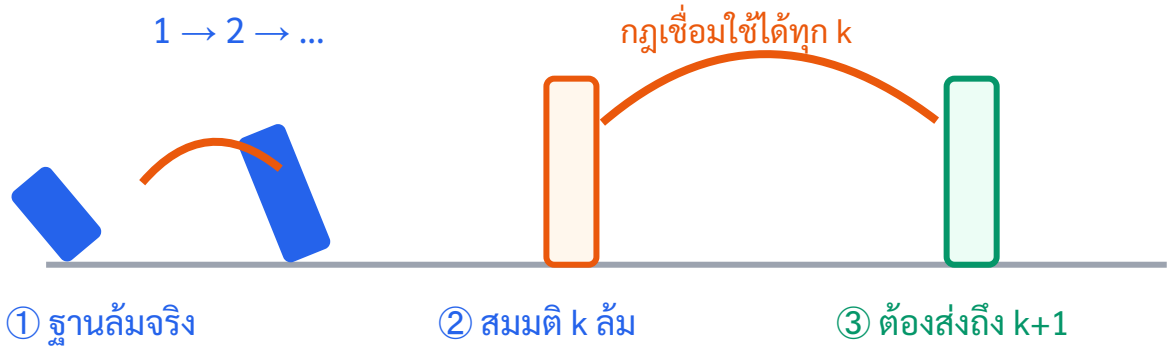
ใน 1+2+3+4 ส่วนไหนเป็นของเก่าที่เรารู้แล้ว และส่วนไหนเพิ่งเพิ่ม? ลองวงด้วยนิ้วก่อนอ่าน

เฉลย ของเก่าคือ 1+2+3 ส่วนที่เพิ่มคือ +4 เราแทนได้เฉพาะของเก่าด้วย 6 จึงได้ 6+4=10



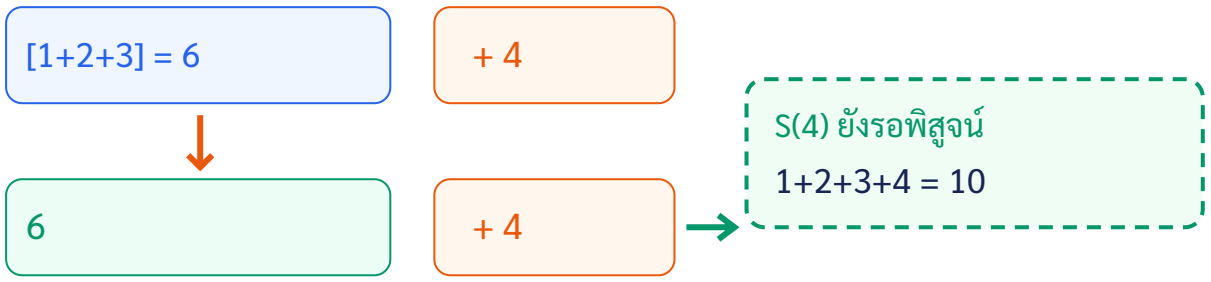
นี่เป็นภาพตั้งต้นของ **อุปนัยทางคณิตศาสตร์ (mathematical induction)** เราจะพิสูจน์ข้อความสำหรับจำนวนเต็มเรียงต่อกัน โดยทำสองงานที่ขาดอย่างใดอย่างหนึ่งไม่ได้

งานแรก: ให้ข้อความที่ตัวเริ่มต้นจริง งานที่สอง: สร้างสะพานว่า ถ้าข้อความที่จำนวนหนึ่งจริง ข้อความที่จำนวนถัดไปต้องจริงด้วย สะพานต้องใช้ได้ไม่ว่าจำนวนนั้นจะเป็นตัวไหนในช่วงที่กำหนด



บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. ฐานในภาพเล็ก	1=1(1+1)/2 จึงข้อความสำหรับ n=1 จริง

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
2. สะพานที่ต้องสร้าง	ถ้าสูตรใช้ได้ที่ k ต้องแสดงว่าใช้ได้ที่ k+1
3. ผลของสองงานร่วมกัน	ฐานให้เริ่มที่ 1; สะพานส่งจาก 1 ไป 2 จาก 2 ไป 3 ต่อไปได้ทุกจำนวนเต็มบวก
4. เช็กกลับ	การตรวจ 3→4 เป็นภาพให้เข้าใจกลไก ส่วนการพิสูจน์จริงต้องใช้ k ใด ๆ ไม่ใช่เลข 3 ตัวเดียว



เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

ลอง n=1,2,3 แล้วสรุปทุก n ไม่ใช่อุปนัย ตัวอย่างสูตรที่ดัดแปลงเป็น n(n+1)/2+(n−1)(n−2)(n−3) ให้ค่าเหมือนผลบวกที่ 1,2,3 แต่ที่ n=4 ได้ 16 แทน 10 การลองผ่านหลายตัวจึงยังอาจพลาดตัวถัดไป

เช็กลิสต์ก่อนหยุด

① ระบุจำนวนเริ่มต้น ② ตรวจฐานจริง ③ ตั้ง k ใด ๆ ในช่วง ④ สร้างสะพาน k→k+1 ด้วยเหตุผล ⑤ จบด้วยสองงานร่วมกัน ไม่ใช่จำนวนตัวอย่างที่ลอง

3.19 Assume, IH, Prove: สามป้ายนี้ทำงานคนละอย่าง

นึกว่ามีบัตรเขียนว่า “ผลบวกถึงช่อง k มีค่า k(k+1)/2” บัตรนี้ให้ยืมเฉพาะตอนสร้างสะพาน คุณหยิบบัตรไปแทนก้อน “ผลบวกถึง k” ได้ แต่บัตรไม่ได้เขียนคำตอบถึง k+1 ไว้ให้

ลองก่อนอ่านเฉลย

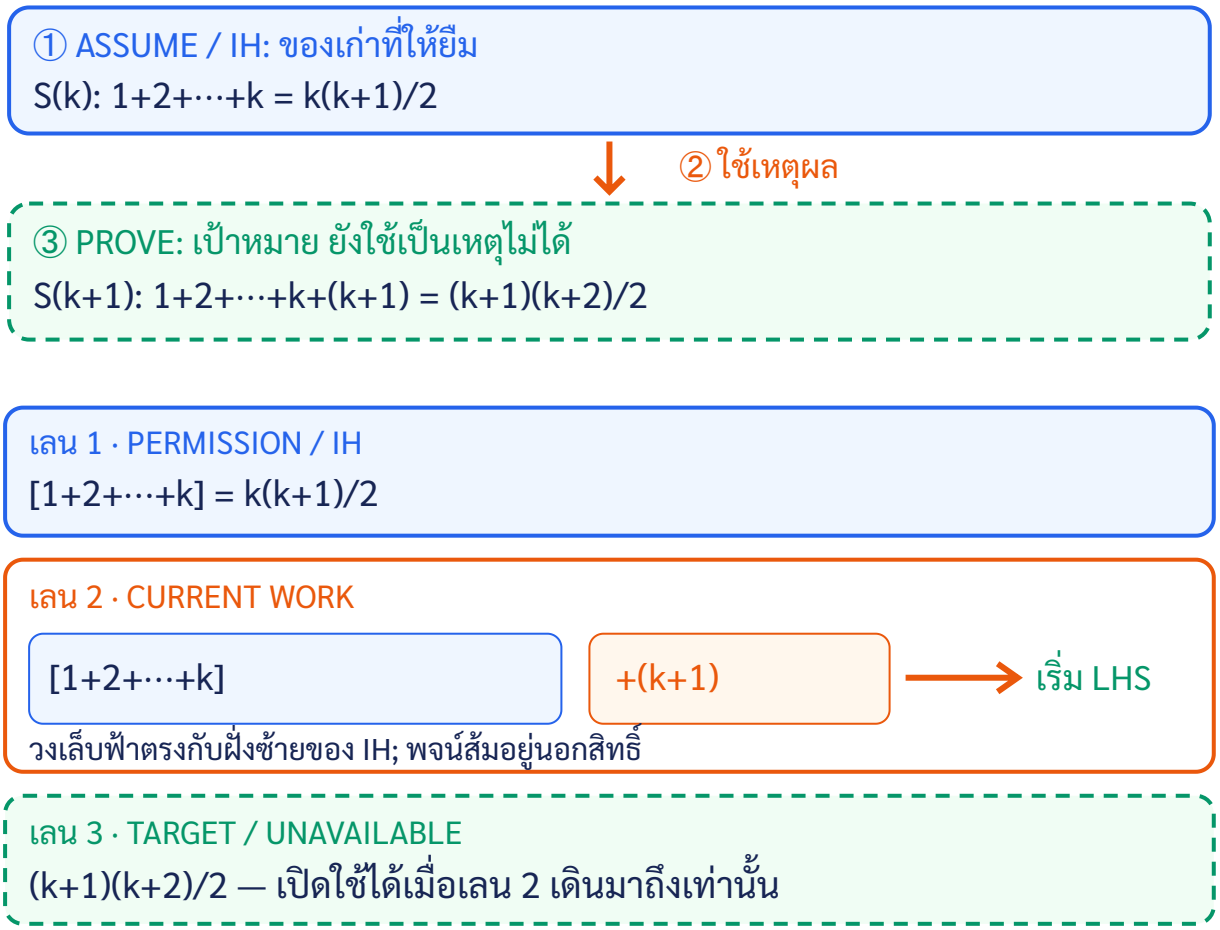
ถ้าบัตรอนุญาตแทน 1+2+⋯+k เราแทน 1+2+⋯+k+(k+1) ทั้งหมดได้ทันทีไหม?

เฉลย ไม่ได้ ก้อนนั้นยาวกว่าบัตรหนึ่งพจน์ ต้องแยก +(k+1) ออกก่อน แล้วแทนเฉพาะก้อนถึง k

Assume แปลว่า “สมมติให้ข้อความนี้จริงในขั้นที่กำลังทำ” สำหรับอุปนัย เราสมมติ S(k) เพื่อพิสูจน์ข้อความแบบมีเงื่อนไข S(k)→S(k+1)

IH (Induction Hypothesis) คือ “สมมติฐานอุปนัย” เป็นชื่อเรียก S(k) ที่กำลังยืมใช้ ไม่ใช่ข้อพิสูจน์ว่าทุก S(n) จริงแล้ว

Prove / Show แปลว่า “จงแสดงให้ได้” คือเป้าหมาย S(k+1) ที่ยังไม่อนุญาตให้ใช้เป็นเหตุ บนภาพกรอบเส้นประสีเขียวหมายถึงยังรอพิสูจน์ เมื่อเดินถึงแล้วจึงเปลี่ยนเป็นข้อสรุปได้



k ใด ๆ แต่คงที่ หมายถึงเราไม่ได้เลือก k=3 หรือ k=10 เป็นพิเศษ เมื่อเลือกแทนจำนวนที่ไม่ระบุค่าตัวหนึ่งแล้ว ใช้ k ตัวเดิมตลอดข้อพิสูจน์ เงื่อนไขเดียวคือ k อยู่ในช่วง เช่น $k \geq 1$

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. กำหนดข้อความ	S(n): $1+2+\cdots+n=n(n+1)/2$
2. เลือกจุดเก่า	ให้ k เป็นจำนวนเต็มใด ๆ ที่ $k \geq 1$
3. ยืม IH	สมมติ S(k): $1+2+\cdots+k=k(k+1)/2$
4. เขียนจุดใหม่	ต้องพิสูจน์ S(k+1): $1+\cdots+k+(k+1)=(k+1)((k+1)+1)/2$
5. ยุบเฉพาะชื่อเป้าหมาย	$((k+1)+1)=k+2$ จึงด้านขวาเป้าหมายคือ $(k+1)(k+2)/2$
6. เช็กกลับ	บรรทัด 4 เป็นสิ่งที่ต้องไปถึง ไม่ใช่สิ่งที่อ้างว่าจริงแล้ว

① S(n): $1+\cdots+n = n(n+1)/2$

② $n \to k$

IH: จบที่ k

③ $n \to k+1$

เป้าหมาย: จบ k+1

บัตรคนละใบ — ใบขวายังห้ามยืมใช้เป็นเหตุ

เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

เขียน “สมมติ S(n) จริงทุก n แล้วได้ S(k+1)” คือหยิบทั้งข้อสรุปมารับไว้ตั้งแต่ต้น ไม่ได้สร้างสะพานใหม่ เราให้ยืมเฉพาะ S(k) ไม่ใช่ S(k+1) หรือทุก S(n)

เช็กลิสต์ก่อนหยุด

① เขียน S(n) ให้ชัด ② แทน n ด้วย k ทุกตำแหน่งเพื่อได้ IH ③ แทน n ด้วย k+1 ทุกตำแหน่งเพื่อได้เป้าหมาย ④ ทำเครื่องหมายว่าเป้าหมายยังใช้ไม่ได้

3.20 ฐานกับสะพาน: ทำไมต้องมีครบทั้งคู่

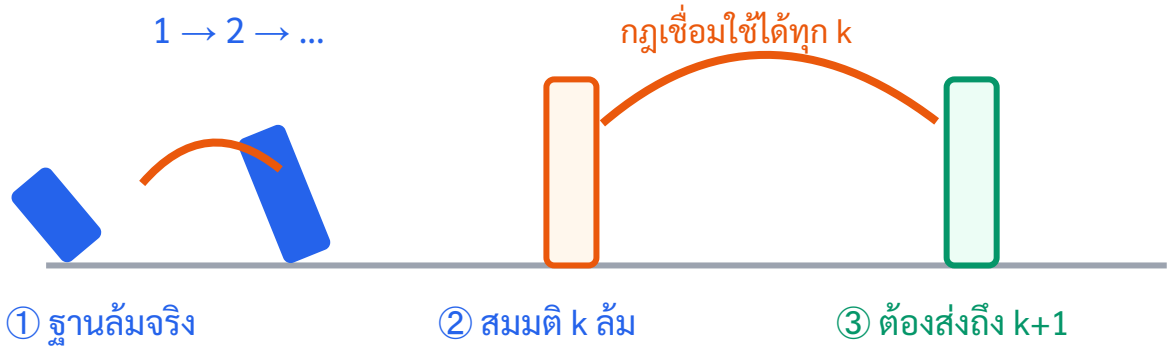
แถวโดมิโนอาจวางชิดกันจนตัวหนึ่งล้มแล้วชนตัวถัดไปได้แน่ แต่ถ้าไม่ผลักตัวแรก ก็ไม่มีอะไรเริ่ม อีกแถวอาจผลักตัวแรกแล้ว แต่เว้นช่องว่างจนชนตัวที่สองไม่ถึง ตัวแรกก็ล้มอยู่ตัวเดียว

ลองก่อนอ่านเฉลย

“ฐานผ่าน” อย่างเดียวพอไหม? “สะพานผ่าน” อย่างเดียวพอไหม?

เฉลย ไม่พอทั้งสองแบบ ฐานเริ่มการส่งต่อ ส่วนสะพานรับรองว่าจะไม่หยุดกลางทาง

ขั้นฐาน (basis step) ตรวจ $S(n_0)$ โดยคำนวณจริง ห้ามใช้ IH เพราะยังไม่ได้เข้าสู่ขั้นสมมติ **ขั้นอุปนัย (inductive step)** พิสูจน์ $S(k) \to S(k+1)$ สำหรับ $k \geq n_0$



บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. ตัวอย่างมีสะพานแต่ไม่มีฐาน	ให้ S(n): n=n+1 สำหรับ n≥1
2. รับ S(k) ชั่วคราว	สมมติ k=k+1
3. สร้างสะพาน	บวก 1 สองข้างได้ k+1=k+2 ซึ่งเป็น S(k+1)
4. ตรวจฐาน	S(1) คือ 1=2 ซึ่งเท็จ จึงพิสูจน์ทุก n ไม่ได้ แม้สะพานแบบมีเงื่อนไขจะทำได้
5. ตัวอย่างมีฐานแต่ไม่มีสะพาน	ให้ T(n): n≤3 สำหรับ n≥1; T(1) จริง
6. ตรวจรอยขาด	T(3) จริง แต่ T(4) เท็จ จึงสะพาน 3→4 ขาด
7. เช็กกลับ	ขาดฐานก็เริ่มไม่ได้ ขาดสะพานก็อาจไปไม่ครบ ข้อพิสูจน์ต้องระบุทั้งสองงาน

① ไม่มีฐาน: 1=2 ✗



สะพานดี แต่ไม่มีจุดเริ่ม

② ไม่มีสะพาน: 3≤3 ✓ → 4≤3 ✗

ช่องว่าง

③ ต้องมี: $S(n_0)$ และทุกก้าว $S(k)\to S(k+1)$

เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

ถ้าโจทย์เริ่ม $n\geq 0$ แต่ตรวจฐาน $n=1$ อย่างเดียว จะยังไม่มีหลักฐานสำหรับ $n=0$ ต้องอ่านขอบเขตก่อนเสมอ อุปนัยเริ่มจากค่าไหนก็รับรองตั้งแต่ค่านั้นต่อไป

เช็กลิสต์ก่อนหยุด

① ขีดเส้นใต้ n_0 ② คำนวณฐานทั้งซ้ายและขวา ③ แยกขั้นอุปนัยต่างหาก ④ ตรวจ $k\geq n_0$ ⑤ สรุปขอบเขตตรงกับฐาน

3.21 ผลบวก 1 ถึง n: เตรียมฐาน, IH และเป้าหมาย

ผลบวก 1+2+3+4=10 และ 4(4+1)/2=10 เป็นรูปสองแบบของจำนวนเดียวกัน เราจะพิสูจน์ว่าไม่ว่าแถวจะยาวเท่าไร ผลบวกถึง n เท่ากับ n(n+1)/2

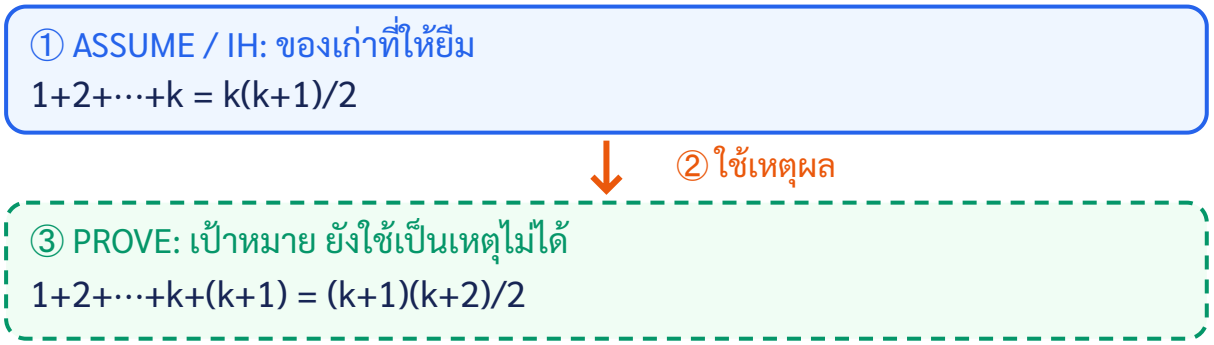
ลองก่อนอ่านเฉลย

ถ้าสูตรคือ n(n+1)/2 เมื่อเปลี่ยน n เป็น k+1 ต้องได้ (k+1)(k+1)/2 หรือ (k+1)(k+2)/2?

เฉลย ต้องได้ (k+1)((k+1)+1)/2=(k+1)(k+2)/2 เพราะแทน n ทุกตำแหน่ง ไม่ใช่เพิ่มเฉพาะตัวหน้า

ตัวอย่าง 3.4: พิสูจน์ $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ สำหรับจำนวนเต็ม n≥1 เราเริ่มจากฐานก่อนใช้คำว่า IH

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. ระบุ S(n)	S(n): 1+2+⋯+n=n(n+1)/2
2. ฐาน: ซ้าย	เมื่อ n=1 ด้านซ้ายมีเพียง 1
3. ฐาน: ขวา	1(1+1)/2=1·2/2=1
4. ฐาน: เปรียบเทียบ	ซ้าย=ขวา จึง S(1) จริง
5. เลือก k	ให้ k เป็นจำนวนเต็มใด ๆ ที่ k≥1
6. ASSUME / IH	สมมติ 1+2+⋯+k=k(k+1)/2
7. PROVE	ต้องแสดง 1+2+⋯+k+(k+1)=(k+1)(k+2)/2



① สูตรเดิม n(n+1)/2

↓

② แทน n ทุกตัว: (k+1)((k+1)+1)/2

↓

③ เป้าหมาย: (k+1)(k+2)/2

เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

เขียนเป้าหมายเป็น k(k+1)/2 คือยังใช้สูตรถึง k ไม่ใช่ถึง k+1 ลอง k=3: ของเก่าเท่ากับ 6 แต่ผลบวกใหม่ 1+2+3+4=10 เราจึงตรวจจับเป้าหมายผิดได้ตั้งแต่ยังไม่เริ่มพิสูจน์

เช็กลิสต์ก่อนหยุด

① ฐาน n=1 ผ่านทั้งสองข้าง ② k คงที่แต่ไม่เลือกค่าพิเศษ ③ IH มีผลบวกถึง k เท่านั้น ④ เป้าหมายถึง k+1 และขวามี k+2 ⑤ ตอนนี้ยังห้ามอ้างว่าเป้าหมายจริง

3.22 ใช้ IH ตรงไหน: วงก้อนก่อนแทน

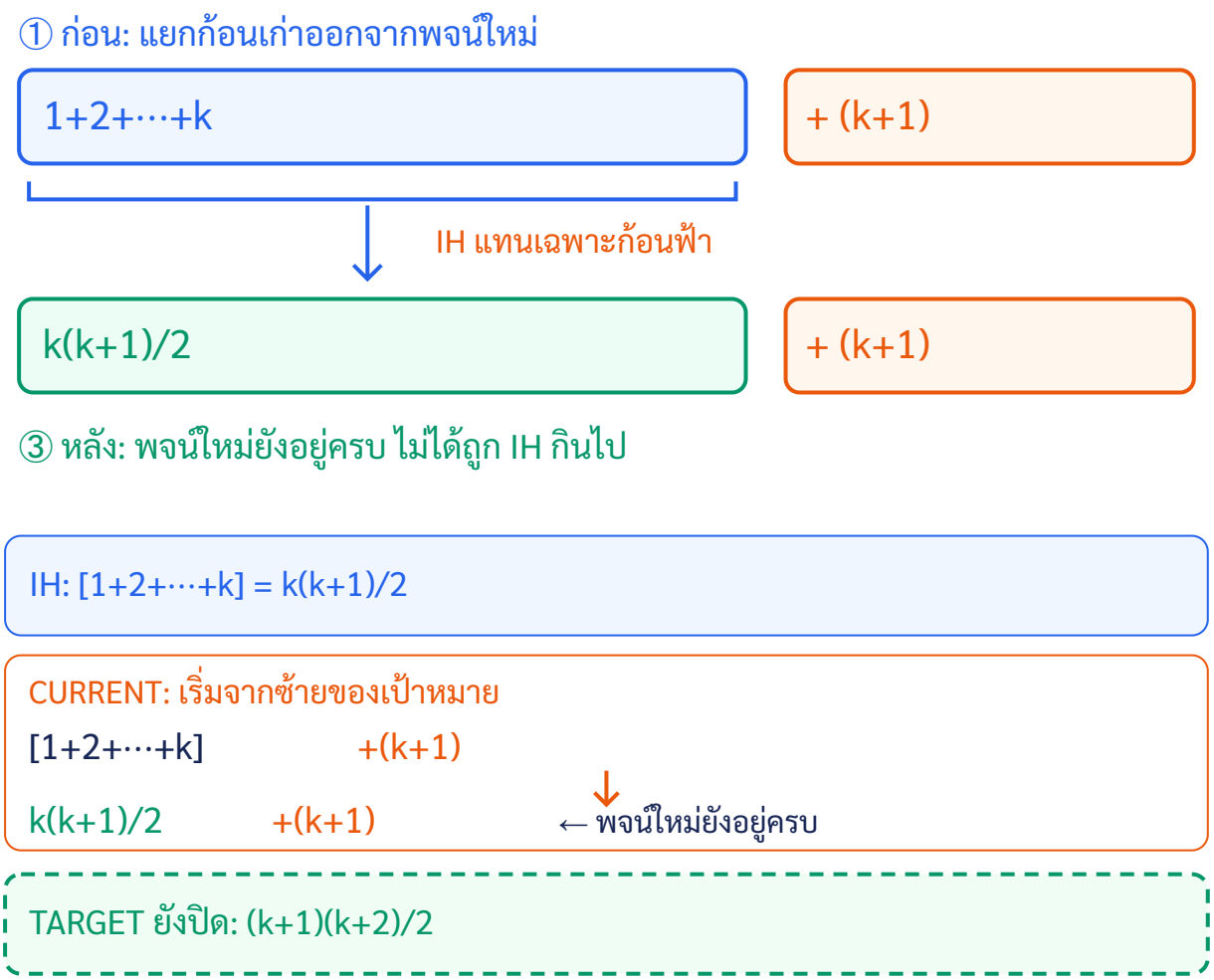
กลับไปภาพ 1+2+3+4 เรารู้ 1+2+3=6 จึงแทนเฉพาะสามพจน์แรกด้วย 6 ส่วน +4 ยังอยู่ที่เดิม คราวนี้เปลี่ยน “สาม” เป็น k และ “สี่” เป็น k+1 กลไกไม่เปลี่ยน

ลองก่อนอ่านเฉลย

ถ้าเขียน LHS=1+2+⋯+k+(k+1) แล้วขีดวงก้อนที่จะใช้ IH วงเล็บควรจบตรงไหน?

เฉลย ต้องจบหลัง +k ก่อนพจน์ +(k+1) เพราะ IH พูดถึงผลบวกถึง k

LHS (left-hand side) แปลว่าด้านซ้ายของสมการ เราเริ่มจากด้านซ้ายของเป้าหมายแล้วค่อยเปลี่ยนรูปไปหาด้านขวา ไม่สมมติว่าสองข้างเท่ากันก่อน



บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. เริ่มจากของที่จะคำนวณ	LHS ของ S(k+1) = 1+2+⋯+k+(k+1)
2. แยกก้อนเก่า	=[1+2+⋯+k]+(k+1)

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
3. ใช้ IH เพียงครั้งนี้	=k(k+1)/2+(k+1)
4. อธิบายสิทธิ์ที่ใช้	วงเล็บเดิมตรงกับด้านซ้ายใน IH ทุกพจน์ จึงแทนด้วยด้านขวาใน IH ได้
5. เช็กกลับระหว่างทาง	ยังมี +(k+1) ครบ ไม่ได้ทำให้พจน์ใหม่หาย และยังไม่อ้างสูตรเป้าหมาย

① ตัวอย่าง k=3: [1+2+3]+4

↓

② ใช้ IH เฉพาะวงเล็บ: 3(3+1)/2+4

↓

③ ได้ 6+4=10 ไม่ใช่ 6

เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

ถ้าแทนทั้ง 1+2+⋯+k+(k+1) ด้วย k(k+1)/2 จะทำพจน์ใหม่หาย ลอง k=3 จะพูดผิดว่า 10=6 ข้อผิดพลาดอยู่ที่วงเล็บกว้างเกินสิทธิ์ของ IH

ทำไมใช้สิ่งที่สมมติแล้วยังเรียกพิสูจน์? เพราะตอนนี้เรากำลังพิสูจน์ประโยค “**ถ้า**สูตรเก่าจริง **แล้ว**สูตรใหม่จริง” ภายในประโยคถ้า–แล้ว เรายืมส่วน “ถ้า” มาใช้ได้เหมือนวิธีพิสูจน์ตรง ฐานจะเป็นตัวเปิดใช้สะพานนี้ภายหลัง

เช็กลิสต์ก่อนหยุด

① เริ่มจาก LHS ของเป้าหมาย ② แยกส่วนถึง k ③ เทียบวงเล็บกับ IH แบบตัวต่อตัว ④ แทนเฉพาะวงเล็บ ⑤ เก็บพจน์ใหม่แล้วทำพีชคณิตต่อ

3.23 จากก้อนที่แทนแล้วไปถึงเป้าหมาย: ทีละการกระทำ

ตอนนี้เราอยู่ที่ k(k+1)/2+(k+1) ยังไม่ถึง (k+1)(k+2)/2 สิ่งที่ต้องทำคือทำส่วนให้เท่ากัน รวมเศษ แล้วดึงตัวประกอบที่ซ้ำกัน

ลองก่อนอ่านเฉลย

จำนวน (k+1) เขียนเป็นเศษส่วนที่มีส่วน 2 โดยค่าไม่เปลี่ยนได้อย่างไร?

เฉลย เขียนเป็น 2(k+1)/2 เพราะคูณทั้งเศษและส่วนด้วย 2

การจัดรูป ในช่วงนี้ใช้ความเท่ากันทั่วไป ไม่ใช่ใช้ IH อีก ทุกบรรทัดต้องคงค่าเดิมจนรูปตรงเป้าหมาย

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. ผลจาก IH	LHS=k(k+1)/2+(k+1)
2. ทำส่วนให้เท่ากัน	=k(k+1)/2+2(k+1)/2
3. รวมเศษส่วน	=[k(k+1)+2(k+1)]/2
4. ดึงตัวร่วม (k+1)	= (k+1)(k+2)/2
5. เทียบเป้าหมาย	ตรง RHS ของ S(k+1) จึง S(k+1) จริงภายใต้ IH
6. ปิดอุปนัย	S(1) จริง และ S(k)→S(k+1) สำหรับทุก k≥1 จึง S(n) จริงทุกจำนวนเต็ม n≥1
7. เช็กกลับ	n=4 ให้ 10=4·5/2=10 แต่หลักฐานสำหรับทุก n คือฐานพร้อมสะพาน ไม่ใช่การแทน 4

① k(k+1)/2 + (k+1)

↓

② k(k+1)/2 + 2(k+1)/2

↓

③ [k(k+1)+2(k+1)]/2

↓

④ (k+1)[k+2]/2

IH ใช้แล้วตรงก้าวแทน [1+2+⋯+k] เท่านั้น

CURRENT = (k+1)(k+2)/2 → TARGET ถึงแล้ว

ตอนนี้เท่านั้นที่กรอบเป้าหมายเลิกเป็นเส้นประและใช้ปิด S(k+1) ได้

① PROVE เดิม: (k+1)(k+2)/2
② ผลที่เดินถึง: (k+1)(k+2)/2

③ รูปตรงกันแล้ว → ปิดสะพาน S(k)→S(k+1)

เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

เขียน k(k+1)/2+(k+1)=[k(k+1)+(k+1)]/2 ผิด เพราะเราแบ่งพจน์ที่สองด้วย 2 เพิ่มเอง ที่ k=3 ด้านเดิม=10 แต่แบบผิด=(12+4)/2=8 ต้องคูณเศษของพจน์ใหม่ด้วย 2 ก่อน

เช็กลิสต์ก่อนหยุด

① ทุกเครื่องหมาย = มีเหตุผล ② ทำส่วนแล้วรักษาค่าเดิม ③ รูปสุดท้ายตรงเป้าหมาย ④ ระบุว่า S(k+1) จริงภายใต้ IH ⑤ อ้างฐานและสะพานก่อนสรุปทุก n

3.24 ผลคูณโตอย่างไร: เปลี่ยนจากเท่ากันเป็นไม่น้อยกว่า

1×2×3×4=24 ถ้าเพิ่มตัวถัดไป เราเอาของเก่า 24 ไปคูณ 5 ได้ 120 ส่วน 2×2×2=8 เพิ่มตัวถัดไปจะคูณแค่ 2 ได้ 16 ตัวคูณใหม่ของผลคูณแรกจึงไม่น้อยกว่าตัวคูณใหม่ของอีกฝั่ง

ลองก่อนอ่านเฉลย

จาก 1×2×⋯×k ไปเป็น 1×2×⋯×k×(k+1) เพิ่มด้วย “บวก k+1” หรือ “คูณ k+1”?

เฉลย เพิ่มด้วยคูณ k+1 เพราะของเดิมเป็นผลคูณ ไม่ใช่ผลบวก

$n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ อ่านว่า **แฟกทอเรียล (factorial)** สำหรับจำนวนเต็มบวก n; เช่น 4!=24 **ตัวอย่าง 3.5:** พิสูจน์ $n! \geq 2^{n-1}$ สำหรับจำนวนเต็ม n≥1

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. ระบุข้อความ	S(n): $n! \geq 2^{n-1}$
2. ฐานด้านซ้าย	เมื่อ n=1 ได้ 1!=1
3. ฐานด้านขวา	$2^{1-1}=2^0=1$
4. ฐานเปรียบเทียบ	1≥1 จริง จึง S(1) จริง
5. เลือก k และ IH	ให้ k≥1 เป็นจำนวนเต็มใด ๆ สมมติ $k! \geq 2^{k-1}$
6. เขียนเป้าหมาย	ต้องแสดง $(k+1)! \geq 2^{(k+1)-1}=2^k$

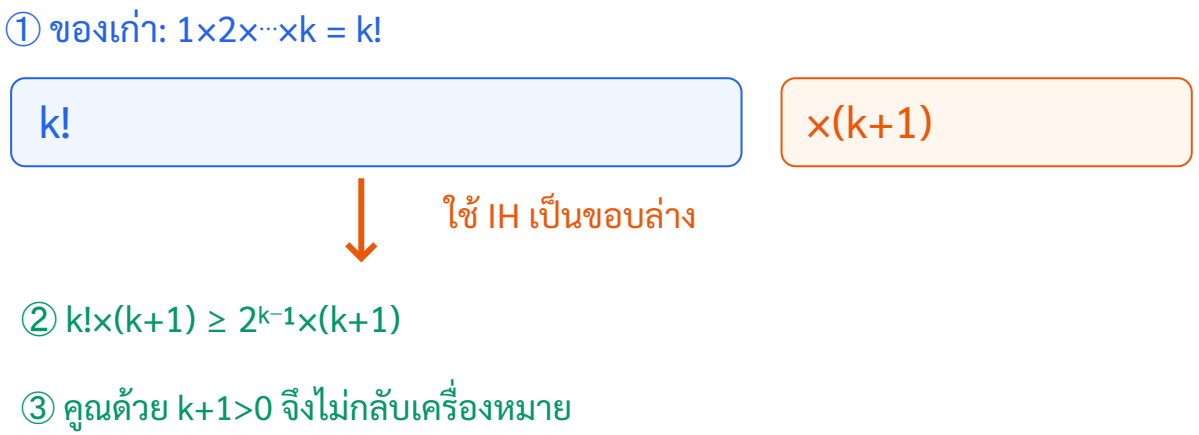
IH / สิทธิ์: $[k!] \geq 2^{k-1}$

CURRENT

$(k+1)! = [k!] \quad \cdot(k+1) \quad \rightarrow 2^{k-1} \cdot (k+1)$

TARGET ยังปิด: $(k+1)! \geq 2^k$





เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

ใช้สูตร (k+1)!=k!+(k+1) จะผิดเมื่อ k=3: ซ้าย 4!=24 แต่ขวา 3!+4=10 ต้องอ่านโครงสร้างว่าเป็นผลคูณตั้งแต่ต้น

เช็กลิสต์ก่อนหยุด

① เปิดความหมาย ! ② ฐานเริ่ม 1 ③ IH เป็นอสมการ ≥ ④ เป้าหมายเลขชี้กำลังเป็น k ⑤ แยกตัวคูณใหม่ออกก่อนใช้ IH

3.25 ใช้ IH กับอสมการ: ต้องตรวจเครื่องหมายตัวคูณ

จาก $6 \geq 4$ ถ้าคูณทั้งสองข้างด้วย 4 ได้ $24 \geq 16$ แต่ถ้าคูณด้วย -1 จะได้ $-6 \leq -4$ เครื่องหมายต้องกลับ เราจึงต้องดูว่าตัวที่คูณเป็นบวกก่อนใช้ IH

ลองก่อนอ่านเฉลย

ในขั้นอุปนัยนี้ $k \geq 1$ แล้ว $k+1$ เป็นบวกไหม และอย่างน้อยเท่าไร?

เฉลย เป็นบวกและ $k+1 \geq 2$ ข้อนี้ทำให้ใช้ IH ได้และทำให้เทียบกับการคูณ 2 ได้

กลับมาที่ IH: $k! \geq 2^{k-1}$ เป้าหมายคือ $(k+1)! \geq 2^k$ เราจะสร้าง **โซ่อสมการ** โดยทุกก้าวรักษาทิศทาง $\geq$

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. เปิดผลคูณใหม่	$(k+1)! = k! \cdot (k+1)$
2. ใช้ IH	$\geq 2^{k-1} \cdot (k+1)$ เพราะคูณด้วย $k+1 > 0$
3. ใช้ $k \geq 1$	$k+1 \geq 2$
4. คูณขอบเขตด้วยจำนวนบวก	$2^{k-1}(k+1) \geq 2^{k-1} \cdot 2$ เพราะ $2^{k-1} > 0$
5. รวมเลขชี้กำลัง	$2^{k-1} \cdot 2 = 2^{(k-1)+1} = 2^k$
6. เทียบเป้าหมาย	จึง $(k+1)! \geq 2^k$ ได้ $S(k+1)$ ภายใต้ IH
7. ปิดและเช็กกลับ	ฐาน $S(1)$ ผ่าน จึง $n! \geq 2^{n-1}$ ทุก $n \geq 1$; ที่ $n=4$ ได้ $24 \geq 8$ สอดคล้องกัน

① $(k+1)! = k! \cdot (k+1)$

↓

② $\geq 2^{k-1} \cdot (k+1)$ [IH; $k+1 > 0$]

↓

③ $\geq 2^{k-1} \cdot 2$ [$k+1 \geq 2$]

↓

④ $= 2^k$

① พจน์เก่า $k! \geq 2^{k-1}$

↓

② $\times(k+1)$ ทั้งสองข้าง: ใช้ได้เพราะบวก

↓

③ ขอบล่างถึง 2^k → เป้าหมายสำเร็จ

เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

เปลี่ยน $k!$ เป็น 2^{k-1} ด้วยเครื่องหมาย = ผิด เพราะ IH บอกเพียง ≥ ที่ $k=3$ เรามี $3!=6$ แต่ $2^2=4$ ไม่เท่ากัน ต้องเขียน “≥” ในก้าวที่แทนขอบล่าง

เช็กลิสต์ก่อนหยุด

① ใช้ = เมื่อค่าตรงกันจริง ② ใช้ ≥ เมื่อลดเป็นขอบล่าง ③ ตัวคูณของอสมการต้องตรวจเครื่องหมาย ④ ไปถึง 2^k ⑤ ปิดด้วยฐานและสะพาน

3.26 หารลงตัว: เป้าหมายคือสร้างจำนวนเต็มที่คูณกลับได้

$5^1-1=4$, $5^2-1=24$, $5^3-1=124$ ทั้งสามจำนวนเป็น 4 เท่าของจำนวนเต็ม คือ 1,6,31 ตามลำดับ คำว่า “หารด้วย 4 ลงตัว” จึงแปลเป็นสิ่งที่เขียนได้ชัดเจนว่า “4 คูณจำนวนเต็ม”

ลองก่อนอ่านเฉลย

ถ้ารู้ 5^k-1 หารด้วย 4 ลงตัว เราควรเขียนเป็น $5^k-1=4$ หรือ $5^k-1=4m$?

เฉลย ต้องเป็น $4m$ โดย m เป็นจำนวนเต็ม ไม่ได้แปลว่าผลหารต้องเท่ากับ 1

$4 \mid N$ อ่านว่า **4 หาร N ลงตัว (divides)** หมายถึงมีจำนวนเต็ม m ที่ $N=4m$ **ตัวอย่าง 3.6:** พิสูจน์ $4 \mid (5^n - 1)$ สำหรับจำนวนเต็ม $n \geq 1$

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. ฐาน	เมื่อ $n=1$ ได้ $5^1-1=4=4(1)$ จึงหารด้วย 4 ลงตัว
2. เลือก k	ให้ $k \geq 1$ เป็นจำนวนเต็มใด ๆ
3. ASSUME / IH	สมมติ $5^k-1=4m$ สำหรับจำนวนเต็ม m บางตัว
4. PROVE	ต้องแสดงว่ามีจำนวนเต็ม t ซึ่ง $5^{k+1}-1=4t$
5. แยกบทบาท	m มาจาก IH ส่วน t ยังไม่รู้ ต้องสร้างจาก m ให้ได้

IH / สิทธิ์: $[5^k-1] = 4m, m \in \mathbb{Z}$

CURRENT เริ่มจากซ้ายของเป้าหมาย

$5^{k+1}-1 = 5 \cdot 5^k-1$

TARGET ยังปิด: $5^{k+1}-1 = 4t$, ต้องสร้าง $t \in \mathbb{Z}$

① ASSUME / IH: ของเก่าที่ให้ยืม

$5^k - 1 = 4m$, m เป็นจำนวนเต็ม

② ใช้เหตุผล

③ PROVE: เป้าหมาย ยังใช้เป็นเหตุไม่ได้

$5^{k+1} - 1 = 4t$, ต้องสร้าง t เป็นจำนวนเต็ม

① n=1

4=4(1)

② n=2

24=4(6)

③ n=3

124=4(31)

เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

สมมติ $5^{k+1}-1=4t$ แล้วสรุปว่าหารลงตัว เป็นการรับเป้าหมายเข้ามาเอง เรามีสิทธิ์รับเฉพาะ $5^k-1=4m$ จาก IH ต้องคำนวณเพื่อหาตัว t ใหม่

เช็กลิสต์ก่อนหยุด

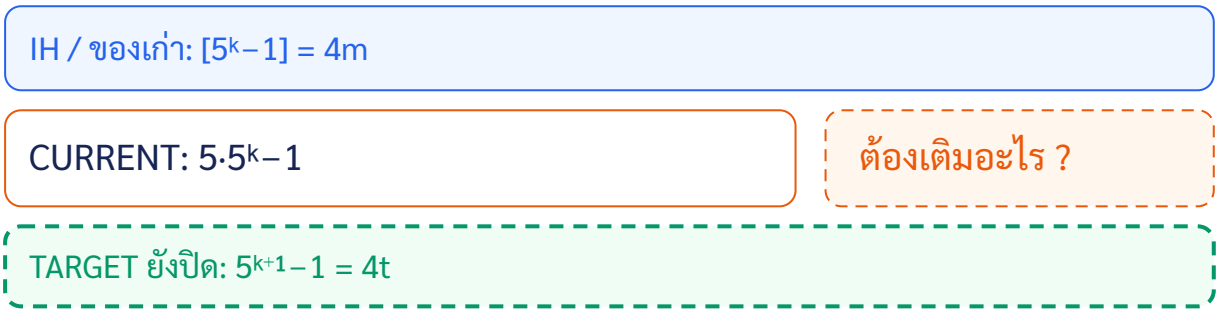
① แปลงหารลงตัวเป็นจำนวนเต็มคูณ 4 ② ตรวจฐาน ③ IH ใช้เลขชี้กำลัง k ④ เป้าหมายใช้ k+1 ⑤ ตัวคูณใหม่ต้องสร้าง ไม่ใช่สมมติ

3.27 เติมแล้วหักออก เพื่อเปิดช่องให้ IH เข้าไป

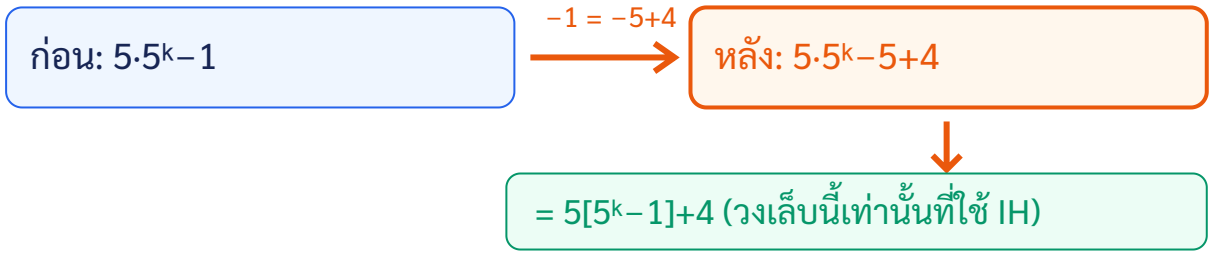
ลองก่อนอ่านเฉลย

$5(5^k-1)$ เท่ากับ $5^{k+1}-1$ เลยไหม? ถ้าไม่ ต้องเติมเท่าไร?

เฉลย ยังไม่เท่ากัน เพราะกระจายแล้วได้ $5^{k+1}-5$ ต้องเติม 4 จึงกลายเป็น $5^{k+1}-1$



เมื่อคูณ 5^k-1 ด้วย 5 จะได้ $5^{k+1}-5$ แต่เป้าหมายคือ $5^{k+1}-1$ จึงยังขาด 4 ถ้าเติม 4 กลับ จะได้ของเป้าหมายพอดี



เรากำลัง **จัดรูปเพื่อใช้ IH** ไม่ได้เปลี่ยนค่าของนิพจน์ การเขียน $-1=-5+4$ ทำให้ก้อน 5^k-1 ปรากฏให้แทนได้

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. เริ่มจากเป้าหมายด้านจำนวน	$5^{k+1}-1$
2. เปิดเลขยกกำลัง	$=5\cdot5^k-1$
3. เขียน -1 เป็น $-5+4$	$=5\cdot5^k-5+4$
4. ดึง 5 ออกจากสองพจน์แรก	$=5(5^k-1)+4$
5. ใช้ IH เฉพาะวงเล็บ	$=5(4m)+4$
6. คูณ	$=20m+4$
7. ดึง 4	$=4(5m+1)$

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
8. สร้างพยานใหม่	ให้ $t=5m+1$ เป็นจำนวนเต็ม จึง 4 หาร $5^{k+1}-1$ ลงตัว
9. ปิดและเช็กกลับ	ฐานผ่านและสะพานครบ จึงจริงทุก $n\geq 1$; จาก $k=2,m=6$ ได้ $t=31$ และ $5^3-1=124=4(31)$

IH / สิทธิ์: $[5^k-1] = 4m$

CURRENT · ทุกบรรทัดรักษาค่าเดิม

$5^{k+1}-1 = 5\cdot 5^k-1$

$= 5\cdot 5^k-5+4$

$= 5[5^k-1]+4$ ← +4 ยังอยู่

$= 5(4m)+4 = 4(5m+1)$

TARGET ถึงแล้ว: $t=5m+1\in\mathbb{Z}$ และ $5^{k+1}-1=4t$

① $5^{k+1}-1 = 5\cdot 5^k-5+4$

↓

② $5(5^k-1)+4$

↓

③ $5(4m)+4$ [IH เฉพาะ 5^k-1]

↓

④ $4(5m+1)$

① m จำนวนเต็ม
$5^k-1=4m$

② ×5 แล้ว +1 →

③ $t=5m+1$
ยังเป็นจำนวนเต็ม

เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

เขียน $5^{k+1}-1=5(5^k-1)$ แล้วแทน IH จะทำเลข 4 หาย ลอง $k=1$: ซ้าย 24 แต่ขวา 20 ต่างกัน 4 พอดี ต้องเติม +4 ก่อน

เช็กลิสต์ก่อนหยุด

① เปิดกำลังเป็น $5 \cdot 5^k$ ② สร้างก้อน $5^k - 1$ โดยรักษาค่า ③ วงก้อนก่อนใช้ IH ④ ดึง 4 ⑤ บอกตัวคูณเป็นจำนวนเต็ม ⑥ ปิดอุปนัย



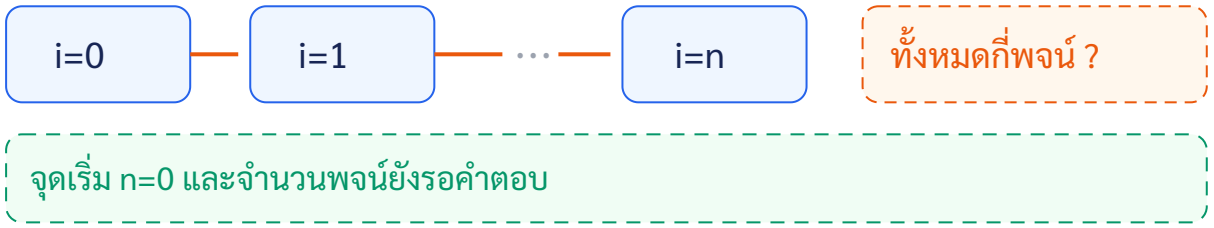
เลข 4 ไม่หายระหว่างแทนก้อนเก่า และกลายเป็นตัวประกอบของผลสุดท้าย

3.28 ผลบวกที่แต่ละพจน์คูณด้วยอัตราเดิม: นับจากศูนย์

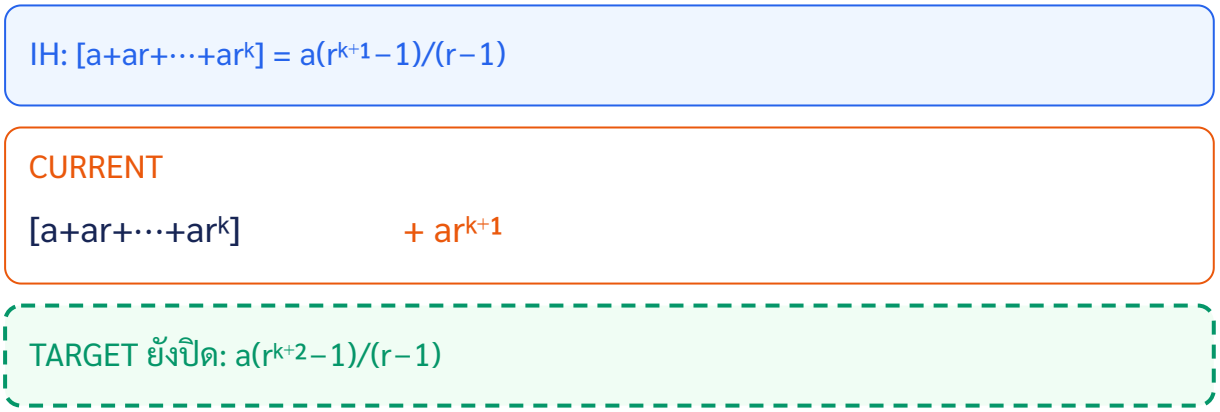
ลองก่อนอ่านเฉลย

ถ้ารวมพจน์หมายเลข 0 ถึงหมายเลข n จะมี n พจน์หรือ n+1 พจน์?

เฉลย มี n+1 พจน์ เช่น 0,1,2,3 มี 4 พจน์ จุดเริ่มของอุปนัยข้อนี้จึงเป็น n=0

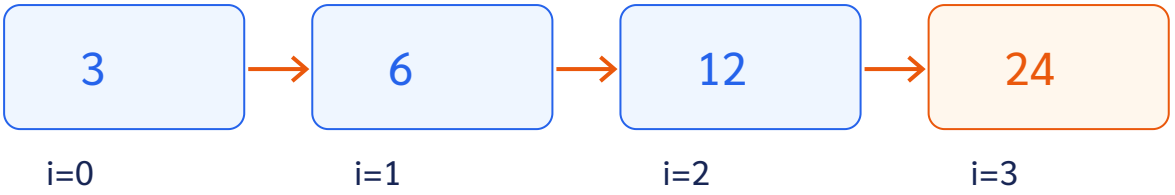


เริ่มด้วย 3 แล้วคูณ 2 ไปเรื่อย ๆ จะได้ 3,6,12,24 เมื่อรวมสี่พจน์ได้ 45 พจน์แรกไม่มีการคูณ 2 เลย เราจึงติดหมายเลขให้เป็น 0 ส่วนพจน์สุดท้ายติดหมายเลข 3



ผลบวก $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n$ เรียก **ผลบวกเรขาคณิต (geometric sum)** พจน์แรกคือ a แล้วคูณ r ซ้ำเพื่อสร้างพจน์ถัดไป เขียนย่อ $\sum_{i=0}^{n} ar^i$ โดยสัญลักษณ์ Σ หมายถึงบวกทุกพจน์ในช่วงที่กำกับ

ตัวอย่าง 3.7: สำหรับ a,r จำนวนจริงที่ r≠1 พิสูจน์ $\sum_{i=0}^{n} ar^i = \frac{a(r^{n+1}-1)}{r-1}$ ทุกจำนวนเต็ม n≥0 พจน์หมายเลขศูนย์หมายถึง a เสมอ รวมกรณี r=0 ด้วย ซึ่งพจน์หลังจากนั้นเป็นศูนย์



① เริ่ม 3 ② คูณ 2 ซ้ำ ③ รวม 3+6+12+24=45

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. ตรึง a,r	ให้ a,r คงที่ตามเงื่อนไข $r\neq1$ แล้วทำอุปนัยตาม n
2. ฐานด้านซ้าย	n=0 มีเพียงพจน์ a
3. ฐานด้านขวา	$a(r^{0+1}-1)/(r-1)=a(r-1)/(r-1)=a$
4. เหตุที่ตัดได้	$r-1\neq0$ เพราะ $r\neq1$ จึงฐานจริง
5. เลือก k และ IH	ให้ $k\geq0$ ใด ๆ สมมติ $a+ar+\cdots+ar^k=a(r^{k+1}-1)/(r-1)$
6. เป้าหมาย	ต้องแสดง $a+ar+\cdots+ar^k+ar^{k+1}=a(r^{k+2}-1)/(r-1)$

① ASSUME / IH: ของเก่าที่ให้ยืม

$a+ar+\cdots+ar^k = a(r^{k+1}-1)/(r-1)$

② ใช้เหตุผล

③ PROVE: เป้าหมาย ยังใช้เป็นเหตุไม่ได้

$a+ar+\cdots+ar^k+ar^{k+1} = a(r^{k+2}-1)/(r-1)$

เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

เริ่มฐาน n=1 อย่างเดียวจะข้ามผลบวกที่มีพจน์เดียว และแทน n=k+1 แล้วคงเลขชี้กำลัง k+1 บนเศษไว้ก็ผิด เพราะ (k+1)+1=k+2

เช็กลิสต์ก่อนหยุด

① ตรึง a,r ② ตรวจ $r\neq1$ ③ เริ่มฐาน n=0 ④ นับ n+1 พจน์ ⑤ IH จบ ar^k ⑥ เป้าหมายเพิ่ม ar^{k+1} และขวามีกำลัง k+2

3.29 พจน์ใหม่มีอัตราคูณอยู่ด้วย: อย่าหลงนับเป็น k+1

ลองก่อนอ่านเฉลย

เมื่อก้อนเก่าจบที่ ar^k พจน์ใหม่คือ k+1, ar^k หรือ ar^{k+1}?

เฉลย คือ ar^{k+1} เพราะต้องคูณพจน์ ar^k ด้วย r อีกครั้ง

OLD BLOCK: $[a+ar+\cdots+ar^k]$

CURRENT: $[a+ar+\cdots+ar^k]$ + พจน์ใด ?

TARGET ยังปิด: สูตรที่ n=k+1

สำหรับแถว 3,6,12,24 ถ้ารู้ผลบวกสามพจน์แรก 21 พจน์ใหม่ที่เติมคือ 24 ไม่ใช่เลขหมายของพจน์ เลขหมายช่วยระบุตำแหน่ง แต่ไม่ใช่ค่าของพจน์

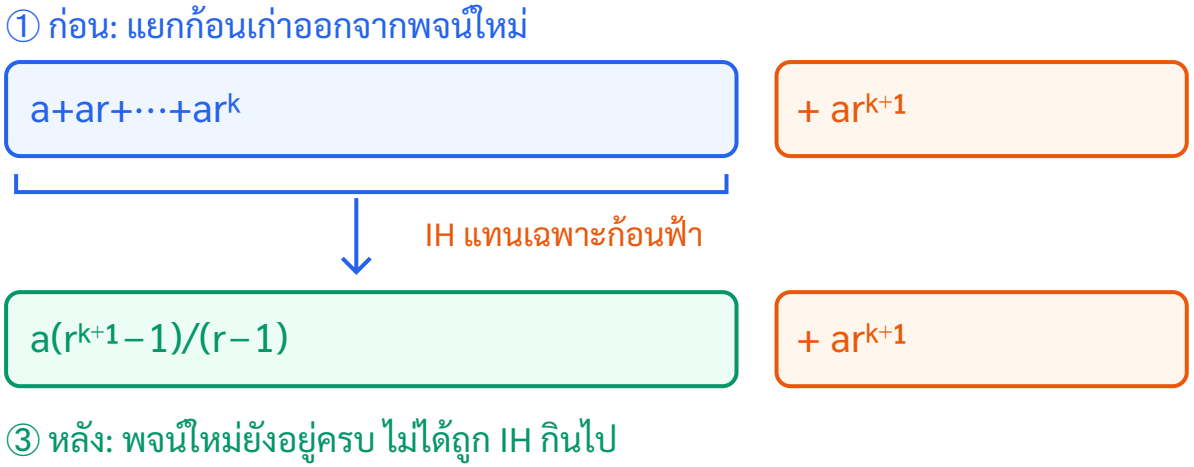
IH: $[a+ar+\cdots+ar^k] = a(r^{k+1}-1)/(r-1)$

CURRENT หลังแทนเฉพาะก้อนฟ้า

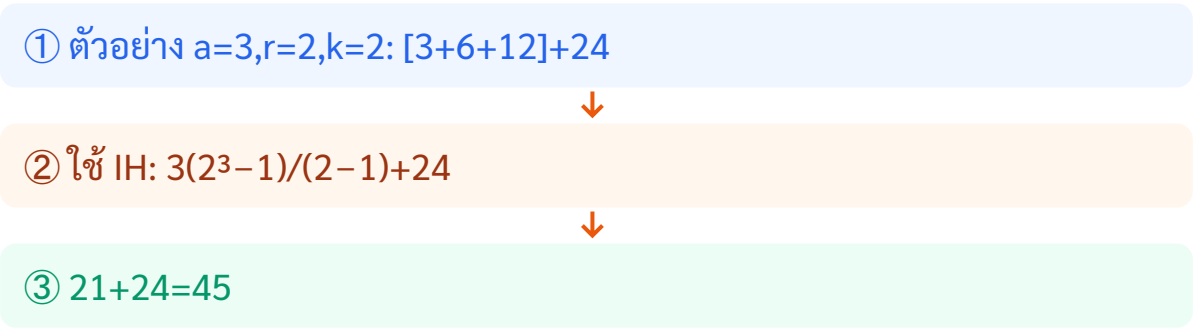
$a(r^{k+1}-1)/(r-1)$ $+ ar^{k+1}$

TARGET ยังปิด: $a(r^{k+2}-1)/(r-1)$

ใช้หลักแยกก้อนเหมือนผลบวก 1 ถึง n แต่คราวนี้ส่วนที่เพิ่มเป็น ar^{k+1} จึงต้องรักษาทั้ง a และกำลังของ r ให้ครบ



บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. เริ่มด้านซ้ายใหม่	$a+ar+\cdots+ar^k+ar^{k+1}$
2. แยกส่วนที่ IH ครอบคลุม	$=[a+ar+\cdots+ar^k]+ar^{k+1}$
3. ใช้ IH	$=a(r^{k+1}-1)/(r-1)+ar^{k+1}$
4. ทำส่วนให้เท่ากัน	$=a(r^{k+1}-1)/(r-1)+ar^{k+1}(r-1)/(r-1)$
5. รวมเศษ	$=[a(r^{k+1}-1)+ar^{k+1}(r-1)]/(r-1)$
6. เช็กกลับระหว่างทาง	เราไม่ได้สมมติสูตรถึง k+1 และไม่ได้เปลี่ยนค่าพจน์ใหม่ เพราะคูณด้วย $(r-1)/(r-1)=1$



เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

เติมเพียง +(k+1) ในข้อนี้จะได้ 21+3=24 แทน 45 เมื่อ k=2 ต้องกลับไปดูว่าหนึ่งพจน์ในผลบวกเดิมมีหน้าตาอย่างไร ไม่ใช่ใช้ภาพจำจากโจทย์ผลบวก 1 ถึง n

เช็กลิสต์ก่อนหยุด

① มองชนิดของพจน์ ② แยก ar^{k+1} ไว้ ③ แทนเฉพาะถึง ar^k ④ ทำส่วนด้วย $r-1$ ซึ่งไม่เป็นศูนย์ ⑤ รวมเศษแล้วค่อยกระจาย

3.30 พจน์ที่หักล้างกันต้องเป็นพจน์เดียวกันจริง

ลองก่อนอ่านเฉลย

กระจาย $ar^{k+1}(r-1)$ ได้ $ar^{k+2}-ar^{k+1}$ หรือ $ar^{k+2}-1$?

เฉลย ได้ $ar^{k+2}-ar^{k+1}$ เพราะต้องคูณทั้ง r และ -1 ด้วย ar^{k+1}

GIVEN: $a(r^{k+1}-1)+ar^{k+1}(r-1)$

กระจาย $ar^{k+1}(r-1)=?$

TARGET ยังปิด: $a(r^{k+2}-1)/(r-1)$

เศษที่เราได้มี $a(r^{k+1}-1)+ar^{k+1}(r-1)$ เมื่อกระจายแล้วจะมี $+ar^{k+1}$ กับ $-ar^{k+1}$ เป็นคู่ที่หักล้างกัน เหลือพจน์ที่กำลังสูงขึ้นหนึ่งขั้นกับ $-a$

IH ถูกใช้แล้วในก้อนผลบวกถึง ar^k

CURRENT

$[ar^{k+1}-a+ar^{k+2}-ar^{k+1}]/(r-1)$

$=a(r^{k+2}-1)/(r-1)$

TARGET ถึงแล้ว: $a(r^{k+2}-1)/(r-1)$

การหักล้างนี้เกิดจาก **การแจกแจงการคูณ** แล้วรวมพจน์ตรงข้าม ไม่ใช่การตัดตัวประกอบผ่านเครื่องหมายบวก

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. ของที่ต่อจากหน้าก่อน	$[a(r^{k+1}-1)+ar^{k+1}(r-1)]/(r-1)$
2. กระจายวงเล็บแรก	$[ar^{k+1}-a+ar^{k+1}(r-1)]/(r-1)$
3. กระจายวงเล็บที่สอง	$[ar^{k+1}-a+ar^{k+2}-ar^{k+1}]/(r-1)$
4. หักล้างคู่ตรงข้าม	$[ar^{k+2}-a]/(r-1)$

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
5. ดึง a	$a(r^{k+2}-1)/(r-1)$
6. เทียบเป้าหมาย	นี่คือสูตรสำหรับ n=k+1 พอดี
7. ปิดอุปนัย	ฐาน n=0 ผ่านและสะพานทุก k≥0 ผ่าน จึงสูตรจริงทุก n≥0 เมื่อ r≠1
8. เช็กกลับ	a=3,r=2,n=3 ให้ $3(2^4-1)/(2-1)=45$ ตรง 3+6+12+24

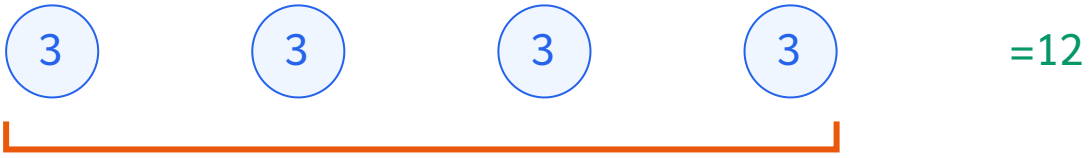
① กระจายเศษ

$$ar^{k+1} - a + ar^{k+2} - ar^{k+1}$$

+u กับ −u

② เหลือ: $ar^{k+2} - a$

③ ดึง a: $a(r^{k+2}-1)$



① r=1 ② 4 พจน์เท่ากัน ③ 4×3=12

เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

ใช้สูตรเมื่อ r=1 จะได้ส่วนเป็น 0 ซึ่งหารไม่ได้ กรณี r=1 ทุกพจน์เท่ากับ a จึงผลบวกเป็น (n+1)a โดยนับพจน์ตรง ๆ เช่น a=3,n=3 ได้ 12 ไม่ใช่ใช้เศษส่วน 0/0

เช็กลิสต์ก่อนหยุด

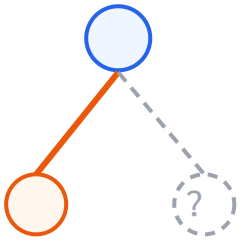
① กระจายทุกตัว ② ระบุคู่ที่หักล้าง ③ ดึง a ④ ตรวจเลขชี้กำลังเป็น k+2 ⑤ เงื่อนไข r≠1 ต้องอยู่ในข้อสรุปด้วย

3.31 ต้นไม้ที่แต่ละจุดแตกได้ไม่เกินสองทาง

ลองก่อนอ่านเฉลย

ถ้าจุดหนึ่งมีลูกเพียงจุดเดียว ภาพนี้ยังอยู่ในกติกา “ไม่เกินสองลูก” ไหม?

เฉลย ยังอยู่ ในโจทย์นี้แต่ละจุดมีลูก 0,1 หรือ 2 จุดก็ได้



มีลูกจริง 1 จุด
ยังอยู่ในกติกา “ไม่เกิน 2” ไหม ?

คำตอบยังปิดไว้ก่อนลอง

เริ่มจากจุดบนสุดหนึ่งจุด ให้แต่ละจุดวาดลูกต่อได้ไม่เกินสองจุด ชั้นถัดไปจึงมีได้ไม่เกินสองจุด อีกชั้นมีได้ไม่เกินสี่จุด เรากำลังนับความจุสูงสุด ไม่ได้บอกว่าทุกภาพต้องแตกเต็ม

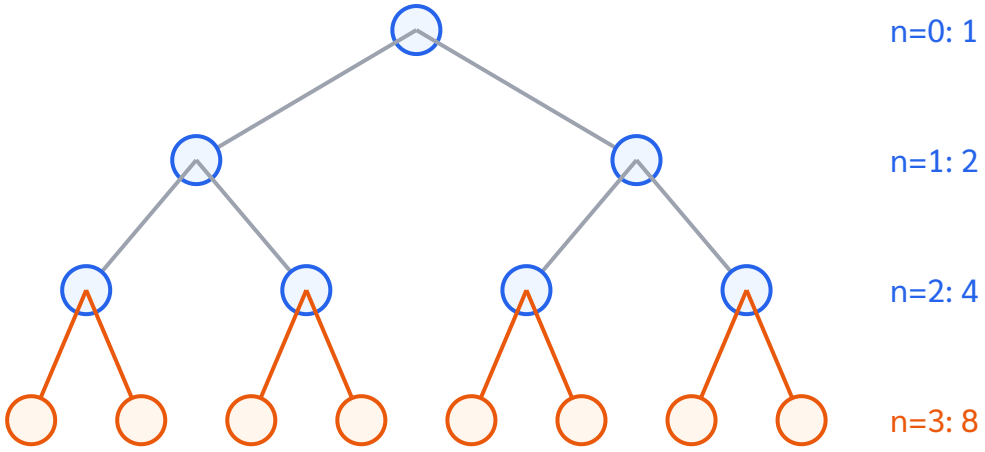
IH: $[N_k] \le 2^k$

CURRENT

$N_{k+1} \le 2[N_k]$ พ่อหนึ่งจุดมีลูกใหม่ไม่เกิน 2

TARGET ยังปิด: $N_{k+1} \le 2^{k+1}$

ภาพเชื่อมโยงที่เริ่มจากรากและแต่ละจุดมีลูกไม่เกินสองจุดเรียก **ต้นไม้ทวิภาค (binary tree)** จุดเรียก **โหนด (node)** จุดเริ่มคือ **ราก (root)** จำนวนเส้นจากรากถึงโหนดเรียก **ความลึก (depth)** รากมีความลึก 0



① ราก ② พ่อมีลูก ≤2 ③ ชั้นใหม่มากสุดเป็นสองเท่า

ตัวอย่าง 3.8: ในต้นไม้ทวิภาค ที่ความลึก n มีโหนดไม่เกิน 2^n สำหรับจำนวนเต็ม $n \geq 0$

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. ตั้งชื่อสิ่งที่นับ	ให้ N_n เป็นจำนวนโหนดที่ความลึก n ของต้นไม้ใด ๆ
2. ฐาน	$N_0=1$ เพราะมีรากหนึ่งจุด และ $2^0=1$ จึง $N_0 \leq 2^0$
3. เลือก k	ให้ $k \geq 0$ เป็นจำนวนเต็มใด ๆ
4. ASSUME / IH	สมมติ $N_k \leq 2^k$
5. PROVE	ต้องแสดง $N_{k+1} \leq 2^{k+1}$
6. สิ่งที่เชื่อมสองชั้น	แต่ละโหนดชั้น k ให้โหนดชั้น k+1 ได้ไม่เกิน 2 โหนด

① ASSUME / IH: ของเก่าที่ให้ยืม
$N_k \leq 2^k$

② ใช้เหตุผล

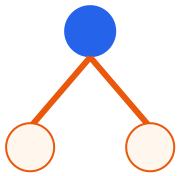
③ PROVE: เป้าหมาย ยังใช้เป็นเหตุไม่ได้
$N_{k+1} \leq 2^{k+1}$

เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

เขียน $N_n=2^n$ จะผิดกับต้นไม้ที่เป็นเส้นลงมาตรง ๆ: ที่ความลึก 2 มีเพียง 1 โหนด ไม่ใช่ 4 รูปที่แตกเต็มช่วยเห็นขอบสูงสุด แต่ไม่ได้แทนต้นไม้ทุกแบบ

เช็กลิสต์ก่อนหยุด

① depth นับเส้นจากราก เริ่ม 0 ② นับเฉพาะชั้น ไม่รวมชั้นก่อน ③ IH เป็น ≤ ④ ลูกต่อพ่อไม่เกินสอง ⑤ เป้าหมายจึงต้องเป็น “ไม่เกิน” เช่นเดิม



$N_{k+1} \le 2N_k$ และ $N_k \le 2^k$

จึง $N_{k+1} \le 2^{k+1}$

3.32 ส่งต่อขอบบน: สองลูกต่อหนึ่งพ่อ

ลองก่อนอ่านเฉลย

IH บอก $N_k \le 2^k$ และกติกาบอก $N_{k+1} \le 2N_k$ เราต่อสองข้อความนี้ได้อย่างไร?

เฉลย คูณ IH ด้วย $2>0$ ได้ $2N_k \le 2\cdot 2^k$ แล้วต่อเป็น $N_{k+1} \le 2N_k \le 2\cdot 2^k$

IH: $N_k \le 2^k$

กติกา: $N_{k+1} \le 2N_k$

CURRENT: $N_{k+1} \le 2N_k \rightarrow$ ต่อด้วยอสมการใด ?

TARGET ยังปิด: $N_{k+1} \le 2^{k+1}$

ถ้าชั้นหนึ่งมี 3 โหนด ชั้นถัดไปมีได้ไม่เกิน $3\times 2=6$ โหนด ต่อให้แต่ละพ่อมีลูกครบสอง แต่ถ้ามีพ่อไม่ถึงจำนวนสูงสุด ชั้นใหม่ก็อาจไม่ถึงขอบสูงสุดเช่นกัน

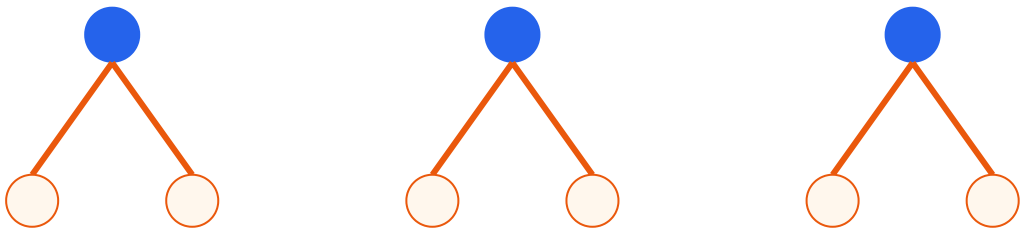
IH: $[N_k] \le 2^k$

$N_{k+1} \le 2[N_k] \le 2\cdot 2^k = 2^{k+1}$

แทนเฉพาะ N_k; ตัวคูณ 2 ของชั้นใหม่ยังอยู่

TARGET ถึงแล้ว: $N_{k+1} \le 2^{k+1}$

คำว่า **ขอบบน (upper bound)** คือจำนวนที่สิ่งที่นับไม่เกิน เราส่งต่อขอบบนเดิมผ่านการคูณ 2 ที่เป็นบวก



① พ่อ 3 จุด ② ลูกไม่เกิน 2 ต่อพ่อ ③ ลูกไม่เกิน 6 จุด

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. ใช้โครงสร้างต้นไม้	ทุกโหนดชั้น k+1 มีพ่อในชั้น k เพียงหนึ่งโหนด จึงนับลูกผ่านพ่อได้โดยไม่ซ้ำ
2. ใช้ข้อจำกัดลูก	$N_{k+1} \le 2N_k$
3. ใช้ IH	$2N_k \le 2 \cdot 2^k$ เพราะ $N_k \le 2^k$ และ $2>0$
4. ต่ออสมการ	$N_{k+1} \le 2 \cdot 2^k$
5. รวมกำลัง	$2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$
6. ปิดอุปนัย	ฐานผ่านและสะพานทุก $k \ge 0$ ผ่าน จึง $N_n \le 2^n$ ทุก $n \ge 0$
7. เช็กกลับ	ชั้น 3 ของต้นไม้แตกเต็มมี $8=2^3$; ต้นไม้ที่แตกไม่เต็มมีน้อยกว่านี้ก็ยังผ่าน $\le$

① $N_{k+1} \le 2N_k$ [ไม่เกินสองลูกต่อพ่อ]

↓

② $2N_k \le 2 \cdot 2^k$ [IH]

↓

③ $N_{k+1} \le 2^{k+1}$

เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

ใช้ $N_{k+1} \le N_k + 2$ จะผิด เพราะแต่ละพ่อเพิ่มลูกได้อีก ไม่ใช่ทั้งชั้นเพิ่มเพียงสอง เมื่อชั้น k มี 4 จุด ชั้นถัดไปอาจมี 8 จุด แต่ 4+2=6 ต่ำเกินไป

เช็กลิสต์ก่อนหยุด

① จับคู่ลูกกับพ่อ ② ยืนยันไม่ซ้ำนับ ③ คูณด้วยจำนวนลูกสูงสุด ④ ใช้ IH แล้วรวมกำลัง ⑤ กลับไปอ่านว่าโจทย์ถามเฉพาะชั้น

3.33 นับทั้งต้น: ต้องรวมทุกชั้นที่อยู่เหนือฐานด้วย

ลองก่อนอ่านเฉลย

ต้นไม้สูง 2 มีความลึกใดบ้าง? มีสองชั้นหรือสามชั้น?

เฉลย มีความลึก 0,1,2 รวมสามชั้น ความสูงนับจำนวนเส้นบนเส้นทางที่ยาวที่สุด ไม่ได้นับจำนวนชั้น



ต้นไม้ที่แตกเต็มถึงความลึก 3 มี 1+2+4+8=15 โหนด ไม่ใช่ 8 โหนด เพราะ 8 นับเฉพาะชั้นล่างสุด ส่วน 15 นับตั้งแต่รากลงมาครบ

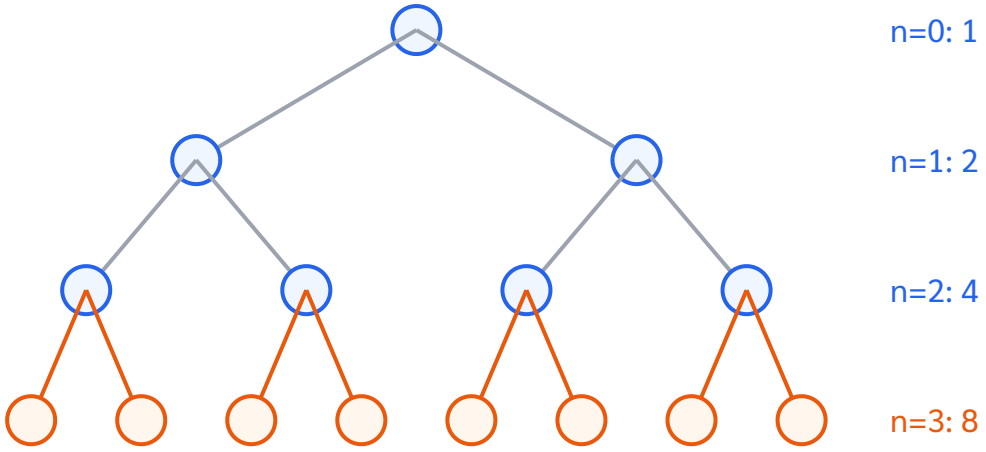
IH: [Tส่วนบนสูง k] ≤ $2^{k+1}-1$

CURRENT

[Tส่วนบน] + Nชั้นใหม่ ≤ $(2^{k+1}-1)+2^{k+1}$

TARGET ยังปิด: Tทั้งหมด ≤ $2^{k+2}-1$

ความสูง (height) ของต้นไม้คือความลึกสูงสุด **ตัวอย่าง 3.9:** ต้นไม้ทวิภาคความสูง n มีโหนดทั้งหมดไม่เกิน $2^{n+1}-1$



① ราก ② พ่อมีลูก ≤2 ③ ชั้นใหม่มากสุดเป็นสองเท่า

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. ระบุข้อความที่พิสูจน์	S(n): ต้นไม้ทวิภาคใด ๆ ที่สูง n มีโหนดทั้งหมด$\le 2^{n+1}-1$
2. ฐาน n=0	มีเพียงรากหนึ่งโหนด ขอบบน $2^{0+1}-1=2-1=1$ จึงฐานจริง
3. เลือก k และ IH	ให้ $k\ge 0$ ใด ๆ สมมติว่าต้นไม้ใด ๆ ที่สูง k มีโหนด$\le 2^{k+1}-1$
4. เป้าหมาย	ต้องแสดงต้นไม้ใด ๆ ที่สูง k+1 มีโหนด$\le 2^{k+2}-1$
5. เลือกต้นไม้ใหม่	หยิบต้นไม้สูง k+1 ใด ๆ แล้วแยกชั้นล่างสุดออกจากส่วนบน

① ASSUME / IH: ของเก่าที่ให้ยืม
ส่วนบนสูง k: โหนด $\le 2^{k+1}-1$

↓ ② ใช้เหตุผล

③ PROVE: เป้าหมาย ยังใช้เป็นเหตุไม่ได้
ทั้งต้นสูง k+1: โหนด $\le 2^{k+2}-1$

เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

สมมติแค่ต้นไม้ตัวอย่างหนึ่งที่สูง k ผ่าน ไม่พอสำหรับทุกต้นที่สูง k+1 เพราะส่วนบนของต้นใหม่อาจเป็นต้นคนละรูป IH ต้องครอบคลุม “ต้นไม้ใด ๆ ที่สูง k”

เช็กลิสต์ก่อนหยุด

① แยกคำว่าสูงกับจำนวนชั้น ② ตั้ง IH ให้ครอบคลุมทุกต้นที่สูง k ③ รับต้นสูง k+1 ใด ๆ ④ แยกส่วนบนกับชั้นใหม่ ⑤ ยังห้ามใช้สูตรทั้งหมดของต้นใหม่

3.34 แยกของเก่าที่สูง k กับชั้นใหม่ที่ k+1

ลองก่อนอ่านเฉลย

IH ของความสูง k ใช้แทน “ทั้งต้นสูง k+1” ได้ไหม หรือใช้ได้เฉพาะส่วนบนหลังตัดชั้นล่างสุด?

เฉลย ใช้ได้เฉพาะส่วนบน ซึ่งสูง k ส่วนชั้นใหม่ต้องนับด้วยขอบบนที่ความลึก k+1 จากตัวอย่างก่อน

ก้อน A: ส่วนบนของต้นไม้ใหม่
สูง k — ใช้ IH ได้หรือไม่ ?

ก้อน B: ชั้นใหม่
ความลึก k+1

TARGET ยังปิด: ขอบจำนวนโหนดของทั้งต้นสูง k+1

สำหรับต้นไม้สูง 3 แยกสามชั้นบน 0,1,2 ออกมาเป็นของเก่า ส่วนชั้น 3 เป็นส่วนใหม่ ของเก่ามีได้ไม่เกิน 7 โหนด ส่วนใหม่มีได้ไม่เกิน 8 โหนด รวมจึงไม่เกิน 15

IH: $[T_{\text{ส่วนบน}}] \le 2^{k+1}-1$

$[T_{\text{ส่วนบน}}]$ + Nชั้นใหม่

$\le (2^{k+1}-1)+2^{k+1} = 2^{k+2}-1$

TARGET ถึงแล้ว: Tทั้งหมด $\le 2^{k+2}-1$

เรากำลังใช้ **IH กับโครงสร้างที่เล็กลง** ส่วนบนยังเป็นต้นไม้ทวิภาคเพราะตัดลูกชั้นล่างออกไม่ได้เพิ่มจำนวนลูกของใคร ต้นเดิมสูง k+1 จึงมีเส้นทางถึงชั้นนั้น ทำให้ส่วนบนสูง k จริง

① ส่วนบน: ชั้น 0 ถึง k

$T_{บน} \le 2^{k+1}-1$

ใช้ IH ได้

② ชั้น k+1

$N_{ใหม่} \le 2^{k+1}$

ใช้ขอบรายชั้น

③ ทั้งหมด $\le (2^{k+1}-1)+2^{k+1} = 2^{k+2}-1$

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. แยกจำนวนโหนด	$T_{ทั้งหมด}=T_{บน}+N_{ชั้นใหม่}$ เพราะสองส่วนไม่ทับกันและรวมครบ
2. ใช้ IH เฉพาะส่วนบน	$T_{บน} \le 2^{k+1}-1$
3. ใช้ผลรายชั้นที่พิสูจน์แล้ว	$N_{ชั้นใหม่} \le 2^{k+1}$
4. รวมขอบบน	$T_{ทั้งหมด} \le (2^{k+1}-1)+2^{k+1}$
5. รวมพจน์กำลังเท่ากัน	$=2\cdot 2^{k+1}-1$
6. รวมเลขชี้กำลัง	$=2^{k+2}-1$
7. ปิดอุปนัย	ตรงเป้าหมายสำหรับความสูง k+1 ฐาน n=0 ผ่าน จึงจริงทุก $n \ge 0$
8. เช็กกลับ	สูง 3 ให้ขอบบน $2^4-1=15$ ตรงผลรวม 1+2+4+8 และต้นที่ไม่เต็มย่อมไม่เกินนี้

① ก่อน: $T_{บน}$ + $N_{ชั้นใหม่}$

↓

② หลังใช้ขอบ: $(2^{k+1}-1) + 2^{k+1}$

↓

③ รวม: $2\cdot 2^{k+1}-1 = 2^{k+2}-1$

เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

เอา IH ของ “โหนดทั้งต้น” ไปแทนจำนวนโหนดชั้นใหม่ผิดชนิด: ชั้นใหม่ใช้ขอบ 2^{k+1} จากความลึก ส่วนบนใช้ $2^{k+1}-1$ จากความสูง ต้องติดป้ายว่ากำลังนับส่วนไหนก่อนแทนสูตร

เช็กลิสต์ก่อนหยุด

① แยกส่วนไม่ซ้ำและไม่ขาด ② ตรวจส่วนบนอยู่ในขอบเขต IH ③ ใช้ขอบรายชั้นกับส่วนใหม่ ④ รวมแล้วได้สูตรเป้าหมาย ⑤ ปิดฐานและสะพาน



สองส่วนไม่ซ้ำกันและรวมครบ จึงบวกขอบบนได้

3.35 ลองทำเอง: ผลบวกจำนวนคี่ เพื่อเช็กว่าใช้ IH เป็นแล้ว

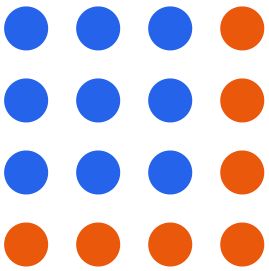
จุด 1 จุดทำสี่เหลี่ยมขนาด 1×1 เติมอีก 3 จุดเป็น 2×2 เติมอีก 5 จุดเป็น 3×3 จึงได้ 1+3+5=9 พจน์คี่ที่เพิ่มทำหน้าที่เป็นขอบรูปตัว L รอบสี่เหลี่ยมเดิม

ลองก่อนอ่านเฉลย

ถ้าสี่เหลี่ยมเดิมขนาด k×k มี k^2 จุด จะขยายเป็น (k+1)×(k+1) ต้องเติมกี่จุด? เขียน IH และเป้าหมายเองก่อน

เฉลย เติมแถว k จุดกับคอลัมน์ k จุดและมุมใหม่ 1 จุด รวม 2k+1; IH คือ $1+3+\cdots+(2k-1)=k^2$ เป้าหมายคือผลเดิม+(2k+1)=$(k+1)^2$

นี่คือโจทย์เปลี่ยนรูปให้ลองใช้ **อุปนัย** ด้วยตนเอง: พิสูจน์ $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=n^2$ ทุกจำนวนเต็ม n≥1 ดูว่าก้อนเก่าและพจน์ใหม่ตรงกับสิทธิ์ของ IH หรือไม่



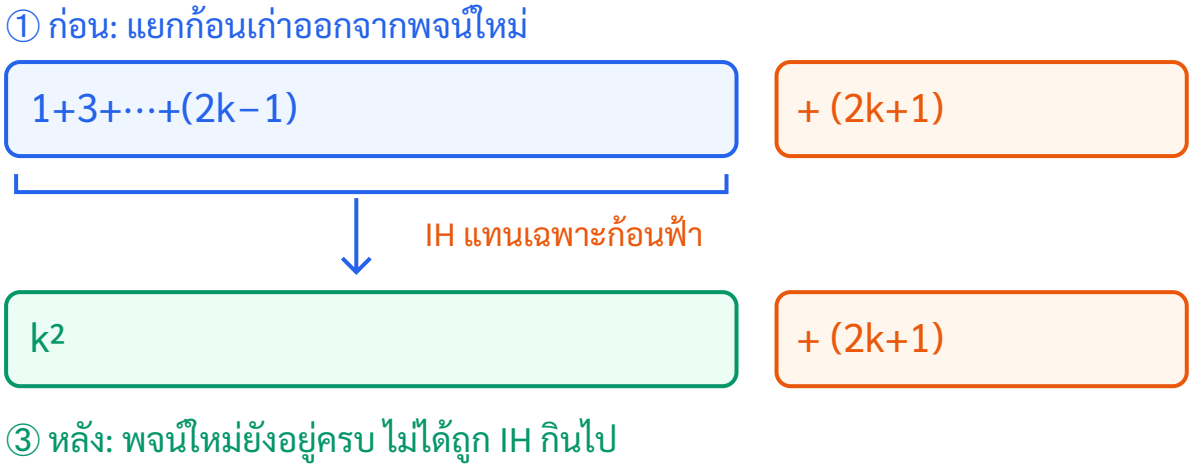
① ของเก่า 3×3 = 9

② ขอบใหม่ 3+3+1 = 7

③ ของใหม่ 4×4 = 16

ทั่วไป: $k^2 + (2k+1) = (k+1)^2$

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. ฐาน	n=1: ซ้าย=1 ขวา=1^2=1 ฐานจริง
2. เลือก k / IH	ให้ k≥1 ใด ๆ สมมติ $1+3+\cdots+(2k-1)=k^2$
3. เขียนเป้าหมาย	ต้องแสดง $1+3+\cdots+(2k-1)+(2(k+1)-1)=(k+1)^2$
4. ยุบพจน์ใหม่	2(k+1)−1=2k+2−1=2k+1
5. แยกก้อนและใช้ IH	$[1+3+\cdots+(2k-1)]+(2k+1)=k^2+2k+1$
6. แยกผลคูณ	$k^2+2k+1=(k+1)^2$
7. ปิดและเช็กกลับ	ฐานผ่านและสะพานครบ จึงจริงทุก n≥1; n=4 ให้ $1+3+5+7=16=4^2$



เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

เติม +(k+1) เหมือนผลบวก 1 ถึง n จะผิดชนิด เพราะพจน์ที่ n คือ 2n−1 เมื่อต้องการพจน์ที่ k+1 ต้องแทน n=k+1 ใน 2n−1 ก่อน

เช็กลิสต์ก่อนหยุด

ลองปิดเฉลยแล้วเขียนใหม่ ① S(n) ② ฐาน ③ IH ที่ k ④ เป้าหมายที่ k+1 ⑤ วงก้อนที่ใช้ IH ⑥ พีชคณิต ⑦ ข้อสรุป ถ้าอธิบายได้ว่าทำไม IH ไม่กินพจน์ใหม่ แปลว่าจับขั้นสำคัญได้แล้ว

3.36 ก่อนเริ่มข้อสอบ: อ่านว่าให้เริ่มตรงไหนและต้องจบตรงไหน

ประโยค “ถ้าเงื่อนไขนี้จริงแล้วผลนี้จริง” ทำได้หลายทาง แต่ถ้าโจทย์กำหนดวิธีไว้ ต้องเขียนสิ่งที่สมมติและคำจบให้ตรงวิธี แม้การคำนวณกลางทางจะหน้าตาเหมือนกัน

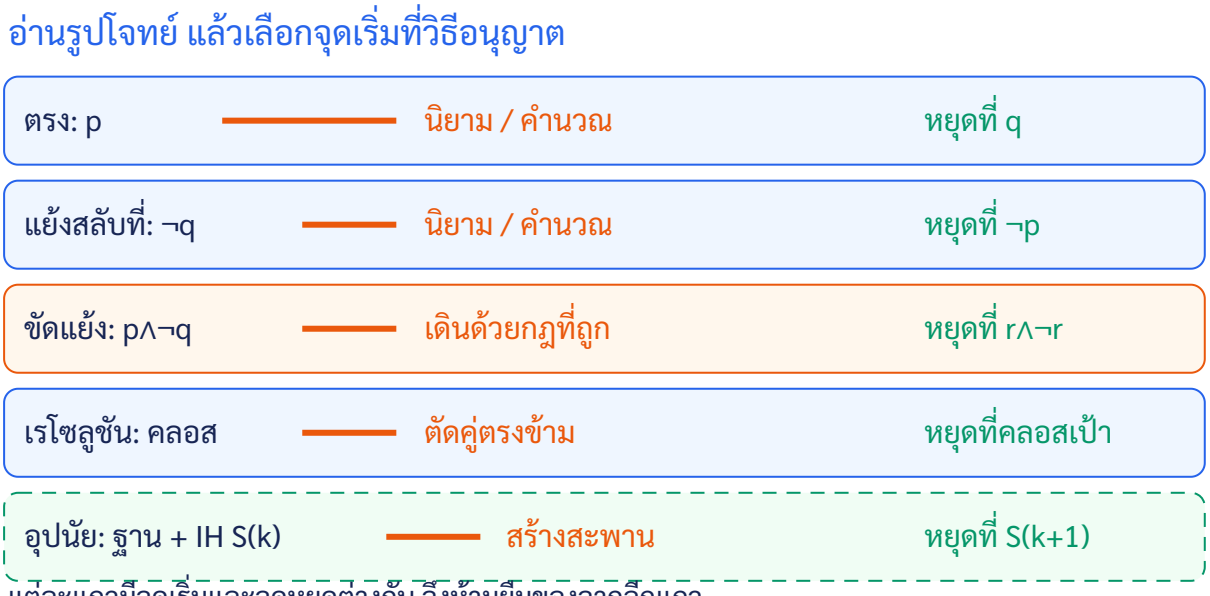
ลองก่อนอ่านเฉลย

ในโจทย์ 3n+2 คี่→n คี่ ถ้าสมมติ n คู่เพียงอย่างเดียวกำลังเดินวิธีใด? ถ้าสมมติเพิ่มว่า 3n+2 คี่ล่ะ?

เฉลย แบบแรกเป็นแย้งสลับที่ เดินไปถึง 3n+2 คู่ แบบที่สองเป็นขัดแย้ง จบเมื่อ 3n+2 ทั้งคี่และคู่

ใช้ตารางนี้เป็น **แผนเลือกวิธีพิสูจน์** หลังจากเขียน p,q และโดเมนชัดแล้ว การเลือกวิธีไม่แทนการทำบรรทัดคำนวณ

วิธี	เริ่มด้วยอะไร	จบเมื่ออะไร
ตรง	p	ได้ q พร้อมเหตุผล
แย้งสลับที่	¬q	ได้ ¬p แล้วอ้างสมมูล
ขัดแย้ง	p∧¬q หรือปฏิเสธข้อความทั้งหมด	ได้ r กับ ¬r
แจงกรณี	รายการกรณีที่ครบโดเมน	ทุกกรณีได้ข้อสรุปเดิม
เรโซลูชัน	เหตุในรูปคลอส	ได้คลอสเป้าหมายจากคู่ตรงข้าม
อุปนัย	ฐานจริง; ในสะพานสมมติ S(k)	ได้ S(k+1) แล้วรวมฐานกับสะพาน



① อ่านโจทย์: p → q หรือ S(n)

↓

② วงของที่ “ให้ใช้” แยกจากของที่ “ต้องแสดง”

↓

③ เดินถึงเป้าหมาย → ตรวจกลับโดเมนและเงื่อนไข

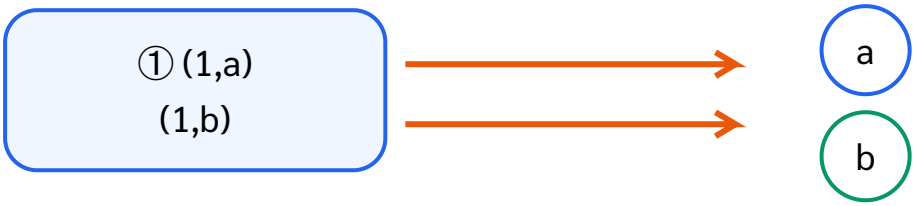
บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. เปิดงาน	เขียนสิ่งที่ให้ ตัวแปร และโดเมนก่อน
2. เลือกทาง	ใช้วิธีที่โจทย์กำหนด ถ้าไม่กำหนด เลือกทางที่เปิดนิยามได้ง่าย
3. แยกสถานะ	สิ่งที่ต้องแสดงยังไม่ใช้เป็นเหตุ โดยเฉพาะ S(k+1) ในอุปนัย
4. ทำทีละบรรทัด	เขียนการแทนค่า การเปิดนิยาม หรือกฎที่ใช้ไว้ข้างบรรทัด
5. เช็กกลับ	ผลสุดท้ายตรงโจทย์ครบหรือยัง: ทุกค่า, มีบางค่า, < หรือ ≤, คู่หรือคี่
6. หยุด	เมื่อได้เป้าหมายและปิดวิธีครบแล้ว ไม่ต้องเพิ่มตัวอย่างเพื่อแทนการพิสูจน์

เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

ทำพีชคณิตถูกทุกบรรทัดก็ยังอาจไม่ใช่ข้อพิสูจน์ ถ้าเริ่มด้วยเป้าหมายที่ยังไม่ได้รับสิทธิ์ หรือจบคนละข้อความ ต้องตรวจลูกศรเชิงเหตุผลด้วย ไม่ใช่ตรวจเพียงเลข

ขอบเขตการตรวจด้วยโปรแกรม: ตัวเลขในตัวอย่างและตารางค่าความจริงตรวจด้วย check_proof.py สูตรผลรวมและอุปนัยตรวจแทนค่าในช่วง 1 ถึง 50 พร้อมฐานที่เริ่ม 0 การแทนค่าจำนวนจำกัดเป็นการตรวจจับความผิดพลาด ไม่ใช่หลักฐานพิสูจน์ข้อความสำหรับจำนวนอนันต์ หลักฐานทั่วไปอยู่ที่เหตุผลและขั้นอุปนัยที่เขียนไว้ในบท

บทที่ 4 ความสัมพันธ์: อ่านคู่ให้เป็นลูกศร แล้วตรวจเงื่อนไข



② อ่านตัวหน้าเป็นต้นลูกศร ③ คู่ที่เลือกเท่านั้นจึงมีลูกศร

บทเซตสอนให้สร้างคู่ที่เป็นไปได้ทั้งหมด บทนี้เลือกเพียงคู่ที่ผ่านกติกา แล้วใช้ลูกศรกับตารางดูว่าคู่เหล่านั้นมีโครงสร้างแบบใด ทุกภาพวางกราฟไว้คู่ตารางเสมอ เพื่อเช็กความหมายจากสองทาง

ขอบเขต: Week 5 ทั้ง 15 หน้า PDF เลขหน้าที่อ้างในบทนี้เป็นลำดับหน้าจริงของไฟล์ เพราะต้นทางมีหน้าที่ใช้เลขพิมพ์ซ้ำกัน สีฟ้าคือข้อมูลตั้งต้น สีส้มคือคู่ที่กำลังตรวจหรือช่องที่ขาด สีเขียวคือผลที่ตรวจแล้ว

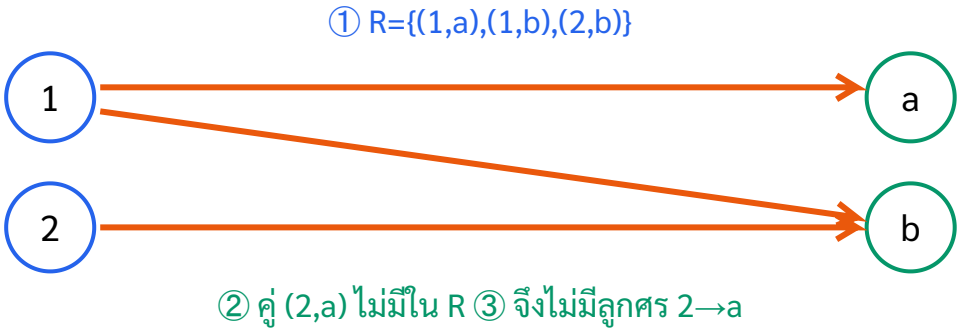
4.1 จากคู่ที่เลือก สู่ลูกศรที่อนุญาต (ต้นทาง หน้า 1)

มีเครื่องส่งสองเครื่องชื่อ 1 และ 2 กับจอรับสองจอชื่อ a และ b อนุญาตให้เครื่อง 1 ส่งไป a และ b ส่วนเครื่อง 2 ส่งไป b เราเขียนรายการทางส่งได้เป็น (1,a), (1,b), (2,b)

ลองคิดก่อนเปิดเฉลย

จากรายการนี้ เครื่อง 2 ส่งไป a ได้ไหม? เครื่อง 1 ส่งไปมากกว่าหนึ่งจอได้ไหม?

เฉลย 2 ส่งไป a ไม่ได้เพราะไม่มีคู่ (2,a) ส่วน 1 ส่งได้สองจอเพราะมีทั้ง (1,a) และ (1,b)



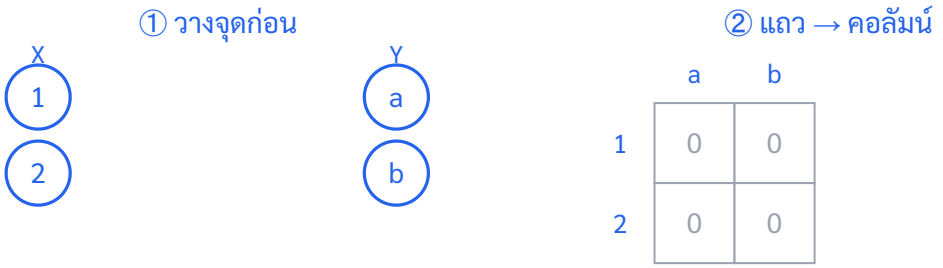
ชุดของคู่ที่เราเลือก เรียกว่า **ความสัมพันธ์ทวิภาค (binary relation)** จาก X ไป Y โดย $R \subseteq X \times Y$ หมายความว่าทุกคู่ใน R ต้องมีตัวหน้ามาจาก X และตัวหลังมาจาก Y เขียน xRy แทน $(x, y) \in R$

คำว่า “ความสัมพันธ์” ไม่บังคับให้ทุกตัวหน้าใช้การได้ และไม่บังคับให้ตัวหน้าหนึ่งตัวมีปลายทางเดียว เราเพียงระบุว่าคู่ใดผ่านหรือไม่ผ่านกติกา

ภาพจุดกับลูกศรเรียกว่า **กราฟมีทิศทาง (directed graph หรือ digraph)** ลูกศรจาก x ไป y แทนคู่ (x,y) ตาราง 0/1 เรียกว่า **เมทริกซ์ของความสัมพันธ์ (relation matrix)** แถวเป็นตัวหน้า คอลัมน์เป็นตัวหลัง ช่องเป็น 1 เมื่อมีคู่ และเป็น 0 เมื่อไม่มี

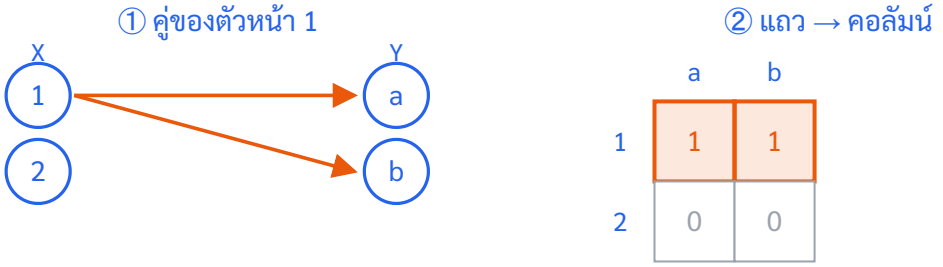
โจทย์ $X = \{1, 2\}, Y = \{a, b\}, R = \{(1, a), (1, b), (2, b)\}$ วาดลูกศรและเติมตาราง

บรรทัด 1 — ตั้งตำแหน่ง วาง 1, 2 ฝั่งต้นทาง และ a, b ฝั่งปลายทาง ตารางเรียงแถว 1, 2 และคอลัมน์ a, b ตามลำดับเดียวกัน



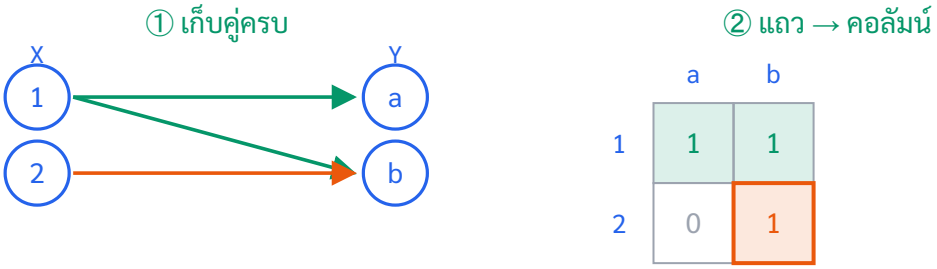
③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 2 — อ่านคู่ของ 1 (1,a) ให้ลูกศร 1→a และใส่ 1 ที่แถว 1 คอลัมน์ a; (1,b) ทำเช่นเดียวกันกับคอลัมน์ b



③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 3 — อ่านคู่ของ 2 (2,b) ให้ลูกศร 2→b และช่องแถว 2 คอลัมน์ b เป็น 1 ช่อง (2,a) ไม่มีคู่จึงคง 0



เช็กกลับ อ่านช่อง 1 กลับเป็นคู่ ได้ (1,a), (1,b), (2,b) ตรงกับ R ไม่มีคู่เกินหรือขาด

อย่าอ่านช่อง (แถว 1, คอลัมน์ b) ย้อนเป็น (b,1) และอย่าวาดเส้นไม่มีหัวลูกศร เพราะจะสูญเสียทิศต้นทาง–ปลายทาง เมื่อเลขหรือชื่อซ้ำกันในสองเซต ให้ดูด้วยว่าจุดนั้นอยู่ฝั่งไหน

ลงมือทำตามนี้

1. เขียนเซตต้นทางและปลายทาง
2. ระบุลำดับแถวกับคอลัมน์ให้ชัด
3. แปลงทุกคู่เป็นลูกศรและช่อง 1 เดียวกัน
4. เติม 0 เฉพาะช่องที่ไม่มีคู่
5. อ่านภาพกลับเป็นเซตคู่แล้วหยุดเมื่อได้ R เดิม

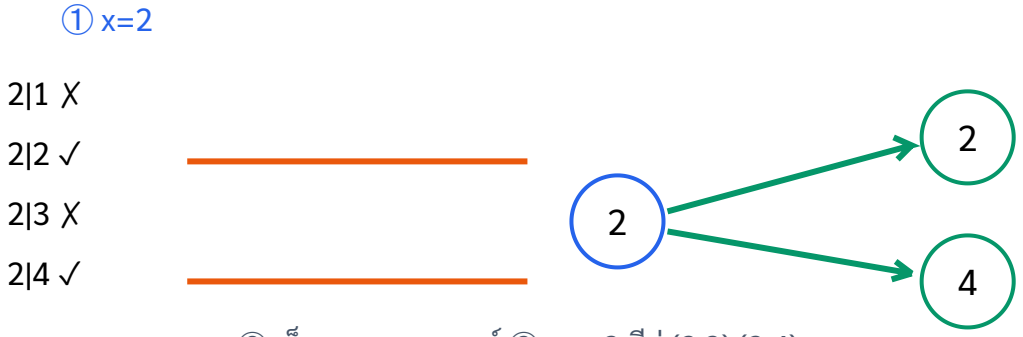
4.2 ลูกศรจากการหารลงตัว (ต้นทาง หน้า 2–3)

ลองเปลี่ยนกล่องต้นทางเป็น $X = \{2, 3, 4, 8\}$ และปลายทางเป็น $Y = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ เราอนุญาตลูกศรจาก x ไป y เมื่อแบ่ง y เป็นกลุ่มละ x แล้วไม่เหลือเศษ เช่น 2 แบ่ง 4 ได้ลงตัว

ลองคิดก่อนเปิดเฉลย

จาก 2 มีลูกศรไป 4 และ 6 ได้ เพราะหารลงตัว แล้ว 8 มีลูกศรไปสมาชิกตัวใดของ Y ได้บ้าง?

เฉลย 8 ไม่มีลูกศรออกไปหาใคร เพราะสมาชิก Y ทุกตัวเป็นบวกและเล็กกว่า 8 จึงไม่มีตัวที่เป็นจำนวนเท่าบวกของ 8



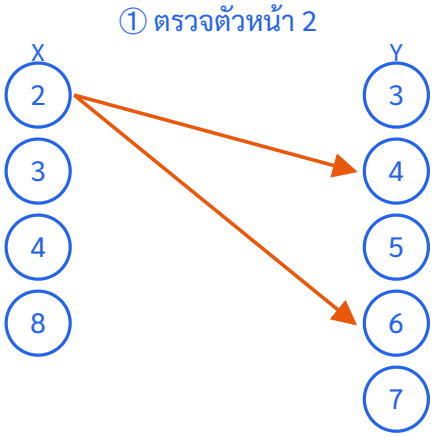
② เก็บเฉพาะเศษศูนย์ ③ แถว 2 มีคู่ (2,2),(2,4) ครบ

กติกา **หารลงตัว (divisibility)** เขียน $x \mid y$ เมื่อมีจำนวนเต็ม k ที่ทำให้ $y = xk$ สำหรับจำนวนบวกที่ใช้ในข้อนี้ เราตรวจโดยดูเศษจากการหาร y ด้วย x

สมาชิกต้นทางที่มีลูกศรออกอย่างน้อยหนึ่งเส้นเรียกว่า **โดเมน (domain)** ของ R สมาชิกปลายทางที่มีลูกศรเข้าอย่างน้อยหนึ่งเส้นเรียกว่า **เรนจ์ (range)** ของ R ทั้งสองอาจเล็กกว่า X และ Y ที่โจทย์กำหนด

โจทย์ตัวอย่าง 3.1 หา R, domain และ range ของความสัมพันธ์ $xRy \iff x \mid y$

บรรทัด 1 — ตรวจแถว 2 3, 5, 7 เหลือเศษ; 4 และ 6 หารด้วย 2 ลงตัว จึงเติมช่องตามภาพ

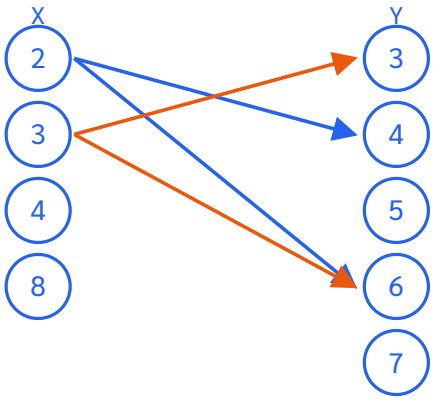


② แถว → คอลัมน์

	3	4	5	6	7
2	0	1	0	1	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 2 — ตรวจแถว 3 3 และ 6 หารด้วย 3 ลงตัว; 4, 5, 7 ไม่ลงตัว จึงเติมช่องตามภาพ

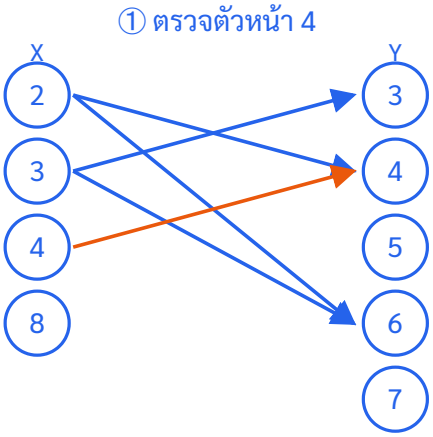


② แถว → คอลัมน์

	3	4	5	6	7
2	0	1	0	1	0
3	1	0	0	1	0
4	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

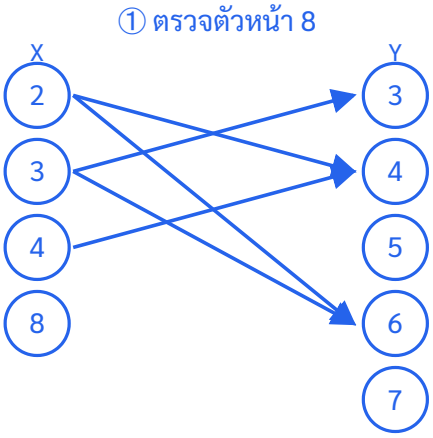
บรรทัด 3 — ตรวจแถว 4 มีเพียง 4 ที่หารด้วย 4 ลงตัว จึงเติมช่องตามภาพ





③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 4 — ตรวจแถว 8 ไม่มีตัวใดใน Y หารด้วย 8 ลงตัว จึงเติมช่องตามภาพ



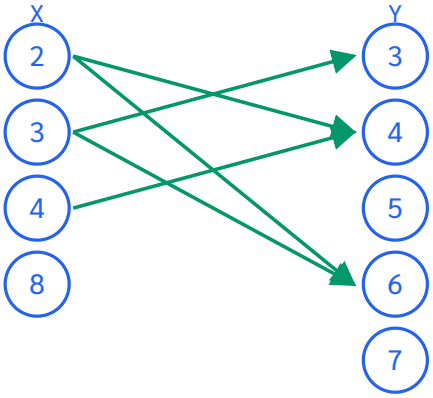


③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 5 — รวมคู่ $R = \{(2,4),(2,6),(3,3),(3,6),(4,4)\}$

บรรทัด 6 — อ่านชื่อที่ใช้งาน แถวที่มี 1 คือ 2, 3, 4 จึง $\mathrm{Dom}(R) = \{2,3,4\}$ คอลัมน์ที่มี 1 คือ 3, 4, 6 จึง $\mathrm{Ran}(R) = \{3,4,6\}$

① อ่านแถวและคอลัมน์



② แถว → คอลัมน์

	3	4	5	6	7
2	0	1	0	1	0
3	1	0	0	1	0
4	0	1	0	0	0
8	0	0	0	0	0

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

เช็กกลับ คู่ทั้งห้าหารลงตัวจริง: $4 = 2 \cdot 2$, $6 = 2 \cdot 3$, $3 = 3 \cdot 1$, $6 = 3 \cdot 2$, $4 = 4 \cdot 1$ แถว 8 เป็นศูนย์ทั้งหมดและคอลัมน์ 5, 7 เป็นศูนย์ทั้งหมด จึงไม่อยู่ใน domain/range

อย่าตอบ domain ว่า X ทั้งกล่องโดยไม่ตรวจแถว 8 และอย่าตอบ range ว่า Y ทั้งกล่องโดยไม่ตรวจคอลัมน์ 5 กับ 7 นิยามถามเฉพาะสมาชิกที่ปรากฏในคู่อย่างน้อยหนึ่งครั้ง

ลงมือทำตามนี้

1. ตรึงตัวหน้าหนึ่งค่า
2. ลองกับตัวหลังทุกค่าโดยคำนวณหารลงตัวจริง
3. บันทึกคู่แล้วทำครบทุกแถว
4. อ่าน domain จากแถวที่มี 1 และ range จากคอลัมน์ที่มี 1
5. เช็กคู่กลับกับกติกาหารลงตัวทุกคู่ก่อนหยุด

4.3 เมื่อสองฝั่งเป็นกล่องเดียวกัน (ต้นทาง หน้า 3)

ใช้เลข 1, 2, 3, 4 เป็นทั้งต้นทางและปลายทาง คราวนี้ลากลูกศรจาก x ไป y เมื่อ x ไม่เกิน y เลข 1 ไปหาได้ทุกตัว แต่เลข 4 ไปหาได้เพียงตัวมันเอง

ลองคิดก่อนเปิดเฉลย

มีคู่ (3,2) ไหม? แล้ว (3,3) ล่ะ? เครื่องหมาย “ไม่เกิน” รับกรณีเท่ากันหรือไม่?

เฉลย ไม่มี (3,2) เพราะ 3 มากกว่า 2 แต่มี (3,3) เพราะ 3≤3 จริง เครื่องหมาย ≤ รับกรณีเท่ากัน

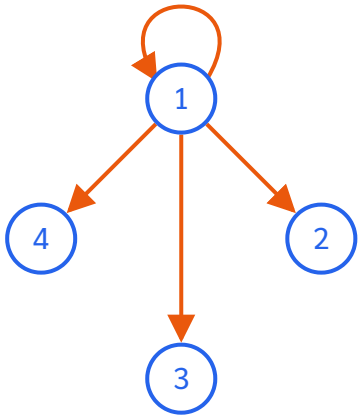
เมื่อเซตต้นทางและปลายทางเป็นเซต X เดียวกัน เรียกว่า **ความสัมพันธ์บน X (relation on X)** เราใช้จุดชุดเดียวแทน X ได้ คู่ (x,x) วาดเป็นลูกศรกลับเข้าตัวเอง เรียกว่า **วงวน (self-loop)**

ในตาราง คู่ (x,x) อยู่บนแนวทแยงจากซ้ายบนไปขวาล่าง การเห็นวงวนทุกจุดจึงตรงกับการมี 1 ทุกช่องบนแนวทแยง

โจทย์ตัวอย่าง 3.2 $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $xRy \iff x \leq y$ แจกแจง R และหา domain/range

บรรทัด 1 — เริ่มด้วย 1 รับตัวหลัง 1, 2, 3, 4 เพราะทุกตัวไม่เล็กกว่า 1

① เติมแถว 1



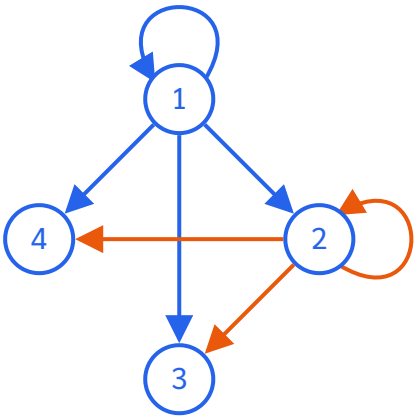
② แถว → คอลัมน์

	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 2 — เริ่มด้วย 2 รับตัวหลัง 2, 3, 4 เพราะทุกตัวไม่เล็กกว่า 2

① เติมแถว 2



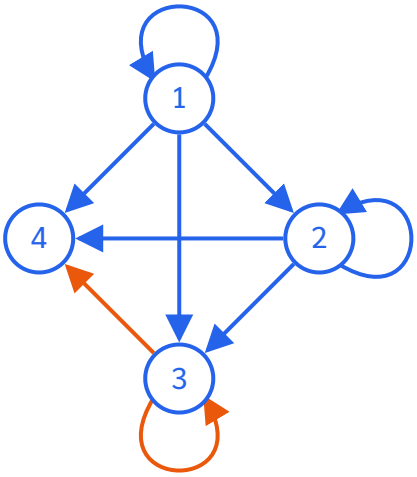
② แถว → คอลัมน์

	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	0	1	1	1
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 3 — เริ่มด้วย 3 รับตัวหลัง 3, 4 เพราะทุกตัวไม่เล็กกว่า 3

① เติมแถว 3



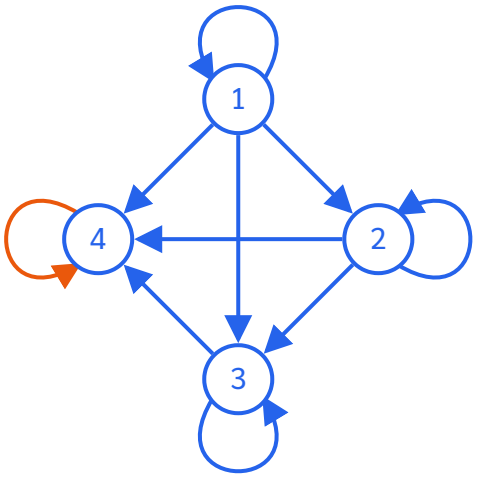
② แถว → คอลัมน์

	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	0	1	1	1
3	0	0	1	1
4	0	0	0	0

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 4 — เริ่มด้วย 4 รับตัวหลัง 4 เพราะทุกตัวไม่เล็กกว่า 4

① เติมแถว 4



② แถว → คอลัมน์

	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	0	1	1	1
3	0	0	1	1
4	0	0	0	1

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 5 — รวมคู่ $R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\}$

บรรทัด 6 — อ่านขอบเขตที่ใช้จริง ทุกแถวและทุกคอลัมน์มี 1 อย่างน้อยบนแนวทแยง จึง domain และ range เป็น $\{1,2,3,4\}$ ทั้งคู่

เช็กกลับ มีคู่ทั้งหมด $4+3+2+1=10$ คู่ ทุกคู่มีตัวหน้าไม่เกินตัวหลัง และช่องใต้แนวทแยงเป็นศูนย์เพราะตัวหน้ามากกว่าตัวหลัง

ถ้าอ่าน ≤ เป็น < จะทำวงวนทั้งสี่หาย และจำนวนคู่ลดลง การใส่ตัวเองหรือไม่ใส่ตัวเองไม่ใช่เรื่องตกแต่งภาพ แต่เปลี่ยนความสัมพันธ์จริง

ลงมือทำตามนี้

1. ถ้าโจทย์บอก “บน X” ให้ใช้ X เป็นทั้งแถวและคอลัมน์
2. คงกรณีเท่ากันเมื่อใช้ ≤
3. ไล่ทุกแถวและเขียนวงวนจากคู่ (x,x)
4. นับคู่และตรวจบริเวณศูนย์ในตารางก่อนหยุด

4.4 ทุกจุดต้องมีลูกศรกลับตัวเอง (ต้นทาง หน้า 4–5)

มีสี่จุด a, b, c, d ลูกศรที่มีคือ a→a, b→c, c→b, d→d ถ้ากติกาต้องการให้ทุกจุดส่งกลับหาตัวเองได้ จุด b และ c ยังทำไม่ได้ ถึงจะส่งถึงกันก็ไม่ใช่การส่งกลับตัวเองในหนึ่งเส้น

ลองคิดก่อนเปิดเฉลย

ชี้ช่อง (b,b) ในตาราง: ต้องเป็น 0 หรือ 1 จากรายการเดิม? ความต้องการ “ทุกจุดมีวงวน” ผ่านหรือยัง?

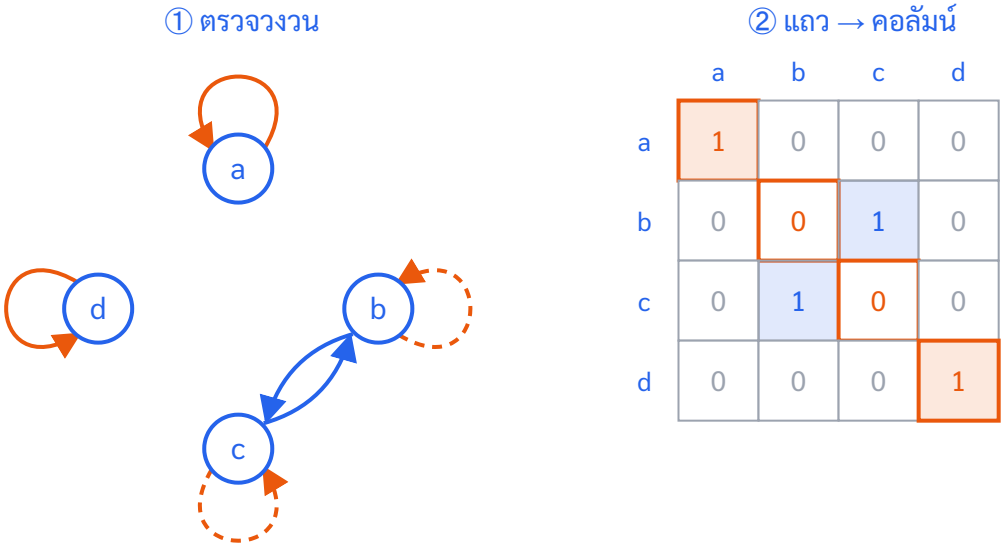
เฉลย ช่อง (b,b) เป็น 0 จึงไม่ผ่านแล้ว เพียงจุดเดียวที่ไม่มีวงวนก็พอจะปฏิเสธเงื่อนไขทุกจุดได้

ความสัมพันธ์ที่ทุกสมาชิกของ X สัมพันธ์กับตัวเองเรียกว่า **สะท้อน (reflexive)** เงื่อนไขคือทุก $a \in X$ ต้องมี $(a, a) \in R$ ในภาพต้องมีวงวนทุกจุด ในตารางต้องเป็น 1 ตลอดแนวทแยง

ต้องตรวจสมาชิกของ X ทุกตัว แม้สมาชิกนั้นไม่มีลูกศรเกี่ยวข้องเลย เพราะคำว่า “ทุกสมาชิก” อ้างถึงเซต X ที่โจทย์กำหนด ไม่ใช่อ้างเฉพาะ domain ของ R

โจทย์ตัวอย่าง 3.3 — ส่วนสะท้อน $X = \{a, b, c, d\}$, $R = \{(a, a), (b, c), (c, b), (d, d)\}$

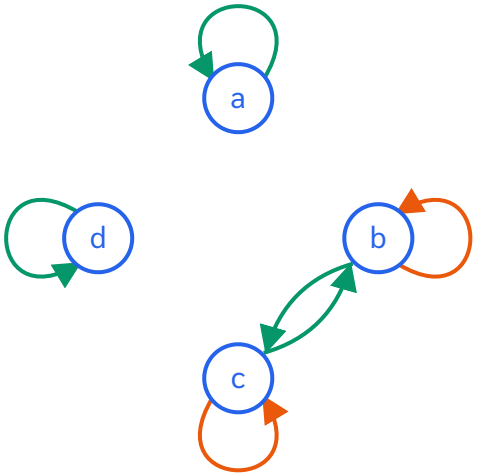
บรรทัด 1 — อ่านแนวทแยง (a,a) มี; (b,b) ขาด; (c,c) ขาด; (d,d) มี



บรรทัด 2 — สรุปด้วยตัวแย้ง เลือก b เป็นหลักฐาน: $b \in X$ แต่ $(b, b) \notin R$ ดังนั้น R ไม่สะท้อน

บรรทัด 3 — ดูว่าต้องแก้ตรงไหน ถ้าต้องการให้สะท้อนโดยเก็บลูกศรเก่าทั้งหมด จะต้องเพิ่ม (b,b) และ (c,c) ไม่มีเหตุผลต้องเพิ่มคู่ระหว่างจุดอื่น

① หลังเติมที่ขาด



② แถว → คอลัมน์

	a	b	c	d
a	1	0	0	0
b	0	1	1	0
c	0	1	1	0
d	0	0	0	1

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

เช็กกลับ ความสัมพันธ์เดิมไม่สะท้อน ส่วนภาพหลังแก้มี 1 ทุกช่องแนวทแยงจึงสะท้อน แยกชื่อ “เดิม” กับ “หลังแก้” ให้ชัด: การวาดเส้นประในภาพแรกยังไม่ถือว่ามีคู่จริง

มีวงวนบางจุดไม่พอสำหรับคำว่า “ทุกจุด” และลูกศร b→c→b เป็นเส้นทางสองช่วง ไม่ใช่คู่ (b,b) ที่ต้องมีใน R โดยตรง

ลงมือทำตามนี้

1. เขียนสมาชิก X ทุกตัว
2. ตรวจคู่ (x,x) ทีละตัวบนแนวทแยง
3. ถ้าขาดแม้หนึ่งคู่ สรุปไม่สะท้อนพร้อมชื่อตัวแย้ง
4. ถ้าครบทุกตัวจึงสรุปสะท้อนแล้วหยุด

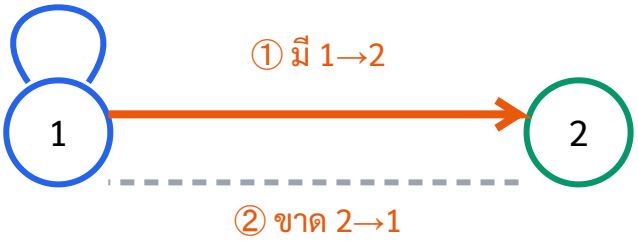
4.5 มีไปแล้วต้องมีกลับ (ต้นทาง หน้า 4–5)

กลับมาที่ลูกศรเดิม b→c และ c→b ถ้าทางไปมี เราพบทางกลับด้วย ส่วน a→a กลับทิศก็ยังเป็นเส้นเดิม ไม่จำเป็นต้องวาดวงวนซ้ำอีกเส้น

ลองคิดก่อนเปิดเฉลย

ถ้าลบ c→b ออก แต่คง b→c ไว้ เงื่อนไข “มีไปต้องมีกลับ” จะพังตรงคู่ใด?

เฉลย พังที่ (b,c) เพราะมีคู่นี้ แต่ไม่มีคู่กลับ (c,b)



③ แม้มีวงวน 1→1 ก็ยังไม่ symmetric

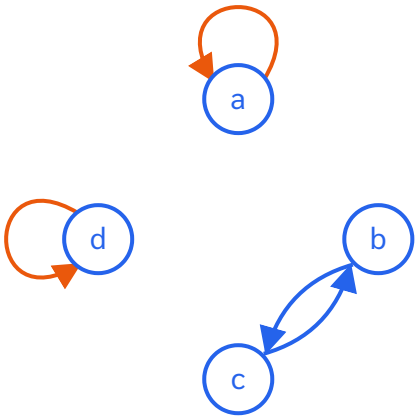
ความสัมพันธ์ที่ทุกลูกศรมีลูกศรกลับคู่กันเรียกว่า **สมมาตร (symmetric)**: ถ้า $(a, b) \in R$ ต้องมี $(b, a) \in R$ ในตาราง ค่าแถว a คอลัมน์ b ต้องเท่ากับค่าแถว b คอลัมน์ a

เงื่อนไขนี้เริ่มจากคู่ที่มีอยู่ จึงไม่เรียกร้องให้ทุกคู่ใน $X \times X$ ต้องเกิดขึ้น ถ้าสองทิศไม่มีทั้งคู่ ก็ยังไม่ทำผิดกฎ “มีไปต้องมีกลับ”

โจทย์ตัวอย่าง 3.3 — ส่วนสมมาตร ใช้ $R = \{(a, a), (b, c), (c, b), (d, d)\}$

บรรทัด 1 — ตรวจวงวน คู่กลับของ (a,a) คือ (a,a) ที่มีอยู่แล้ว คู่กลับของ (d,d) คือ (d,d) ที่มีอยู่แล้ว

① วงวนกลับเป็นตัวเอง



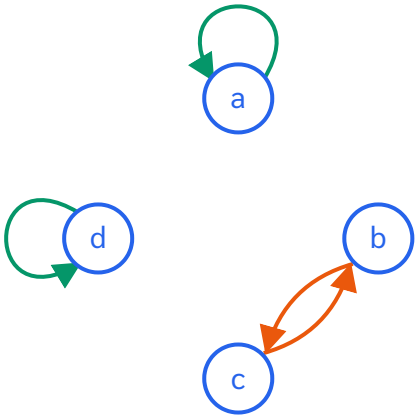
② แถว → คอลัมน์

	a	b	c	d
a	1	0	0	0
b	0	0	1	0
c	0	1	0	0
d	0	0	0	1

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 2 — ตรวจคู่ต่างจุด (b,c) มีคู่กลับ (c,b) และ (c,b) มีคู่กลับ (b,c) ครบ

① สองทิศครบ



② แถว → คอลัมน์

	a	b	c	d
a	1	0	0	0
b	0	0	1	0
c	0	1	0	0
d	0	0	0	1

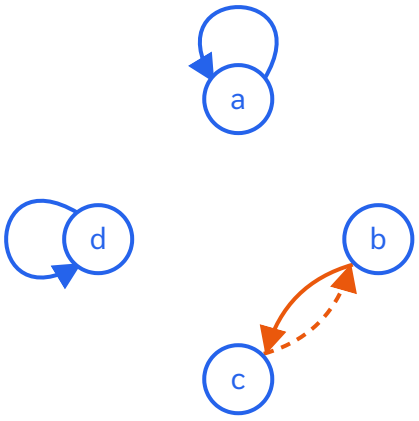
③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 3 — สรุป ตรวจครบทั้งสี่คู่แล้ว ทุกคู่มีคู่กลับ จึง R สมมาตร

เช็กกลับ ตารางสะท้อนข้ามแนวทแยงแล้วตัวเลขตรงกันทุกตำแหน่ง ช่อง (b,b) และ (c,c) เป็น 0 ก็ได้ เพราะสมมาตรไม่ได้บังคับวงวน

R สมมาตรแต่ไม่สะท้อนได้ ดังในตัวอย่างนี้ การไม่มีวงวน b ไม่ทำให้สมมาตรพัง อีกทางหนึ่ง ถ้ามี b→c แต่ไม่มี c→b แม้จุดอื่นจะครบทั้งหมดก็ไม่สมมาตร

① ตัวอย่างที่พัง



② แถว → คอลัมน์

	a	b	c	d
a	1	0	0	0
b	0	0	1	0
c	0	0	0	0
d	0	0	0	1

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0 · เส้นประคือช่องที่ขาด

ลงมือทำตามนี้

1. เริ่มจากลูกศรที่มีอยู่จริงทีละเส้น
2. สลับต้นกับปลายแล้วหาคู่กลับ
3. วงวนใช้ตัวมันเองเป็นคู่กลับ
4. พบคู่กลับขาดให้หยุดพร้อมคู่แย้ง; ถ้าครบทุกเส้นจึงสรุปสมมาตร

4.6 ห้ามสองทิศระหว่างคนละจุด (ต้นทาง หน้า 4–5)

คราวนี้ตั้งกติกาอีกแบบ: ห้ามจุดต่างกันสองจุดมีลูกศรไปกลับครบคู่ วงวนยังอนุญาต เพราะต้นกับปลายเป็นจุดเดียวกัน

ลองคิดก่อนเปิดเฉลย

คู่ b→c กับ c→b ใน R เดิมผ่านกติกาใหม่นี้ไหม? วงวน a→a ละเมิดหรือไม่?

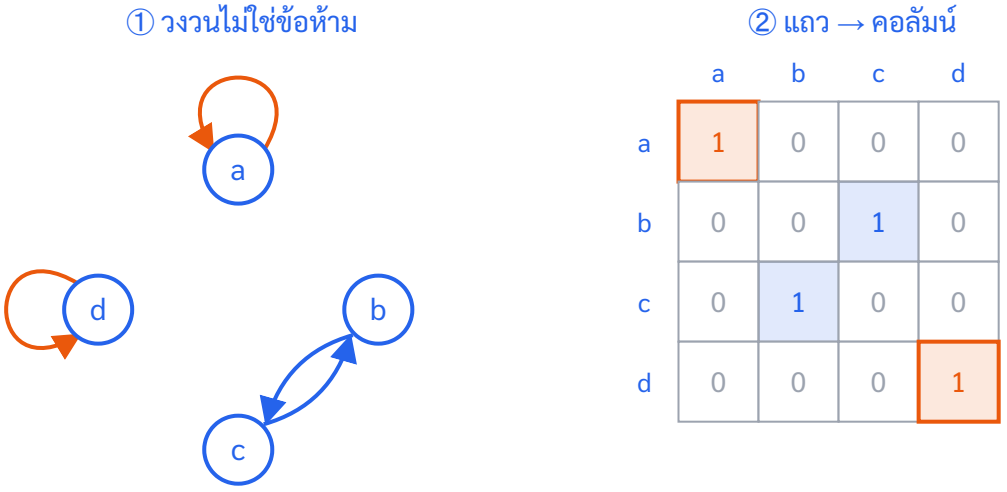
เฉลย b กับ c เป็นคนละจุด จึงละเมิดเมื่อมีทั้งไปและกลับ แต่วงวน a→a ไม่ละเมิดเพราะต้นกับปลายเหมือนกัน

กติกานี้เรียกว่า **ปฏิสมมาตร (antisymmetric)**: ถ้า $(a, b) \in R$ และ $(b, a) \in R$ แล้วต้องมี $a = b$ พูดอีกแบบคือเมื่อ $a \neq b$ จะมีสองทิศพร้อมกันไม่ได้

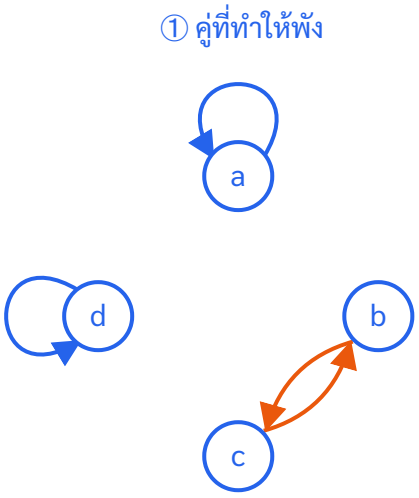
ชื่ออาจชวนให้คิดว่าแปลว่า “ไม่สมมาตร” แต่จริง ๆ เป็นคนละเงื่อนไข สมมาตรถามว่าคู่กลับครบไหม ส่วนปฏิสมมาตรถามว่ามีคู่กลับระหว่างจุดต่างกันจนเป็นข้อห้ามหรือไม่

โจทย์ตัวอย่าง 3.3 — ส่วนปฏิสมมาตร ใช้ R เดิมบน $\{a, b, c, d\}$

บรรทัด 1 — แยกวงวน (a,a) และ (d,d) ไม่ทำผิด เพราะแต่ละคู่มีต้นเท่าปลาย



บรรทัด 2 — หาสองทิศต่างจุด พบ (b,c) และ (c,b) พร้อมกัน โดย $b \neq c$



② แถว → คอลัมน์

	a	b	c	d
a	1	0	0	0
b	0	0	1	0
c	0	1	0	0
d	0	0	0	1

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 3 — สรุป R ไม่เป็นปฏิสมมาตร ใช้ b,c และลูกศรสองทิศเป็นหลักฐานครบ

เช็กกลับ ช่อง (b,c) กับ (c,b) เป็น 1 พร้อมกันนอกแนวทแยง นี่ตรงกับข้อห้ามพอดี จึงไม่จำเป็นต้องไล่ต่อเมื่อพบตัวแย้ง

การมีลูกศรทางเดียวไม่ได้ทำให้สมมาตร แต่ไม่ขัดกับปฏิสมมาตร และถ้ามีเพียงวงวนทั้งเซต จะเป็นทั้งสมมาตรและปฏิสมมาตรได้ เราจะตรวจกรณีนี้เต็ม ๆ หลังหัวข้อถัดไป

ลงมือทำตามนี้

1. ตัดวงวนออกจากรายการที่ต้องหาคู่ละเมิด
2. เลือกจุดต่างกันทีละคู่
3. ตรวจว่ามีลูกศรทั้งสองทิศพร้อมกันหรือไม่
4. พบคู่ไปกลับต่างจุดให้สรุปไม่เป็น; ถ้าไม่มีเลยจึงเป็นปฏิสมมาตร

4.7 มีสองช่วงแล้วต้องมีลูกศรตรง (ต้นทาง หน้า 4–5)

ถ้าเดินจากจุดแรกไปจุดกลางได้ และจากจุดกลางไปจุดท้ายได้ กติกาใหม่เรียกร้องลูกศรตรงจากจุดแรกไปจุดท้ายด้วย ลอง b→c→b จุดแรกกับจุดท้ายกลับเป็น b เดียวกัน ลูกศรตรงที่ต้องมีจึงเป็นวงวน b→b

ลองคิดก่อนเปิดเฉลย

R เดิมมี b→c และ c→b แต่ไม่มี b→b กติกา “สองช่วงต้องมีทางตรง” ผ่านไหม?

เฉลย ไม่ผ่าน เพราะเส้นทางสองช่วงมีอยู่จริง แต่ลูกศรตรงที่ต้องตามมายังขาด

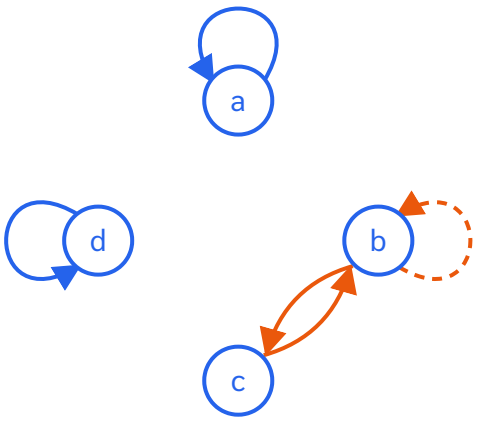
กติกานี้เรียกว่า **ถ่ายทอด (transitive)**: ถ้า $(a,b) \in R$ และ $(b,c) \in R$ แล้ว $(a,c) \in R$ ต้องตรวจทุกเส้นทางที่ต่อกันได้สองช่วง จุด a, b, c ไม่จำเป็นต้องต่างกัน

ต้องมีคู่ (a,c) อยู่ใน R โดยตรง การเดินถึงกันได้หลายช่วงอย่างเดียวไม่พอ เมื่อใช้ตาราง ให้หา 1 ที่ (a,b) แล้วต่อไปดู 1 ในแถว b ถ้าพบที่คอลัมน์ c ช่อง (a,c) ต้องเป็น 1 ด้วย

โจทย์ตัวอย่าง 3.3 — ส่วนถ่ายทอด ใช้ $R = \{(a,a),(b,c),(c,b),(d,d)\}$

บรรทัด 1 — ต่อผ่าน c มี (b,c) และ (c,b) จึงต้องการ (b,b) แต่ไม่มี

① b → c → b



② แถว → คอลัมน์

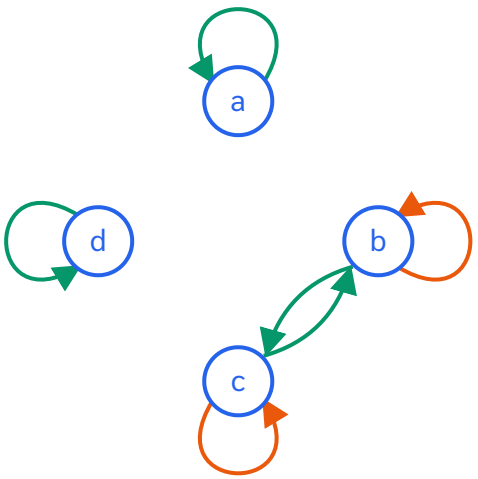
	a	b	c	d
a	1	0	0	0
b	0	0	1	0
c	0	1	0	0
d	0	0	0	1

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0 · เส้นประคือช่องที่ขาด

บรรทัด 2 — สรุปด้วยสามตำแหน่ง เลือก $a_0 = b, b_0 = c, c_0 = b$ เป็นตัวแย้งต่อเงื่อนไขถ่ายทอด จึง R ไม่ถ่ายทอด ตัวหน้าและตัวท้ายซ้ำกันได้

บรรทัด 3 — ตรวจอีกทางเพื่อเข้าใจช่องขาด เส้นทาง c→b→c ต้องการ (c,c) ซึ่งขาดด้วย ถ้าเติมทั้ง (b,b) และ (c,c) ลงในตัวอย่างนี้ เส้นทางที่เหลือจะมีทางตรงครบ

① เติมทางตรงที่ขาด



② แถว → คอลัมน์

	a	b	c	d
a	1	0	0	0
b	0	1	1	0
c	0	1	1	0
d	0	0	0	1

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

เช็กกลับ หลังเติม กลุ่ม b,c มีทุกคู่ภายในกลุ่ม เส้นทางใดที่เริ่มและจบในกลุ่มจึงมีทางตรง ส่วน a,d มีเพียงวงวนของตนเอง ไม่มีเส้นทางข้ามกลุ่มให้ตรวจเพิ่ม

อย่าบังคับให้สามจุดต่างกัน ถ้าข้ามเส้นทาง b→c→b จะพลาดข้อผิดหลักของข้อนี้ อีกข้อผิดคือเห็นภาพเดินถึงแล้วนับว่ามีทางตรงเอง ทั้งที่ตารางช่องนั้นยังเป็น 0

ลงมือทำตามนี้

1. เลือกเส้นแรก a→b ที่มีจริง
2. หาเส้นที่สองทุกเส้นที่เริ่มจาก b
3. ตรวจช่อง (a,c) ของปลายที่ไปถึงทุกตัว
4. พบช่อง 0 ให้สรุปไม่ถ่ายทอดพร้อมเส้นสองช่วง
5. ถ้าไม่พบช่องขาดหลังตรวจครบทุกคู่เส้น จึงถ่ายทอด

4.8 ภาพเดียวผ่านสี่สมบัติได้ (ต้นทาง หน้า 6)

เหลือเพียงสามจุด a, b, c แต่ละจุดมีวงวนของตัวเอง ไม่มีเส้นข้ามไปจุดอื่นเลย ภาพนี้ช่วยแยกสมบัติทั้งสี่ออกจากกัน โดยไม่ต้องมีลูกศรจำนวนมาก

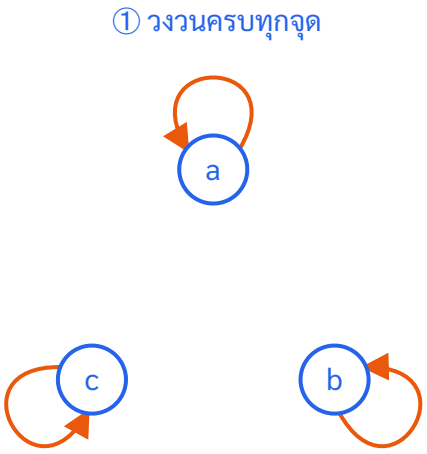
ลองคิดก่อนเปิดเฉลย

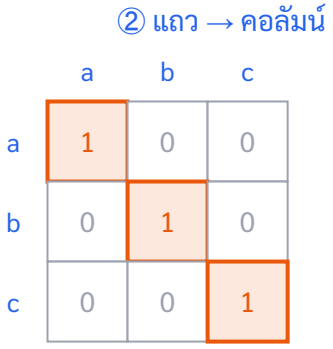
ภาพที่มีแค่วงวน ต้องมีเส้น a→b หรือ b→a เพิ่มเพื่อให้สมมาตรไหม? และมีคู่ไปกลับระหว่างจุดต่างกันที่ผิดปฏิสมมาตรไหม?

เฉลย ไม่ต้องเพิ่มเส้น เพราะวงวนมีคู่กลับเป็นตัวมันเองอยู่แล้ว และไม่มีคู่ไปกลับระหว่างจุดต่างกันให้ละเมิด

ความสัมพันธ์ที่มีทุกคู่ (x, x) และไม่มีคู่อื่น เรียกว่า **ความสัมพันธ์เอกลักษณ์ (identity relation)** บน X ในตัวอย่าง 3.4 คือ $R = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$ เราจะตรวจทีละเงื่อนไขแทนการเดาจากชื่อ

บรรทัด 1 — สะท้อน a, b, c มีวงวนครบทุกตัว จึงสะท้อน

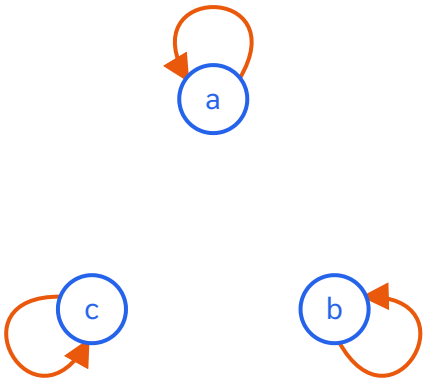




③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 2 — สมมาตร คู่กลับของ (a,a), (b,b), (c,c) เป็นคู่เดิมทั้งสาม จึงสมมาตร

① กลับทิศแล้วเหมือนเดิม



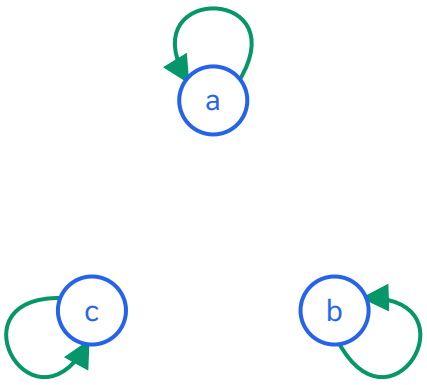
② แถว → คอลัมน์

	a	b	c
a	1	0	0
b	0	1	0
c	0	0	1

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 3 — ปฏิสมมาตร ไม่มีคู่นอกแนวทแยงเลย จึงไม่มีลูกศรสองทิศระหว่างจุดต่างกัน และเป็นปฏิสมมาตร

① นอกแนวทแยงว่าง



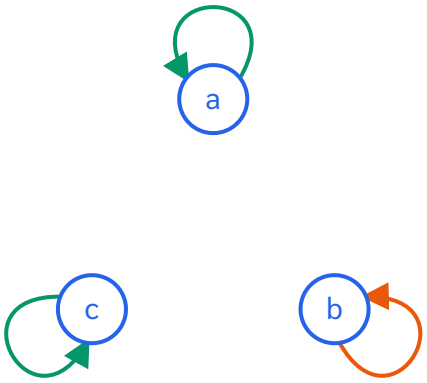
② แถว → คอลัมน์

	a	b	c
a	1	0	0
b	0	1	0
c	0	0	1

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 4 — ถ่ายทอด เส้นทางสองช่วงมีเพียง a→a→a, b→b→b, c→c→c ทุกทางมีลูกศรตรงซึ่งเป็นวงวนเดิม จึงถ่ายทอด

① ต่อทางแล้วคงวงวน



② แถว → คอลัมน์

	a	b	c
a	1	0	0
b	0	1	0
c	0	0	1

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

เช็กกลับ ผลคือสะท้อน จริง; สมมาตร จริง; ปฏิสมมาตร จริง; ถ่ายทอด จริง การผ่านสมมาตรพร้อมปฏิสมมาตรเกิดได้จริง

ถ้าแปล antisymmetric ว่า “ไม่ symmetric” จะทำนายผิดว่าภาพนี้ผ่านได้อย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น ให้กลับไปอ่านเงื่อนไขคู่ต่างจุด จะเห็นว่าทั้งสองสมบัติอยู่ร่วมกันได้

ลงมือทำตามนี้

1. เขียนเงื่อนไขแต่ละสมบัติแยกกัน
2. ตรวจวงวน คู่กลับ คู่กลับต่างจุด และเส้นทางสองช่วงตามลำดับ
3. ไม่ใช้ผลของสมบัติหนึ่งตัดสินอีกสมบัติโดยไม่มีเหตุผล
4. สรุปสี่คำตอบพร้อมหลักฐานแล้วหยุด

4.9 ทำไมการหารลงตัวผ่านสามสมบัติ (ต้นทาง หน้า 7)

เลขบวกใด ๆ หารตัวเองลงตัว เช่น 2 หาร 2 และ 4 หาร 4 ถ้า 2 หาร 4 ลงตัว ไม่ได้แปลว่า 4 จะหาร 2 ลงตัวด้วย ลูกศรของการหารลงตัวจึงมีทิศที่ต้องระวัง

ลองคิดก่อนเปิดเฉลย

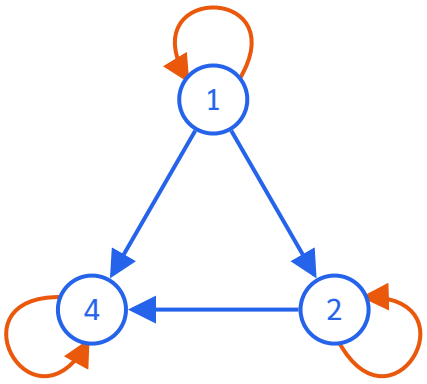
มี 2→4 เพราะ $4 = 2 \cdot 2$ แล้วมี 4→2 หรือไม่? ตัวอย่างนี้พอบอกอะไรเกี่ยวกับเงื่อนไขมีไปต้องมีกลับ?

เฉลย ไม่มี 4→2 เพราะ 2/4 ไม่เป็นจำนวนเต็ม จึงใช้คู่นี้พิสูจน์ได้ว่าความสัมพันธ์หารลงตัวบนจำนวนเต็มบวกไม่สมมาตร

ตัวอย่าง 3.6 ให้ความสัมพันธ์ $aRb \iff a \mid b$ บน $\mathbb{Z}^+$ ซึ่งคือจำนวนเต็มบวกทั้งหมด เราไม่อาจตรวจทีละตัวจนครบจำนวนอนันต์ได้ จึงใช้ a, b, c แทนจำนวนบวกใด ๆ แล้วอธิบายเหตุผลที่ครอบคลุมทุกค่า

บรรทัด 1 — สะท้อน ให้ a เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ จะมี $a = a \cdot 1$ จึง $a \mid a$ ทุกตัว ความสัมพันธ์จึงสะท้อน

① ตัวอย่างของ a หาร a



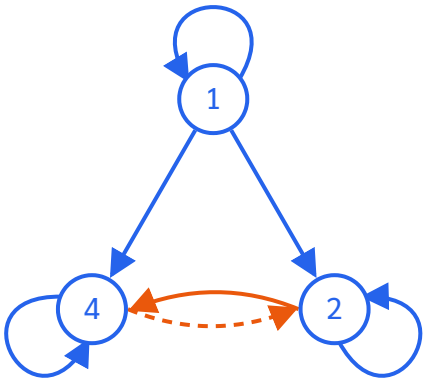
② แถว → คอลัมน์

	1	2	4
1	1	1	1
2	0	1	1
4	0	0	1

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 2 — ไม่สมมาตร $2 \mid 4$ แต่ $4 \nmid 2$ มีไปแต่ไม่มีกลับ จึงไม่สมมาตร

① คู่แย้ง 2 กับ 4



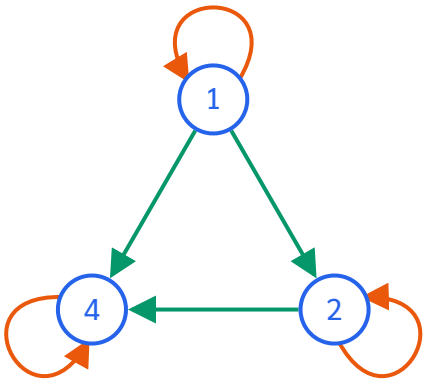
② แถว → คอลัมน์

	1	2	4
1	1	1	1
2	0	1	1
4	0	0	1

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0 · เส้นประคือช่องที่ขาด

บรรทัด 3 — ปฏิสมมาตร สมมติ $a \mid b$ และ $b \mid a$ จึง $b = am, a = bn$ สำหรับจำนวนเต็มบวก m,n แทนสมการแรกลงสมการหลังได้ $a = amn$ เพราะ a เป็นบวกจึงหารด้วย a ได้ $mn = 1$ จำนวนเต็มบวกสองตัวคูณได้ 1 ต้องเป็น $m = n = 1$ จึง $a = b$

① สองทิศมีแค่วงวน



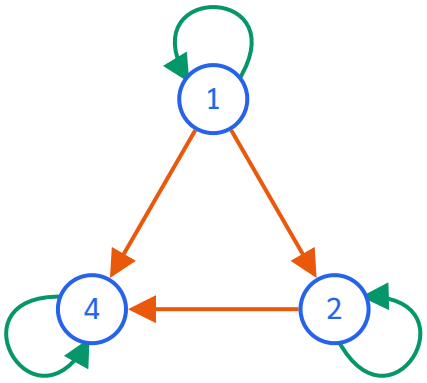
② แถว → คอลัมน์

	1	2	4
1	1	1	1
2	0	1	1
4	0	0	1

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 4 — ถ่ายทอด สมมติ $a \mid b$ และ $b \mid c$ เขียน $b = am, c = bn$ ได้ $c = (am)n = a(mn)$ โดย mn ยังเป็นจำนวนเต็ม จึง $a \mid c$

① 1 → 2 → 4 มี 1 → 4



② แถว → คอลัมน์

	1	2	4
1	1	1	1
2	0	1	1
4	0	0	1

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

เช็กกลับ ภาพใช้ 1,2,4 เป็นตัวอย่างของเหตุผล แต่ข้อสรุปทั้งสามที่เป็นจริงมาจาก a,b,c ใด ๆ ส่วนความไม่สมมาตรต้องการตัวแย้งจริงเพียงคู่เดียว

ขอบเขต “บวก” สำคัญต่อปฏิสมมาตร ถ้าใช้จำนวนเต็มที่มีลบด้วย จะมี $2 \mid -2$ และ $-2 \mid 2$ ทั้งที่ $2 \neq -2$ อย่านำข้อสรุปไปใช้กับโดเมนที่เปลี่ยนแล้วโดยไม่ตรวจเหตุผล

ลงมือทำตามนี้

1. เขียนโดเมนให้ชัดว่าเป็นจำนวนเต็มบวก
2. ข้อที่อ้างว่าจริงใช้ตัวแปรแทนสมาชิกใด ๆ
3. แปลงหารลงตัวเป็นสมการจำนวนเท่า
4. ข้อที่อ้างว่าเท็จให้คู่แย้งที่อยู่ในโดเมนจริง
5. แยกภาพตัวอย่างกับหลักฐานทั่วไปแล้วสรุปผลทั้งสี่

4.10 เรียงได้บางคู่ก็เป็นอันดับได้ (ต้นทาง หน้า 8–9)

ใช้เลข 1 ถึง 6 เราบอกว่า 2 มาก่อน 4 ในความหมาย “2 หาร 4 ลงตัว” ได้ แต่ 2 กับ 3 ไม่มีใครหารอีกฝ่ายลงตัว เราจึงไม่จำเป็นต้องบังคับทุกคู่ให้เรียงต่อกันเป็นแถวเดียว

ลองคิดก่อนเปิดเฉลย

กติกาหารลงตัวมีวงวนทุกตัวไหม? มีสองทิศระหว่างจำนวนบวกต่างกันไหม? ถ้า 1 หาร 2 และ 2 หาร 4 เรามี 1 หาร 4 หรือไม่?

เฉลย มีวงวนทุกตัว ไม่มีสองทิศระหว่างจำนวนบวกต่างกัน และ 1 หาร 4 ลงตัว จึงผ่านสะท้อน ปฏิสมมาตร และถ่ายทอด



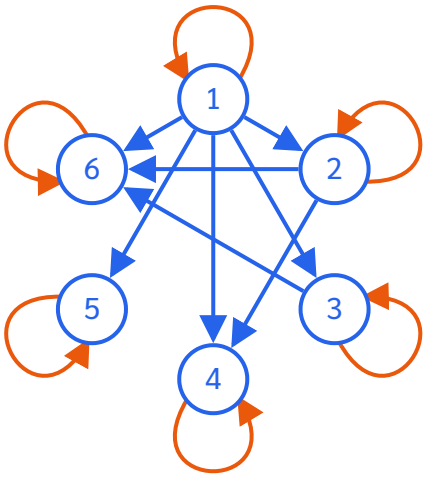
ผ่านครบสามช่องจึงเป็น partial order

ความสัมพันธ์ที่ผ่านทั้ง **สะท้อน ปฏิสมมาตร และถ่ายทอด** เรียกว่า **อันดับบางส่วน (partial order)** อาจใช้ $x \preceq y$ แทน $(x, y) \in R$ สัญลักษณ์นี้อ่านตามกติกาที่โจทย์กำหนด ไม่ได้หมายถึง “ค่าตัวเลขไม่เกิน” เสมอไป เหตุผลของสามเงื่อนไขคือแต่ละตัวไม่ขัดกับตัวเอง ไม่มีคนละตัววนย้อนจนบังคับว่าใครมาก่อนใครทั้งสองทาง และเส้นทางที่ต่อกันต้องสอดคล้องกับการเปรียบเทียบปลายทาง

โจทย์ตัวอย่าง 3.8 — ข้อ 1 การหารลงตัวบน $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ เป็นอันดับบางส่วนหรือไม่?

บรรทัด 1 — สะท้อน ทุก a หารตัวเองลงตัว มีวงวนครบ 1 ถึง 6

① ตรวจแนวทแยง



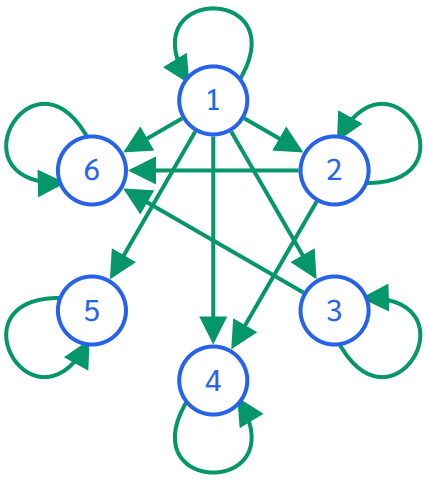
② แถว → คอลัมน์

	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	1	0	1
3	0	0	1	0	0	1
4	0	0	0	1	0	0
5	0	0	0	0	1	0
6	0	0	0	0	0	1

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 2 — ปฏิสมมาตร จากเหตุผลจำนวนเต็มบวกในหัวข้อก่อน ถ้า a หาร b และ b หาร a ต้อง a=b จึงไม่มี 1 สองช่องสะท้อนกันนอกแนวทแยง

① ไม่มีสองทิศต่างจุด



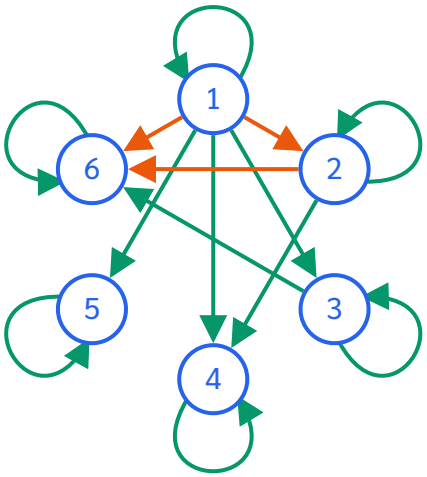
② แถว → คอลัมน์

	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	1	0	1
3	0	0	1	0	0	1
4	0	0	0	1	0	0
5	0	0	0	0	1	0
6	0	0	0	0	0	1

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 3 — ถ่ายทอด ถ้า a หาร b และ b หาร c จะได้ a หาร c เสมอ การจำกัดอยู่ใน X ไม่ทำให้กฎนี้เสีย เพราะสามตัวที่ตรวจยังอยู่ใน X ทั้งหมด

① ตัวอย่าง 1 → 2 → 6



② แถว → คอลัมน์

	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	1	0	1
3	0	0	1	0	0	1
4	0	0	0	1	0	0
5	0	0	0	0	1	0
6	0	0	0	0	0	1

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 4 — รวมเงื่อนไข ผ่านทั้งสามเงื่อนไข จึงเป็นอันดับบางส่วนบน X

เช็กกลับ รายการคู่มี 14 คู่ ได้แก่แถว 1 มี 6 คู่ แถว 2 มี 3 คู่ แถว 3 มี 2 คู่ แถว 4,5,6 มีแถวละ 1 คู่ ตรวจทุกแถวได้ผลตรงภาพ

ไม่ต้องเพิ่ม “สมมาตร” เป็นเงื่อนไขอันดับบางส่วน การหารลงตัวนี้ไม่สมมาตรเพราะ 2→4 ไม่มี 4→2 แต่ยังเป็นอันดับบางส่วนได้

ลงมือทำตามนี้

1. ระบุความสัมพันธ์และเซตที่ใช้
2. ตรวจสะท้อนให้ครบ
3. ตรวจปฏิสมมาตรโดยหาคู่ไปกลับต่างจุด
4. ตรวจถ่ายทอดทุกเส้นทางสองช่วง
5. ต้องผ่านทั้งสามจึงสรุปเป็นอันดับบางส่วน; พบข้อใดพังให้หยุดสรุปว่าไม่เป็น

4.11 “เทียบได้” ไม่ได้แปลว่าใช้เครื่องหมาย < เสมอ (ต้นทาง หน้า 8–9)

ในภาพหารลงตัวของ 1 ถึง 6 มีลูกศร 2→4 เราจึงบอกทิศระหว่าง 2 กับ 4 ได้ แต่ระหว่าง 2 กับ 3 ไม่มีทั้ง 2→3 และ 3→2

ลองคิดก่อนเปิดเฉลย

ระหว่าง 4 กับ 6 มีทางเปรียบเทียบตาม “หารลงตัว” ไหม? แม้ 4 จะน้อยกว่า 6 ในความหมายตัวเลข จะใช้เหตุผลนั้นแทนได้หรือไม่?

เฉลย ไม่มี เพราะ 4 ไม่หาร 6 ลงตัว และ 6 ไม่หาร 4 ลงตัว การเปรียบเทียบต้องใช้กติกาที่โจทย์กำหนด จึงใช้แค่ 4<6 แทนไม่ได้



③ มีอย่างน้อยหนึ่งทิศจึง comparable

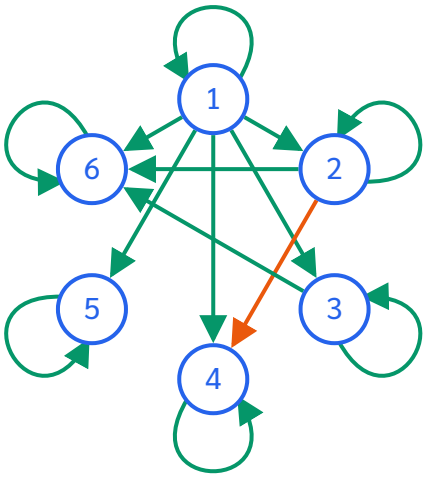
ในอันดับบางส่วน ถ้า $x \preceq y$ หรือ $y \preceq x$ อย่างน้อยหนึ่งทิศ เราเรียก x,y ว่า **เปรียบเทียบกันได้ (comparable)** ถ้าขาดทั้งสองทิศเรียกว่า **เปรียบเทียบกันไม่ได้ (incomparable)**

คำว่า “ไม่ได้” ไม่ได้บอกว่าเราไม่รู้คำตอบ แต่บอกว่าภายใต้กติกานี้ ทั้งสองทิศเป็นเท็จจริง ๆ ต้องตรวจสองทางก่อนสรุป

โจทย์ตัวอย่าง 3.8 — ข้อ 2 2 และ 4 เปรียบเทียบกันได้ไหม?

บรรทัด 1 — ตรวจทิศหนึ่ง $4 = 2 \cdot 2$ จึง $2 \mid 4$ มีอย่างน้อยหนึ่งทิศ จึงเปรียบเทียบกันได้ ไม่จำเป็นต้องมีทิศกลับด้วย

① 2 กับ 4 มีหนึ่งทิศ



② แถว → คอลัมน์

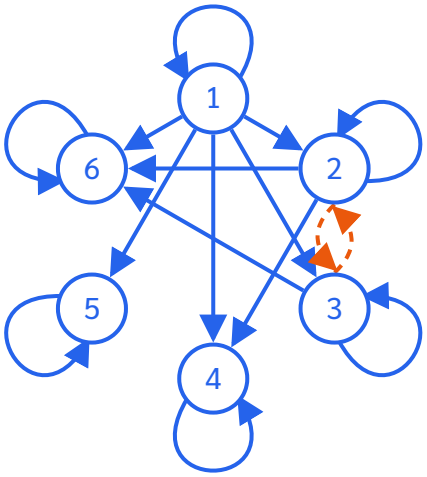
	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	1	0	1
3	0	0	1	0	0	1
4	0	0	0	1	0	0
5	0	0	0	0	1	0
6	0	0	0	0	0	1

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

โจทย์ตัวอย่าง 3.8 — ข้อ 3 มีสมาชิกที่เปรียบเทียบกันไม่ได้หรือไม่?

บรรทัด 2 — ทดลอง 2 กับ 3 3/2 ไม่เป็นจำนวนเต็ม และ 2/3 ไม่เป็นจำนวนเต็ม จึงขาดทั้ง (2,3) และ (3,2) ดังนั้นมีคู่ที่เปรียบเทียบกันไม่ได้

① 2 กับ 3 ขาดสองทิศ



② แถว → คอลัมน์

	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	1	0	1
3	0	0	1	0	0	1
4	0	0	0	1	0	0
5	0	0	0	0	1	0
6	0	0	0	0	0	1

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0 · เส้นประคือช่องที่ขาด

บรรทัด 3 — ถ้าต้องการแจกแจงทุกคู่ ตรวจคู่ต่างกันโดยไม่เขียนคู่สลับซ้ำ ได้ $\{2,3\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,5\}, \{4,6\}, \{5,6\}$ เป็นคู่เปรียบเทียบไม่ได้ทั้งหมด

เช็กกลับ คู่ที่เกี่ยวกับ 1 เปรียบเทียบได้ทุกคู่ ส่วนคู่ 2 กับ 4, 2 กับ 6, 3 กับ 6 มีลูกศรตามการหารลงตัว คู่ต่างกันทั้งหมดมี 15 คู่ แบ่งเป็นเปรียบเทียบได้ 8 กับไม่ได้ 7 ครบพอดี

ขาดทิศเดียวไม่พอสรุปว่าเปรียบเทียบไม่ได้: (4,2) ขาด แต่ (2,4) มี จึงคู่นี้ยังเปรียบเทียบได้



③ มีอย่างน้อยหนึ่งทิศจึง comparable

ลงมือทำตามนี้

1. ยืนยันก่อนว่าใช้อันดับตามกติกาใด
2. ตรวจ x→y
3. ถ้าทิศแรกขาด ตรวจ y→x ต่อ
4. พบอย่างน้อยหนึ่งทิศสรุปได้; ขาดสองทิศจึงสรุปไม่ได้
5. ถ้าแจกแจงทั้งหมด ใช้คู่ไม่เรียงลำดับเพื่อไม่เขียนซ้ำ

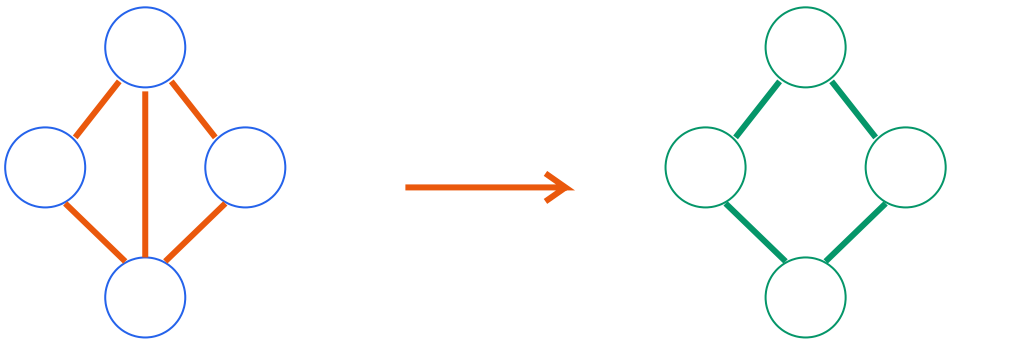
4.12 ซ่อนเส้นได้ โดยไม่ลบความหมาย (ต้นทาง หน้า 9–11)

ภาพหารลงตัวมีวงวนทุกจุด และมีลูกศร 1→4 แม้เราจะอ่านเส้นทาง 1→2→4 ได้อยู่แล้ว ถ้าภาพแน่นเกินไป เราจะซ่อนเฉพาะข้อมูลที่รู้คืนได้ โดยต้องประกาศให้ชัดว่าไม่ได้ลบคู่เหล่านั้นออกจากความสัมพันธ์

ลองคิดก่อนเปิดเฉลย

ถ้าซ่อนลูกศรตรง 1→4 แต่ยังเห็น 1→2 และ 2→4 จะกู้คู่ (1,4) คืนจากสมบัติใด? ถ้าซ่อนวงวนทั้งหมด กู้คืนจากสมบัติใด?

เฉลย กู้ (1,4) จากการถ่ายทอด และกู้วงวนจากการสะท้อน จึงย่อภาพได้เมื่อรู้ก่อนแล้วว่ากำลังแสดงอันดับบางส่วน



① ก่อน: มีเส้นถ่ายทอด ② หลัง: เหลือ cover ③ ลำดับเดิม

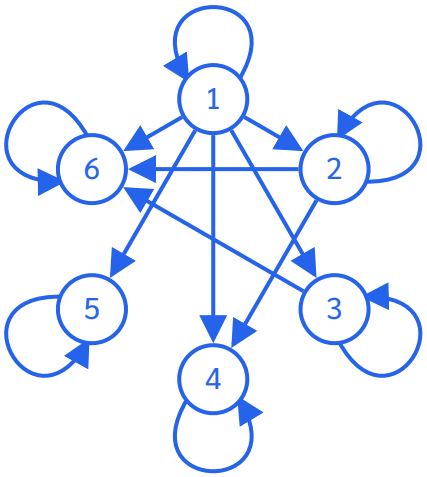
ภาพย่ออันดับบางส่วนที่ซ่อนวงวนและเส้นซึ่งมีทางอ้อมผ่านสมาชิกอื่น เรียกว่า **ไดอะแกรมฮาสเซอ (Hasse diagram)** วางตัวที่มาก่อนต่ำกว่า ตัวที่ตามมาสูงกว่า และอ่านทิศขึ้นด้านบน จึงไม่ต้องเขียนหัวลูกศรทุกเส้น

เส้นที่เหลือเชื่อมคู่ที่ไม่มีสมาชิกคั่นกลางตามอันดับ เรียกว่า **คู่ครอบคลุม (cover)** ไม่ใช่แค่เลขที่ติดกันตามขนาด เช่นภายใต้การหารลงตัว 1 ไป 5 เป็นเส้นครอบคลุม เพราะไม่มีตัวใน X ที่อยู่คั่นระหว่างตามกติกานี้

โจทย์ — อ่านภาพย่อของตัวอย่าง 3.8 ย่ออันดับหารลงตัวบน $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

บรรทัด 1 — เก็บ R เต็มไว้ เริ่มจาก 14 คู่ดังภาพ เมทริกซ์นี้จะไม่เปลี่ยนตลอดการย่อภาพ

① R ก่อนย่อ



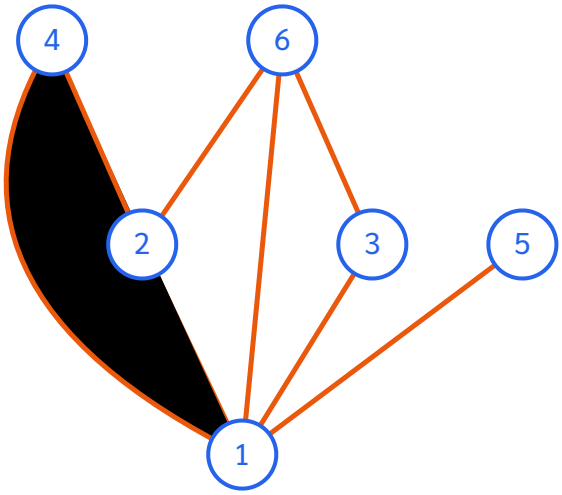
② แถว → คอลัมน์

	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	1	0	1
3	0	0	1	0	0	1
4	0	0	0	1	0	0
5	0	0	0	0	1	0
6	0	0	0	0	0	1

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 2 — ซ่อนวงวน ซ่อนหกเส้น (x,x) และจัดระดับให้อ่านขึ้น แต่เก็บ 1 บนแนวทแยงในตาราง เพราะคู่เหล่านั้นยังอยู่ใน R

① ซ่อนวงวน



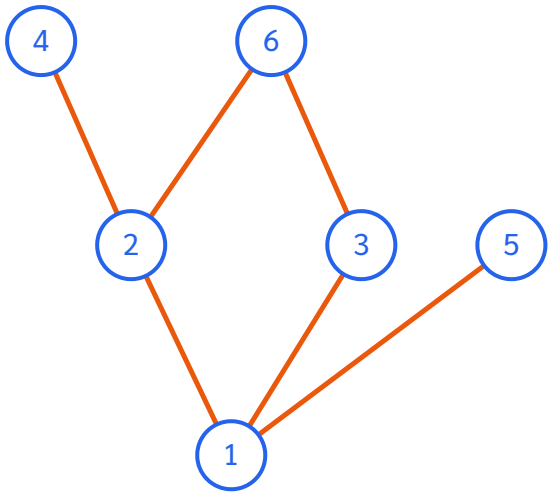
② ตาราง R เต็ม

	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	1	0	1
3	0	0	1	0	0	1
4	0	0	0	1	0	0
5	0	0	0	0	1	0
6	0	0	0	0	0	1

③ อ่านขึ้นบน · ซ่อนเส้นได้ แต่คู่ใน R ยังอยู่ครบ

บรรทัด 3 — ซ่อนเส้นที่มีตัวคั่น ซ่อน (1,4) เพราะผ่าน 2 ได้; ซ่อน (1,6) เพราะผ่าน 2 หรือ 3 ได้ เหลือ $(1,2),(1,3),(1,5),(2,4),(2,6),(3,6)$

① เหลือเส้นครอบคลุม



② ตาราง R เต็ม

	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	1	0	1
3	0	0	1	0	0	1
4	0	0	0	1	0	0
5	0	0	0	0	1	0
6	0	0	0	0	0	1

③ อ่านขึ้นบน · ซ่อนเส้นได้ แต่คู่ใน R ยังอยู่ครบ

เช็กกลับ ใส่วงวนหกคู่คืน แล้วอ่านทุกเส้นทางขึ้นเพื่อกู้ (1,4) และ (1,6) รวมกับเส้นครอบคลุมหกคู่ ได้ $6 + 6 + 2 = 14$ คู่ตรง R เดิม

ภาพฮาสเซอไม่มีเส้นตรง 1–4 ไม่ได้แปลว่า 1 กับ 4 เปรียบเทียบไม่ได้ เพราะมีเส้นทางขึ้น 1–2–4 ส่วน 4 กับ 6 ไม่มีเส้นทางขึ้นจากตัวใดถึงอีกตัว จึงเปรียบเทียบไม่ได้

ลงมือทำตามนี้

1. ตรวจว่าเป็นอันดับบางส่วนก่อนย่อ
2. ซ่อนวงวนในภาพโดยคงคู่ไว้ใน R
3. ซ่อนคู่ที่มีตัวกลางต่างจากปลายทั้งสอง
4. จัดตำแหน่งให้อันดับขึ้นด้านบน
5. กู้ทุกวงวนและเส้นทางขึ้นกลับแล้วเทียบกับเมทริกซ์เต็ม

4.13 เมื่อทุกคู่เรียงเทียบกันได้ (ต้นทาง หน้า 10–11)

บนเส้นจำนวน เลือกจำนวนเต็มสองตัวใด ๆ เราบอกได้ว่าตัวแรกไม่เกินตัวหลัง หรือตัวหลังไม่เกินตัวแรก เช่น -1 ไม่เกิน 2 ส่วนถ้าหยิบเลขเดียวกันทั้งคู่ ทั้งสองทิศก็จริง

ลองคิดก่อนเปิดเฉลย

ถ้าใช้ ≤ บนจำนวนเต็ม มีคู่ 2 กับ 3 ที่เทียบไม่ได้เหมือนกติกาหารลงตัวหรือไม่?

เฉลย ไม่มี เพราะ $2 \le 3$ จริง ทุกคู่ของจำนวนเต็มมีอย่างน้อยหนึ่งทิศตาม ≤



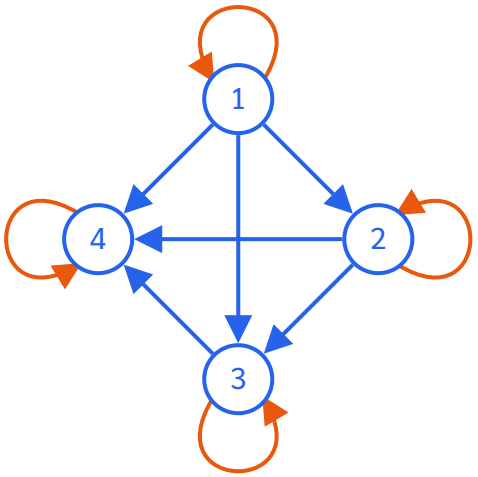
③ partial order นี้จึงไม่เป็น total order

อันดับบางส่วนที่สมาชิกทุกคู่เปรียบเทียบกันได้ เรียกว่า **อันดับเชิงเส้นหรืออันดับทั้งหมด (total order)** ต้องผ่านอันดับบางส่วนก่อน แล้วเพิ่มเงื่อนไขว่า $x \preceq y$ หรือ $y \preceq x$ สำหรับทุกคู่

ตัวอย่าง 3.9 ให้ ≤ บน $\mathbb{Z}$ ซึ่งคือจำนวนเต็มทั้งหมด เราจะตรวจแบบทั่วไป ส่วนภาพใช้ 1,2,3,4 เป็นชิ้นส่วนที่มองเห็นได้ของเส้นจำนวน

บรรทัด 1 — สะท้อน จำนวนเต็ม a ใด ๆ มี $a \le a$ จึงสะท้อน

① ทุกตัวเท่ากับตัวเอง



② แถว → คอลัมน์

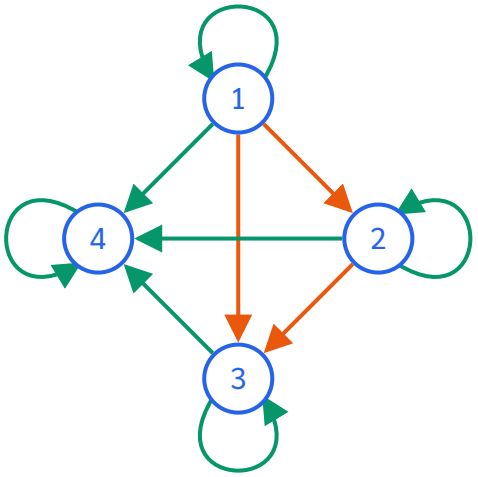
	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	0	1	1	1
3	0	0	1	1
4	0	0	0	1

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 2 — ปฏิสมมาตร ถ้า $a \leq b$ และ $b \leq a$ จะไม่มีค่าต่างกันที่เล็กกว่าหรือเท่ากันทั้งสองทาง จึง $a = b$

บรรทัด 3 — ถ่ายทอด ถ้า $a \leq b$ และ $b \leq c$ ตำแหน่ง a ไม่อยู่ขวาของ b และ b ไม่อยู่ขวาของ c จึง $a \leq c$

① 1 ≤ 2 ≤ 3 ⇒ 1 ≤ 3



② แถว → คอลัมน์

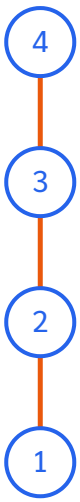
	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	0	1	1	1
3	0	0	1	1
4	0	0	0	1

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 4 — อันดับบางส่วน ผ่านสามเงื่อนไข จึง ≤ บนจำนวนเต็มเป็นอันดับบางส่วน

บรรทัด 5 — ตรวจทุกคู่เทียบได้ จำนวนเต็มสองตัว a,b ต้องมี $a \leq b$ หรือ $b \leq a$ จึงเป็น total order ด้วย

① เรียงเป็นสายเดียว



② ตาราง R เต็ม

	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	0	1	1	1
3	0	0	1	1
4	0	0	0	1

③ อ่านขึ้นบน · ซ่อนเส้นได้ แต่คู่ใน R ยังอยู่ครบ

เช็กกลับ ภาพย่อของ 1–4 กู้คู่ (1,3),(1,4),(2,4) จากเส้นทางขึ้น รวมวงวนแล้วตรงกับเมทริกซ์ ≤ ทุกคู่เปรียบเทียบได้

การหารลงตัวบน 1–6 เป็น partial order แต่ไม่เป็น total order เพราะ 2 กับ 3 ขาดสองทิศ ไม่ใช่เพราะภาพมีเส้นน้อย แต่เพราะเงื่อนไขทุกคู่เปรียบเทียบได้มีตัวแย้ง

ลงมือทำตามนี้

1. ตรวจสามสมบัติของ partial order ก่อน
2. ถ้าถาม total ให้ตรวจคู่ต่างกันทุกคู่เพิ่ม
3. พบคู่ขาดสองทิศให้สรุปไม่ total พร้อมระบุคู่
4. ถ้าเป็นเซตอนันต์ ต้องใช้เหตุผลทั่วไป ไม่ใช้แค่ภาพตัวอย่างจำกัด

4.14 กลับหัวลูกศรทุกเส้น (ต้นทาง หน้า 12)

เส้นทางเดิม 2→4 บอกว่าเริ่มที่ 2 ไปถึง 4 ถ้ากลับหัวลูกศร จะได้ 4→2 ต้องสลับตำแหน่งภายในคู่นั้นด้วย ไม่ใช่แค่เขียนรายชื่อคู่จากท้ายมาหน้า

ลองคิดก่อนเปิดเฉลย

คู่ (2,6) หลังกลับทิศเป็นอะไร? คู่ (3,3) เปลี่ยนหน้าตาหรือไม่?

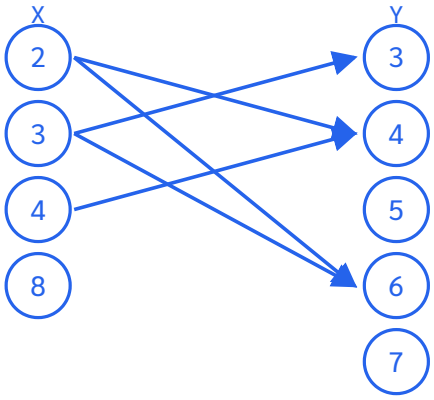
เฉลย ได้ (6,2) ส่วน (3,3) กลับแล้วยังเป็น (3,3) เพราะค่าในสองตำแหน่งเหมือนกัน

ความสัมพันธ์ที่กลับทุกคู่ของ R เรียกว่า **ความสัมพันธ์ผกผัน (inverse relation)** ใช้ $R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$ ถ้า R จาก X ไป Y แล้ว R^{-1} จะจาก Y ไป X สัญลักษณ์ −1 นี้หมายถึงกลับทิศ ไม่ใช่หารด้วย R

ในตาราง การกลับคู่ทำให้แถวเดิมกลายเป็นคอลัมน์ใหม่ เรียกการสลับแนวตารางนี้ว่า **ทรานสโพส (transpose)** ค่า 1 เดิมไม่หาย เพียงย้ายไปตำแหน่งที่สลับพิกัด

โจทย์ผกผันที่ต้นทางใช้หมายเลข 3.9 $R = \{(2,4), (2,6), (3,3), (3,6), (4,4)\}$ หา R^{-1}

① R ก่อนกลับ

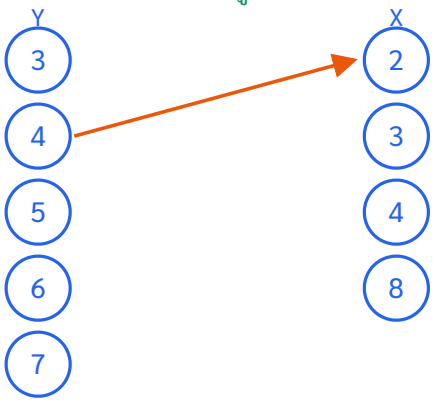


② แถว → คอลัมน์

	3	4	5	6	7
2	0	1	0	1	0
3	1	0	0	1	0
4	0	1	0	0	0
8	0	0	0	0	0

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 1 — สลับพิกัด $(2, 4)$ เปลี่ยนเป็น $(4, 2)$ ย้าย 1 จากแถว 2 คอลัมน์ 4 ของเดิม ไปแถว 4 คอลัมน์ 2 ของตารางใหม่

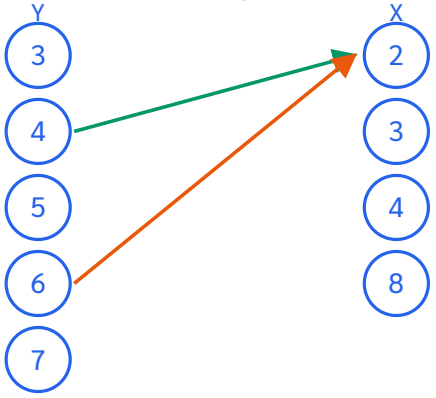


② แถว → คอลัมน์

	2	3	4	8
3	0	0	0	0
4	1	0	0	0
5	0	0	0	0
6	0	0	0	0
7	0	0	0	0

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 2 — สลับพิกัด $(2, 6)$ เปลี่ยนเป็น $(6, 2)$ ย้าย 1 จากแถว 2 คอลัมน์ 6 ของเดิม ไปแถว 6 คอลัมน์ 2 ของตารางใหม่

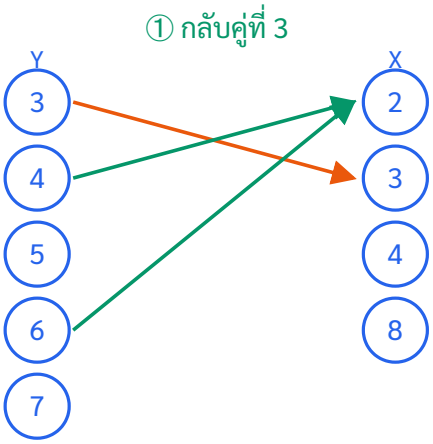


② แถว → คอลัมน์

	2	3	4	8
3	0	0	0	0
4	1	0	0	0
5	0	0	0	0
6	1	0	0	0
7	0	0	0	0

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 3 — สลับพิกัด $(3, 3)$ เปลี่ยนเป็น $(3, 3)$ ย้าย 1 จากแถว 3 คอลัมน์ 3 ของเดิม ไปแถว 3 คอลัมน์ 3 ของตารางใหม่

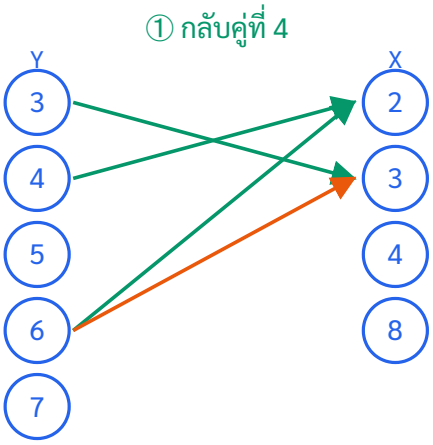


② แถว → คอลัมน์

	2	3	4	8
3	0	1	0	0
4	1	0	0	0
5	0	0	0	0
6	1	0	0	0
7	0	0	0	0

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 4 — สลับพิกัด $(3, 6)$ เปลี่ยนเป็น $(6, 3)$ ย้าย 1 จากแถว 3 คอลัมน์ 6 ของเดิม ไปแถว 6 คอลัมน์ 3 ของตารางใหม่



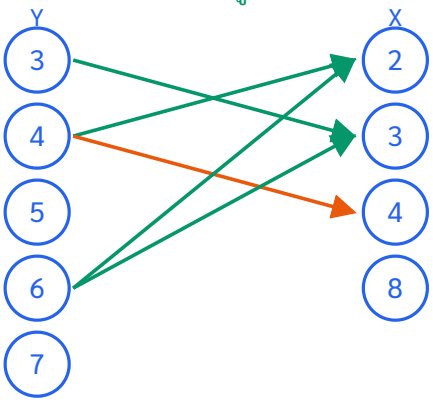
② แถว → คอลัมน์

	2	3	4	8
3	0	1	0	0
4	1	0	0	0
5	0	0	0	0
6	1	1	0	0
7	0	0	0	0

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 5 — สลับพิกัด $(4, 4)$ เปลี่ยนเป็น $(4, 4)$ ย้าย 1 จากแถว 4 คอลัมน์ 4 ของเดิม ไปแถว 4 คอลัมน์ 4 ของตารางใหม่

① กลับคู่ที่ 5



② แถว → คอลัมน์

	2	3	4	8
3	0	1	0	0
4	1	0	1	0
5	0	0	0	0
6	1	1	0	0
7	0	0	0	0

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 6 — รวมผล $R^{-1} = \{(4,2),(6,2),(3,3),(6,3),(4,4)\}$

เช็กกลับ กลับทุกคู่ในคำตอบอีกครั้งได้ R เดิมทั้งห้าคู่ domain ของ R^{-1} คือ $\{3,4,6\}$ เท่ากับ range ของ R ส่วน range ของ R^{-1} คือ $\{2,3,4\}$ เท่ากับ domain ของ R

ผกผันของความสัมพันธ์ทำได้เสมอ แม้ตัวหน้าใหม่มีหลายปลายทาง เช่น 4 ไปได้ทั้ง 2 กับ 4 ข้อจำกัดของฟังก์ชันผกผันเป็นอีกเรื่องที่จะเรียนบทถัดไป อย่านำมาห้ามการกลับความสัมพันธ์ทั่วไป

ลงมือทำตามนี้

1. สลับชื่อเซตต้นทางและปลายทาง
2. กลับพิกัดทุกคู่ทีละคู่
3. คงคู่ (x,x) ไว้
4. อ่านเมทริกซ์ใหม่จากการสลับแถว–คอลัมน์
5. กลับผลอีกครั้งต้องได้ R เดิม แล้วจึงหยุด

4.15 ต่อทางโดยใช้จุดกลางเดียวกัน (ต้นทาง หน้า 13)

มีเส้นทางสองช่วง: ช่วงแรกจากเลข 1,2,3 ไปยังกล่องกลาง 2,4,6,8,10 ช่วงที่สองจากกล่องกลางไปยัง s,t,u,v ถ้าเริ่ม 1 ไป 2 แล้วจาก 2 ไป u ได้ เราบันทึกทางสองช่วงเป็นคู่ใหม่ (1,u)

ลองคิดก่อนเปิดเฉลย

ถ้า 1 ไป 6 ได้ และ 6 ไป t ได้ จะเพิ่มคู่ใด? ถ้ากล่องกลาง 10 ไม่มีทางออก จะช่วยสร้างคู่ผลได้หรือไม่?

เฉลย เพิ่ม (1,t) ส่วน 10 ไม่มีทางออกจึงสร้างเส้นทางครบสองช่วงผ่านมันไม่ได้

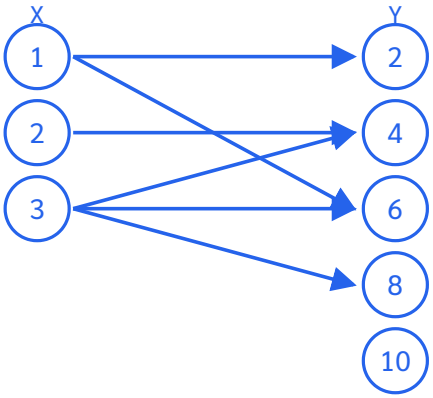
การต่อความสัมพันธ์สองช่วงเรียกว่า **การประกอบความสัมพันธ์ (composition)** ถ้า R_1 จาก X ไป Y และ R_2 จาก Y ไป Z จะเขียน $R_2 \circ R_1$ จาก X ไป Z โดย (x, z) อยู่ในผลเมื่อมี y อย่างน้อยหนึ่งตัวที่ $(x, y) \in R_1$ และ $(y, z) \in R_2$

อ่านสัญลักษณ์จากขวาไปซ้ายเมื่อเดินทาง: ทำ R_1 ก่อน แล้ว R_2 กลางทางต้องเป็นสมาชิกตัวเดียวกัน เช่น ปลายช่วงแรกเป็น 4 ก็ต้องเริ่มช่วงที่สองจาก 4 ไม่ใช่เลือกจุดกลางใหม่ตามใจ

โจทย์ตัวอย่าง 3.10 $R_1 = \{(1,2),(1,6),(2,4),(3,4),(3,6),(3,8)\}$, $R_2 = \{(2,u),(4,s),(4,t),(6,t),(8,u)\}$ หา $R_2 \circ R_1$

บรรทัด 1 — อ่านสองช่วงแยกกัน ภาพแรกจับคู่ X กับ Y ส่วนภาพที่สองจับคู่ Y กับ Z ใช้สมาชิก Y เป็นจุดต่อ

① ช่วงแรก R_1

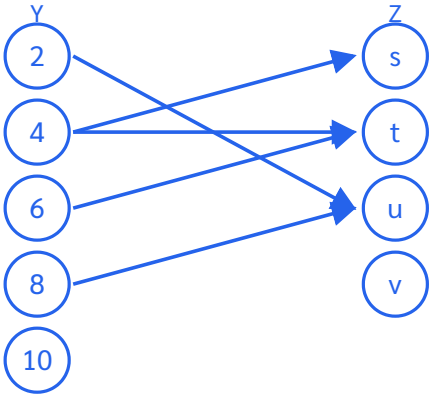


② แถว → คอลัมน์

	2	4	6	8	10
1	1	0	1	0	0
2	0	1	0	0	0
3	0	1	1	1	0

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

① ช่วงสอง R_2



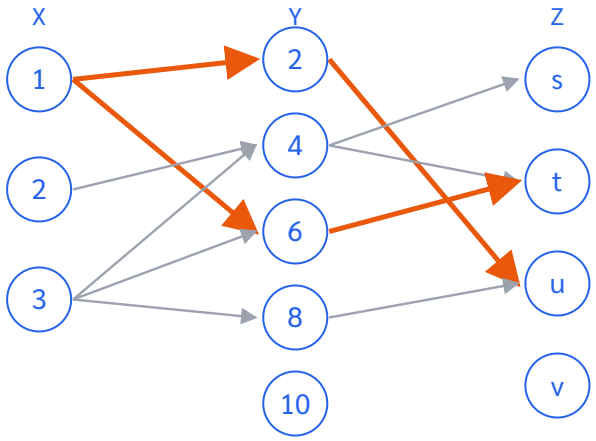
② แถว → คอลัมน์

	s	t	u	v
2	0	0	1	0
4	1	1	0	0
6	0	1	0	0
8	0	0	1	0
10	0	0	0	0

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 2 — เริ่มจาก 1 $1 \to 2 \to u$ ได้ (1,u); $1 \to 6 \to t$ ได้ (1,t) ไม่มีทางอื่นจาก 1 ใน R_1

① ตามทางจาก 1



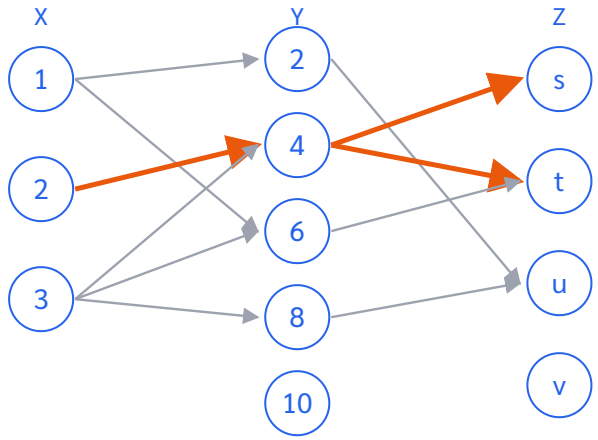
② ผล $R_2 \circ R_1$

	s	t	u	v
1	0	1	1	0
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0

③ เดิน R_1 ก่อน R_2 · เก็บเฉพาะต้นกับปลาย

บรรทัด 3 — เริ่มจาก 2 $2 \to 4 \to s$ ได้ (2,s); $2 \to 4 \to t$ ได้ (2,t)

① ตามทางจาก 2



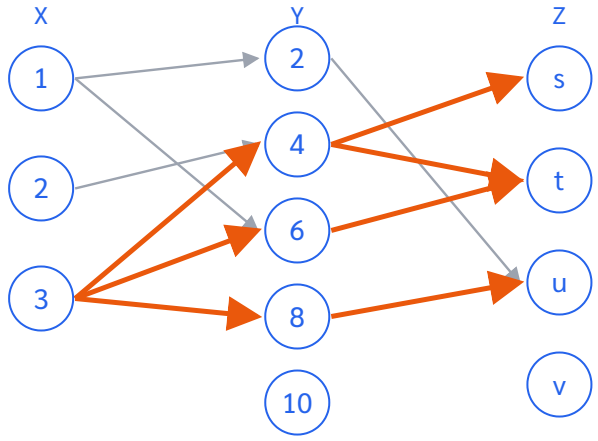
② ผล $R_2 \circ R_1$

	s	t	u	v
1	0	1	1	0
2	1	1	0	0
3	0	0	0	0

③ เดิน R_1 ก่อน R_2 · เก็บเฉพาะต้นกับปลาย

บรรทัด 4 — เริ่มจาก 3 ผ่าน 4 ไป s,t ได้; ผ่าน 6 ไป t ได้อีกทาง; ผ่าน 8 ไป u ได้ จึงเก็บ (3,s),(3,t),(3,u) โดยไม่เขียน (3,t) ซ้ำ

① ตามทางจาก 3



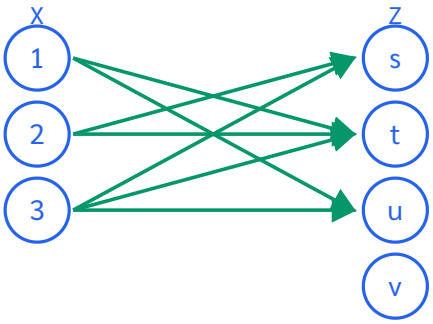
② ผล $R_2 \circ R_1$

	s	t	u	v
1	0	1	1	0
2	1	1	0	0
3	1	1	1	0

③ เดิน R_1 ก่อน R_2 · เก็บเฉพาะต้นกับปลาย

บรรทัด 5 — รวมต้นกับปลาย $R_2 \circ R_1 = \{(1,t),(1,u),(2,s),(2,t),(3,s),(3,t),(3,u)\}$

① ผลประกอบ



② แถว → คอลัมน์

	s	t	u	v
1	0	1	1	0
2	1	1	0	0
3	1	1	1	0

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

เช็กกลับ ทุกคู่ผลมีเส้นทางสองช่วงเป็นพยานจริง ไม่มีคู่ที่จบ v เพราะ R_2 ไม่มีลูกศรเข้า v มีเจ็ดคู่ต่างกัน แม้ (3,t) จะเดินได้สองทางก็ยังนับเป็นสมาชิกเดียว

อย่าเขียน $R_1 \circ R_2$ แทนโดยคิดว่าสลับได้ และอย่านับจำนวนเส้นทางเป็นจำนวนคู่: ผ่าน 4 และ 6 ไปถึง t จาก 3 ได้เหมือนกัน จึงได้คู่ (3,t) เพียงครั้งเดียว

ลงมือทำตามนี้

1. เขียนทิศเซต X→Y→Z
2. เริ่มจากตัวหน้า x หนึ่งตัว
3. ตามทุกทางไป y แล้วตามทุกลูกศรออกจาก y ไป z
4. บันทึก (x,z) โดยตัดค่ากลางทิ้งและลบคู่ซ้ำ
5. ทำครบทุก x แล้วตรวจทุกคู่ผลมีเส้นทางเป็นพยาน

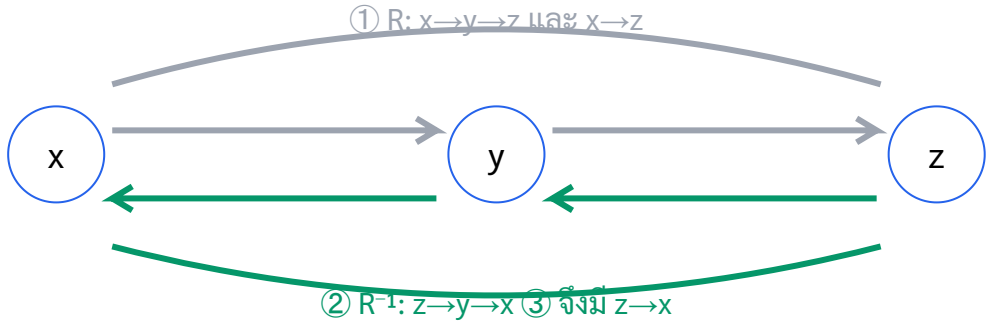
4.16 กลับทิศแล้วความถ่ายทอดยังอยู่ (ต้นทาง หน้า 14 ข้อ 1)

มี c→b→a และมีลูกศรตรง c→a ครบ เมื่อกลับทุกเส้น เราจะได้ a→b→c พร้อม a→c ทางอ้อมและทางตรงถูกกลับไปด้วยกัน

ลองคิดก่อนเปิดเฉลย

ถ้ากลับเฉพาะสองเส้นของทางอ้อมแต่ลืมกลับ c→a จะได้ภาพผกผันจริงหรือไม่?

เฉลย ไม่จริง เพราะผกผันต้องกลับทุกคู่ การลืมเส้นตรงทำให้ข้อมูลหายและอาจทำให้ภาพดูไม่ถ่ายทอดอย่างผิด ๆ



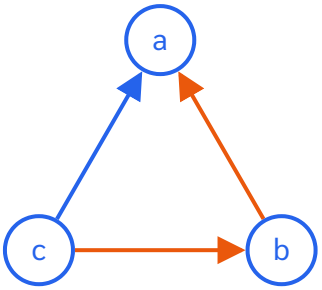
ข้อความที่ 1 ของตัวอย่าง 3.11 คือ “ถ้า R ถ่ายทอด แล้ว R^{-1} ถ่ายทอด” ข้อความนี้ **จริง** เราจะพิสูจน์โดยเริ่มจากเส้นทางสองช่วงใด ๆ ในผกผัน แล้วโยงกลับไปใช้สมบัติของ R

สิ่งที่สมมติ R ถ่ายทอด และเลือก $(a,b),(b,c) \in R^{-1}$ ใด ๆ

สิ่งที่ต้องแสดง $(a,c) \in R^{-1}$

บรรทัด 1 — กลับสองคู่ไป R จากนิยามผกผัน ได้ $(b,a),(c,b) \in R$ จัดลำดับเป็นเส้นทาง c→b→a

① กลับไปใช้ R



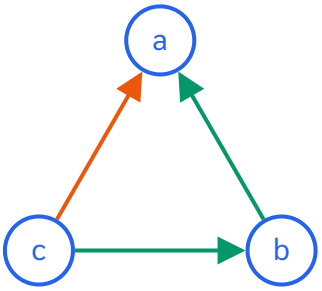
② แถว → คอลัมน์

	a	b	c
a	0	0	0
b	1	0	0
c	1	1	0

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 2 — ใช้สมมติฐานถ่ายทอด เมื่อ R มี c→b และ b→a จึงมี c→a หรือ $(c, a) \in R$

① ทางตรงใน R



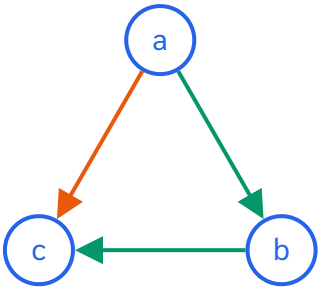
② แถว → คอลัมน์

	a	b	c
a	0	0	0
b	1	0	0
c	1	1	0

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 3 — กลับคู่สรุป กลับ $(c, a) \in R$ ได้ $(a, c) \in R^{-1}$ ตรงกับที่ต้องแสดง

① ทางตรงใน R^{-1}



② แถว → คอลัมน์

	a	b	c
a	0	1	1
b	0	0	1
c	0	0	0

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

เช็กกลับ คู่เริ่มต้นในผกผันเป็นคู่ใด ๆ ไม่ได้เลือกเฉพาะกรณีพิเศษ ดังนั้นเหตุผลครอบคลุมทุกเส้นทางสองช่วง ในภาพตาราง R กับผกผันสลับแถว–คอลัมน์ทั้งชุด

เมื่อกลับลูกศร ทางเดินใน R ต้องเป็น c→b→a ไม่ใช่ b→a แล้ว c→b แบบต่อจาก a ไป c การใช้สมบัติถ่ายทอดต้องจัดเส้นให้ปลายช่วงแรกตรงกับต้นช่วงสอง

ลงมือทำตามนี้

1. เริ่มจากสองคู่ต่อกันในผกผัน
2. กลับทั้งสองคู่ไป R แล้วจัดทางให้ต่อได้
3. ใช้ความถ่ายทอดของ R หาเส้นตรง
4. กลับเส้นตรงนั้นคืนเป็นคู่ที่ต้องแสดง
5. ระบุว่าคู่เริ่มต้นใด ๆ จึงพิสูจน์ครบ

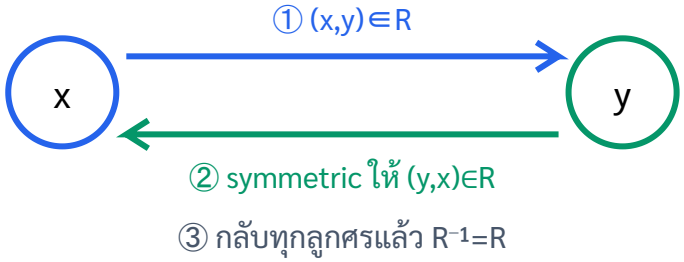
4.17 กลับภาพที่มีคู่กลับครบอยู่แล้ว (ต้นทาง หน้า 14 ข้อ 2)

ถ้ามี a→b และ b→a อยู่ครบ การกลับทุกเส้นเพียงสลับบทบาทของสองเส้นเดิม วงวน c→c ก็กลับเป็นตัวเอง ภาพหลังกลับจึงเหมือนเดิม

ลองคิดก่อนเปิดเฉลย

ในภาพนี้มีลูกศรใดเกิดใหม่หลังกลับทุกเส้นไหม? มีลูกศรใดหายไปไหม?

เฉลย ไม่มีเกิดใหม่หรือหายไป เพราะทุกเส้นมีคู่กลับอยู่ในชุดเดิมแล้ว



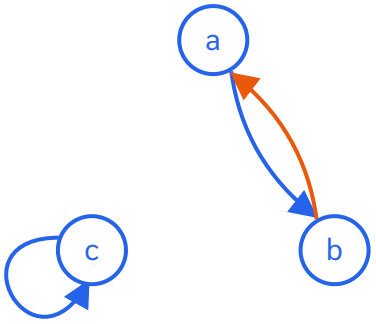
ข้อความที่ 2 ของตัวอย่าง 3.11 “ถ้า R สมมาตร แล้ว R^{-1} สมมาตร” เป็น **จริง** ที่จริงความสมมาตรยังบอกได้ว่า $R^{-1} = R$ เพราะการกลับคู่ไม่เปลี่ยนเซตคู่

สิ่งที่สมมติ R สมมาตร และเลือก $(a, b) \in R^{-1}$ ใด ๆ

สิ่งที่ต้องแสดง $(b, a) \in R^{-1}$

บรรทัด 1 — กลับไป R จาก $(a, b) \in R^{-1}$ ได้ $(b, a) \in R$

① คู่ที่รู้ใน R



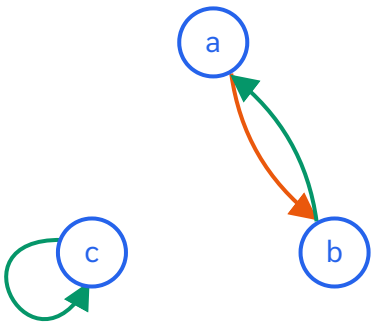
② แถว → คอลัมน์

	a	b	c
a	0	1	0
b	1	0	0
c	0	0	1

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 2 — ใช้สมมาตรของ R เพราะ R สมมาตร จึงจาก (b,a) ได้ $(a, b) \in R$

① คู่กลับใน R



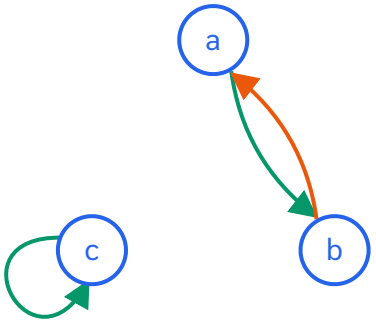
② แถว → คอลัมน์

	a	b	c
a	0	1	0
b	1	0	0
c	0	0	1

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 3 — กลับคืนผกผัน จาก $(a, b) \in R$ ได้ $(b, a) \in R^{-1}$ ตามที่ต้องการ

① คู่กลับใน R^{-1}



② แถว → คอลัมน์

	a	b	c
a	0	1	0
b	1	0	0
c	0	0	1

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

เช็กกลับ ทุกคู่ที่เลือกในผกผันได้คู่กลับอีกคู่ในผกผัน วิธีนี้ไม่พึ่งจำนวนสมาชิก และรองรับวงวนเพราะ a=b ได้

จากคำว่า “R เป็นความสัมพันธ์” อย่างเดียวสรุป $R^{-1} = R$ ไม่ได้ เช่นถ้า R มีเพียง a→b ผกผันมีเพียง b→a ซึ่งต่างกัน ต้องใช้สมมติฐานสมมาตรจริง ๆ

ลงมือทำตามนี้

1. สมมติคู่ใด ๆ ในผกผัน
2. ใช้คำนิยามกลับคู่ไป R
3. ใช้สมมาตรใน R เท่านั้นก่อน
4. กลับผลมาเป็นคู่กลับในผกผัน
5. เช็กว่าพิสูจน์ถึงความสัมพันธ์ที่โจทย์ถาม ไม่หยุดอยู่แค่ R

4.18 กลับทิศไม่สร้างคู่ไปกลับใหม่ (ต้นทาง หน้า 14 ข้อ 3)

มีวงวน a,b และมีลูกศร a→b ทางเดียว เมื่อกลับทั้งหมดได้ b→a ทางเดียวเช่นกัน การกลับไม่ได้สร้างลูกศรสองทิศจากลูกศรเส้นเดียว

ลองคิดก่อนเปิดเฉลย

หลังกลับ จะเกิดทั้ง a→b และ b→a พร้อมกันเองไหม? วงวนละเมิดปฏิสมมาตรหรือไม่?

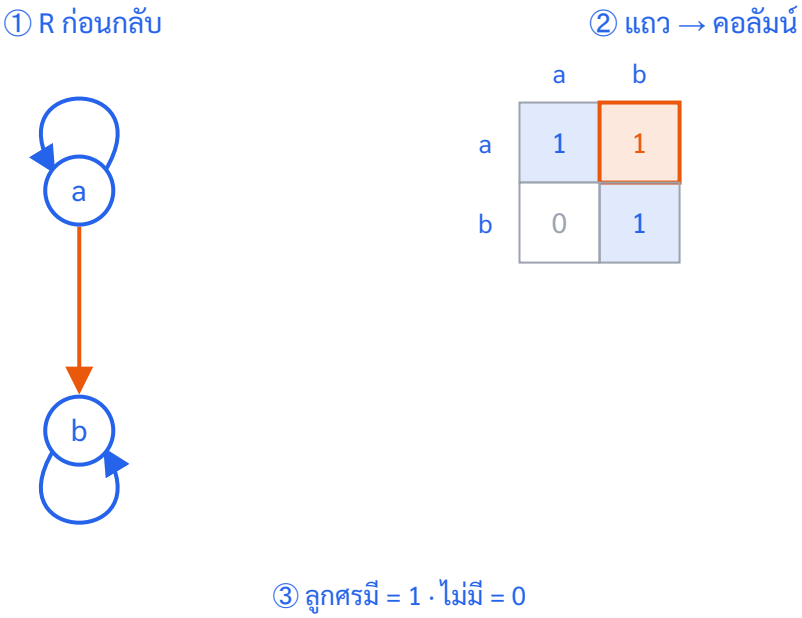
เฉลย ไม่เกิดเอง เพราะแต่ละเส้นเพียงเปลี่ยนทิศ และวงวนไม่ละเมิดเพราะต้นกับปลายเป็นจุดเดียวกัน

ข้อความที่ 3 ของตัวอย่าง 3.11 “ถ้า R ปฏิสมมาตร แล้ว R^{-1} ปฏิสมมาตร” เป็น **จริง** ถ้ามีสองทิศในผกผันสองทิศนั้นก็ต้องมาจากสองทิศใน R ซึ่งสมมติฐานบังคับให้ปลายทั้งสองเท่ากัน

สิ่งที่สมมติ R ปฏิสมมาตร และ $(a,b),(b,a) \in R^{-1}$

สิ่งที่ต้องแสดง $a = b$

บรรทัด 1 — กลับทั้งคู่ ได้ $(b,a),(a,b) \in R$ เป็นสองทิศใน R เช่นกัน



บรรทัด 2 — ใช้ปฏิสมมาตรของ R จากสองคู่ที่สมมติ ได้ $b = a$ จึง $a = b$ ตรงกับข้อกำหนดปฏิสมมาตรของผกผัน

① R^{-1} หลังกลับ



② แถว → คอลัมน์

	a	b
a	1	0
b	1	1

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

เช็กกลับ ภาพตัวอย่างมีลูกศรต่างจุดเพียงทิศเดียวทั้งก่อนและหลัง ส่วนหลักฐานทั่วไปตรวจกรณีสมมติว่ามีสองทิศ แล้วบังคับให้เป็นจุดเดียวกันได้เสมอ

การพิสูจน์ปฏิสมมาตรไม่ได้เริ่มจาก “ไม่มีลูกศร” แต่เริ่มจาก “ถ้ามีทั้งสองทิศ” แล้วแสดงว่าต้นกับปลายต้องเท่ากัน การเขียนว่าผกผันไม่สมมาตรอย่างเดียวไม่ใช่หลักฐานปฏิสมมาตร

ลงมือทำตามนี้

1. เขียนเงื่อนไขสองทิศในผกผัน
2. กลับทั้งสองคู่ ไม่กลับเพียงคู่เดียว
3. ใช้ปฏิสมมาตรของ R เพื่อได้ความเท่ากันของสมาชิก
4. จบด้วย a=b ซึ่งเป็นเป้าหมายของสมบัติ

4.19 สองความสัมพันธ์ถ่ายทอด ต่อแล้วอาจไม่ถ่ายทอด (ต้นทาง หน้า 15 ข้อ 1)

การกลับทิศรักษาสมบัติหลายอย่างได้ แต่การต่อสองความสัมพันธ์ทำงานต่างกัน ลอง R มี 1→1, 2→3 และ S มี 2→2, 3→1 แต่ละภาพมีทางสองช่วงที่ต่อได้เฉพาะวงวนเดิมของตัวเอง

ลองคิดก่อนเปิดเฉลย

เดิน S ก่อน R จาก 2 จะไปถึงไหน? จาก 3 จะไปถึงไหน? ผลใหม่มีเส้นทางสองช่วง 2→3→1 หรือไม่?

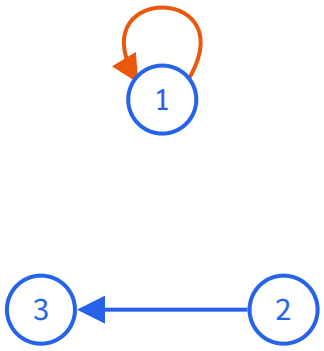
เฉลย 2 ไป 2 ใน S แล้วไป 3 ใน R ได้คู่ (2,3); 3 ไป 1 ใน S แล้วไป 1 ใน R ได้คู่ (3,1) ผลใหม่จึงมีทาง 2→3→1

ข้อความแรกของตัวอย่าง 3.12 “ถ้า R และ S ถ่ายทอด แล้ว $R \circ S$ ถ่ายทอด” เป็น **เท็จ** เราจะใช้ **ตัวอย่างโต้แย้ง (counterexample)** ที่ทำให้สมมติฐานทั้งสองจริง แต่ข้อสรุปเท็จ

จำทิศให้ตรง: $R \circ S$ หมายถึงเดิน S ก่อนแล้ว R ต่างจากชื่อในตัวอย่างก่อนที่ใช้ $R_2 \circ R_1$ แต่หลักอ่านจากขวายังเหมือนเดิม

บรรทัด 1 — กำหนดตัวอย่าง $X = \{1, 2, 3\}$, $R = \{(1, 1), (2, 3)\}$, $S = \{(2, 2), (3, 1)\}$

① R ถ่ายทอด

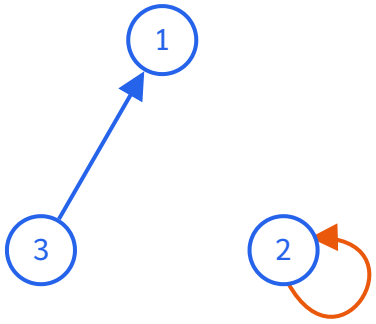


② แถว → คอลัมน์

	1	2	3
1	1	0	0
2	0	0	1
3	0	0	0

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

① S ถ่ายทอด



② แถว → คอลัมน์

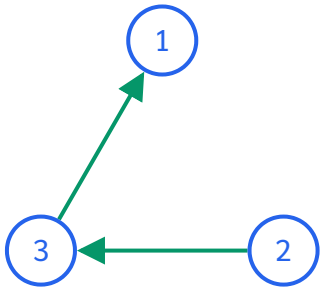
	1	2	3
1	0	0	0
2	0	1	0
3	1	0	0

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 2 — ตรวจสมมติฐานให้ครบ ใน R มีทางสองช่วงเพียง 1→1→1 ซึ่งมีทางตรง (1,1) ส่วน 2→3 ต่อไม่ได้ ใน S มีเพียง 2→2→2 ซึ่งมีทางตรง (2,2) ส่วน 3→1 ต่อไม่ได้ จึงทั้ง R และ S ถ่ายทอด

บรรทัด 3 — คำนวณผลจริง จาก 1 ไม่มีทางใน S; จาก 2 เดิน 2→2→3 ได้ (2,3); จาก 3 เดิน 3→1→1 ได้ (3,1) จึง $T = R \circ S = \{(2,3),(3,1)\}$

① ผลประกอบ T



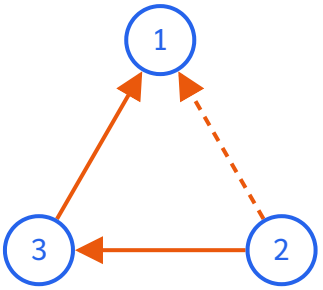
② แถว → คอลัมน์

	1	2	3
1	0	0	0
2	0	0	1
3	1	0	0

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 4 — ทำให้ข้อสรุปพัง T มี (2,3) และ (3,1) แต่ไม่มี (2,1) จึง T ไม่ถ่ายทอด

① ขาดทางตรง 2 → 1



② แถว → คอลัมน์

	1	2	3
1	0	0	0
2	0	0	1
3	1	0	0

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0 · เส้นประคือช่องที่ขาด

เช็กกลับ สมมติฐาน R ถ่ายทอดและ S ถ่ายทอดตรวจครบแล้ว ข้อสรุปไม่ถ่ายทอดมีสามตำแหน่ง 2,3,1 เป็นตัวแย้งครบ ดังนั้นข้อความทั่วไปเป็นเท็จ

เพียงสร้าง R หรือ S ที่ไม่ถ่ายทอดแล้วได้ผลไม่ถ่ายทอด ไม่ได้หักล้างข้อความนี้ เพราะโจทย์เริ่มด้วยสมมติฐานว่าทั้งสองถ่ายทอด ต้องทำให้สมมติฐานจริงก่อนเสมอ

ลงมือทำตามนี้

1. กำหนด X,R,S ให้ชัด
2. ตรวจ R และ S ถ่ายทอดจริงทุกเส้นทางสองช่วง
3. คำนวณประกอบโดยเดิน S ก่อน R
4. หาเส้นทางสองช่วงในผลที่ขาดทางตรง
5. ระบุทั้งหลักฐานสมมติฐานจริงและข้อสรุปเท็จแล้วหยุด

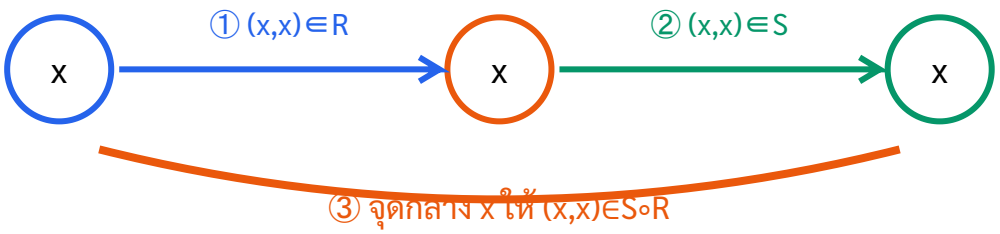
4.20 วงวนต่อวงวนยังได้วงวน (ต้นทาง หน้า 15 ข้อ 2)

ถ้า S มีวงวนที่ทุกจุด และ R ก็มีวงวนที่ทุกจุด เราเริ่มจากจุด x อยู่ที่ x ในช่วง S แล้วอยู่ที่ x อีกครั้งในช่วง R ได้เสมอ จึงได้ทางสองช่วงจาก x กลับ x

ลองคิดก่อนเปิดเฉลย

เพื่อสร้างคู่ (x,x) ในผลประกอบ ต้องเลือกจุดกลางเป็นใครจึงรับประกันว่ามีทั้งสองช่วง?

เฉลย เลือกจุดกลางเป็น x เอง เพราะความสะท้อนของทั้งสองความสัมพันธ์ให้ (x,x) อยู่แล้ว



ข้อความที่สองของตัวอย่าง 3.12 “ถ้า R และ S สะท้อน แล้ว $R \circ S$ สะท้อน” เป็น **จริง** เหตุผลใช้การเลือกจุดกลางตัวเดียวกันกับจุดเริ่ม ไม่ต้องรู้ลูกศรอื่นในสองความสัมพันธ์

สิ่งที่สมมติ R และ S สะท้อนบน X เดียวกัน

สิ่งที่ต้องแสดง ทุก $x \in X$ มี $(x, x) \in R \circ S$

บรรทัด 1 — เลือกสมาชิกใด ๆ ให้ $x \in X$ เนื่องจาก S สะท้อน จึงมี $(x, x) \in S$

① วงวนช่วงแรก S



② แถว → คอลัมน์

	1	2
1	1	0
2	1	1

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 2 — ต่อด้วยวงวน R เนื่องจาก R สะท้อน จึงมี $(x, x) \in R$ ใช้ x เป็นจุดกลางของสองช่วง

① วงวนช่วงสอง R

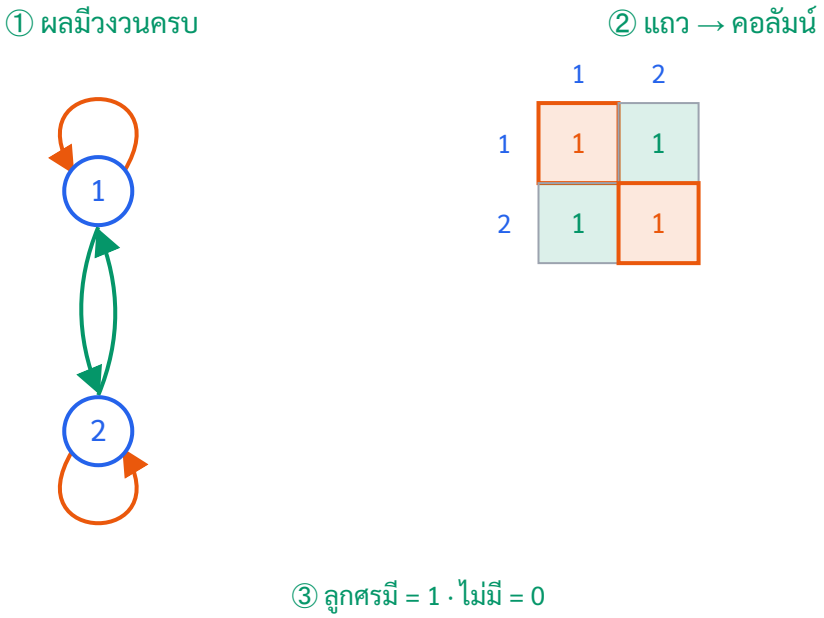


② แถว → คอลัมน์

	1	2
1	1	1
2	0	1

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 3 — ใช้นิยามประกอบ มี $x \ {}^{S} \ x \ {}^{R} \ x$ จึง $(x, x) \in R \circ S$ สำหรับทุก x



เช็กกลับ ตัวอย่างในภาพให้ผลประกอบครบสี่คู่ จึงมีวงวนสองตัวตามที่รับประกัน แต่บทพิสูจน์ไม่ได้ต้องการให้มีทุกคู่ รับประกันเฉพาะวงวนทุก x ซึ่งเพียงพอกับการสะท้อน

อย่าหยุดที่ “R และ S ต่างมีวงวน” โดยไม่บอกจุดกลาง นิยามประกอบต้องมีสมาชิกกลางที่เชื่อมสองช่วงจริง จุดกลาง x ที่เราเลือกคือเหตุผลที่ทำให้ข้อสรุปตามมา

ลงมือทำตามนี้

1. เลือก x ใด ๆ จาก X
2. ใช้สะท้อนของ S หา x→x
3. ใช้สะท้อนของ R ต่อ x→x
4. ประกาศจุดกลางคือ x
5. สรุปคู่ (x,x) ในผลครบทุก x จึงสะท้อน

4.21 คู่กลับของแต่ละช่วงไม่พอ (ต้นทาง หน้า 15 ข้อ 3)

ให้ S มีทาง 1↔2 ครบคู่ แต่ R มีเพียงวงวนที่ 1 ถ้าเดิน S ก่อน R จาก 2 จะไป 1 แล้วอยู่ที่ 1 ได้ แต่เริ่ม 1 จะไป 2 แล้วหยุด เพราะ R ไม่มีทางออกจาก 2

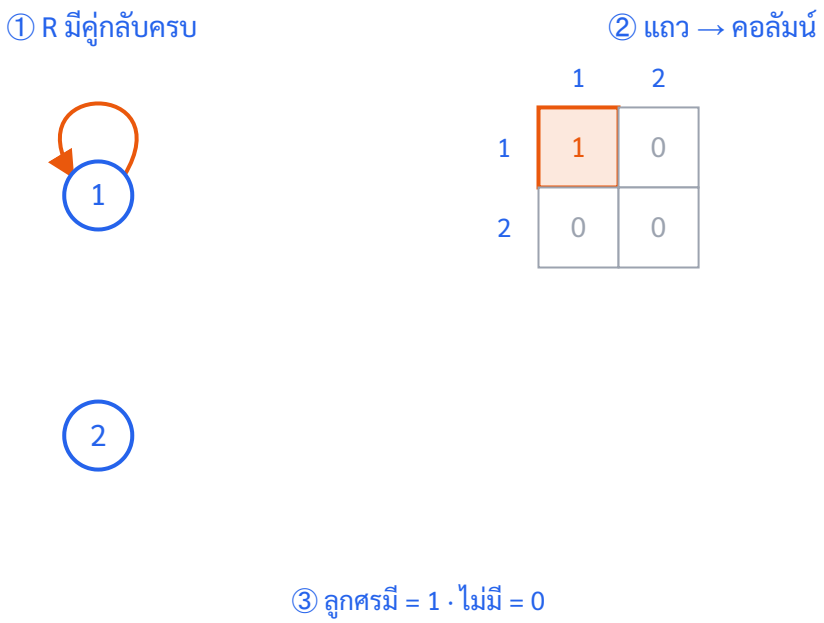
ลองคิดก่อนเปิดเฉลย

ผลประกอบมี (2,1) แล้วมี (1,2) ด้วยหรือไม่? ทั้งที่แต่ละภาพแยกกันมีคู่กลับครบ?

เฉลย มี (2,1) แต่ไม่มี (1,2) เพราะทาง 1→2 ใน S ไม่สามารถต่อทางใดใน R ได้ ผลจึงไม่สมมาตร

ข้อความที่สามของตัวอย่าง 3.12 “ถ้า R และ S สมมาตร แล้ว $R \circ S$ สมมาตร” เป็น **เท็จ** การกลับเส้นทางทั้งเส้นจะสลับลำดับช่วงด้วย แต่โจทย์ประกอบกำหนดลำดับเดิมไว้

บรรทัด 1 — กำหนดตัวอย่าง $X = \{1, 2\}, R = \{(1, 1)\}, S = \{(1, 2), (2, 1)\}$



① S มีคู่กลับครบ



② แถว → คอลัมน์

	1	2
1	0	1
2	1	0

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 2 — ตรวจสมมติฐาน R มีวงวนที่เป็นคู่กลับของตัวเองเพียงคู่เดียว จึงสมมาตร S มี (1,2) และ (2,1) ครบ จึงสมมาตร

บรรทัด 3 — คำนวณผลประกอบ จาก 1 เดิน S ไป 2 แต่ R ไม่มีคู่ที่เริ่ม 2 จึงไม่เกิดผล; จาก 2 เดิน S ไป 1 แล้ว R ไป 1 ได้ จึง $R \circ S = \{(2,1)\}$

① ผลมีเพียง 2 → 1

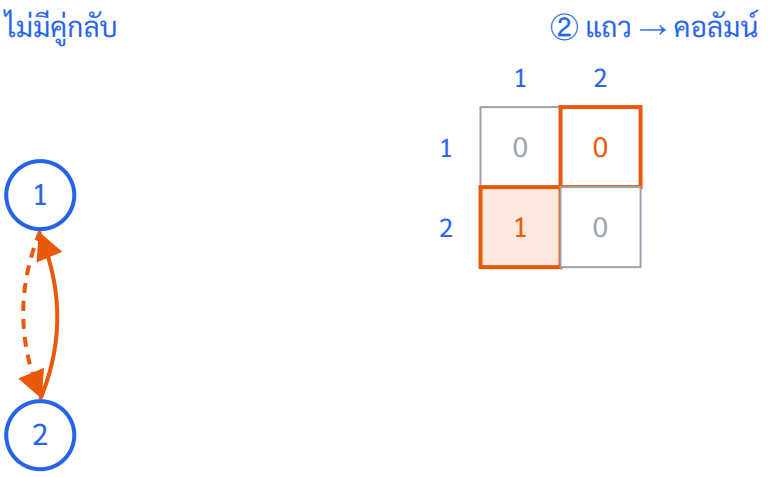


② แถว → คอลัมน์

	1	2
1	0	0
2	1	0

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 4 — หาคู่กลับที่ขาด ผลมี (2,1) แต่ไม่มี (1,2) จึงไม่สมมาตร



เช็กกลับ สมมติฐานสมมาตรของทั้งสองผ่าน ส่วนตารางผลมี 1 ที่ (2,1) และ 0 ที่ (1,2) จึงตัวอย่างหักล้างครบ

การกลับทาง 2→1→1 จะได้ 1→1→2 แต่เส้นแรกเป็น R และเส้นหลังเป็น S นั่นเป็นลำดับของ $S \circ R$ ไม่ใช่ $R \circ S$ จึงนำมาอ้างว่าผลเดิมมีคู่กลับไม่ได้

ลงมือทำตามนี้

1. ตรวจความสมมาตรของ R และ S แยกกัน
2. คงลำดับ S ก่อน R ตอนคำนวณ
3. ตรวจคู่กลับในผลประกอบจริง
4. ถ้ามีคู่หนึ่งแต่คู่กลับไม่มี ให้ยกเป็นหลักฐานเท็จ
5. อย่าสลับลำดับประกอบระหว่างตรวจ

4.22 คนละทางสร้างสองทิศในผลได้ (ต้นทาง หน้า 15 ข้อ 4)

ให้ R มีวงวน 1 และทาง 1→2 เพียงทิศเดียว ส่วน S มีวงวน 1 และทาง 2→1 เพียงทิศเดียว แต่ละภาพไม่มีลูกศรสองทิศระหว่างจุดต่างกัน

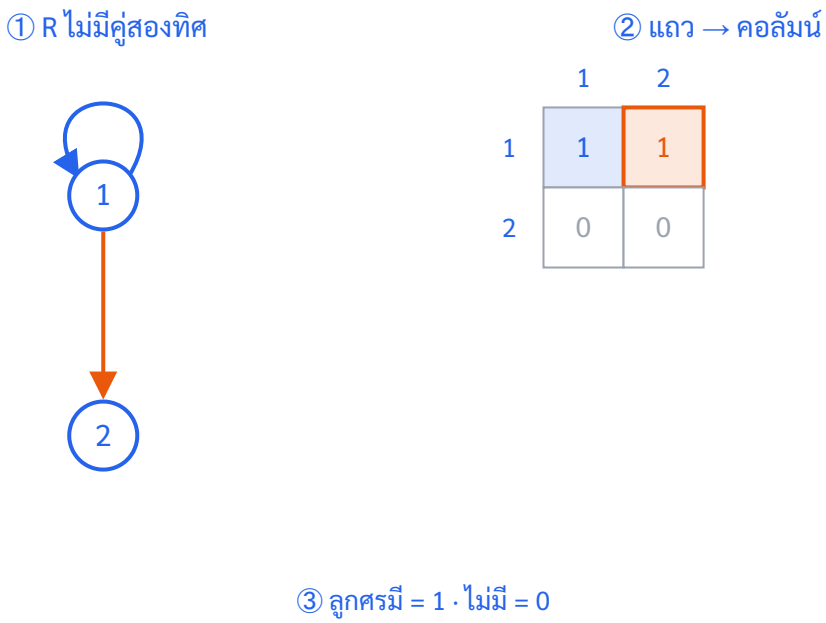
ลองคิดก่อนเปิดเฉลย

เดิน S ก่อน R จาก 1 จะไปจบที่ 2 ได้ไหม? จาก 2 จะไปจบที่ 1 ได้ไหม?

เฉลย ได้ทั้งคู่: 1→1→2 และ 2→1→1 ผลประกอบจึงมีทั้ง 1→2 และ 2→1

ข้อความที่สี่ของตัวอย่าง 3.12 “ถ้า R และ S ปฏิสมมาตร แล้ว $R \circ S$ ปฏิสมมาตร” เป็น **เท็จ** ลูกศรสองทิศในผลอาจเกิดจากคนละเส้นทางสองช่วง แม้ในแต่ละความสัมพันธ์ไม่มีสองทิศพร้อมกัน

บรรทัด 1 — กำหนดตัวอย่าง $X = \{1, 2\}, R = \{(1, 1), (1, 2)\}, S = \{(1, 1), (2, 1)\}$



① S ไม่มีคู่สองทิศ



② แถว → คอลัมน์

	1	2
1	1	0
2	1	0

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 2 — ตรวจสมมติฐาน วงวน (1,1) ไม่ผิดปฏิสมมาตร ส่วน R มีเฉพาะ (1,2) ไม่มี (2,1) และ S มีเฉพาะ (2,1) ไม่มี (1,2) ทั้งสองจึงปฏิสมมาตร

บรรทัด 3 — เดินจาก 1 S พา 1 ไป 1 แล้ว R พา 1 ไป 1 หรือ 2 ได้ จึงเพิ่ม (1,1),(1,2)

① ผลจากตัวหน้า 1

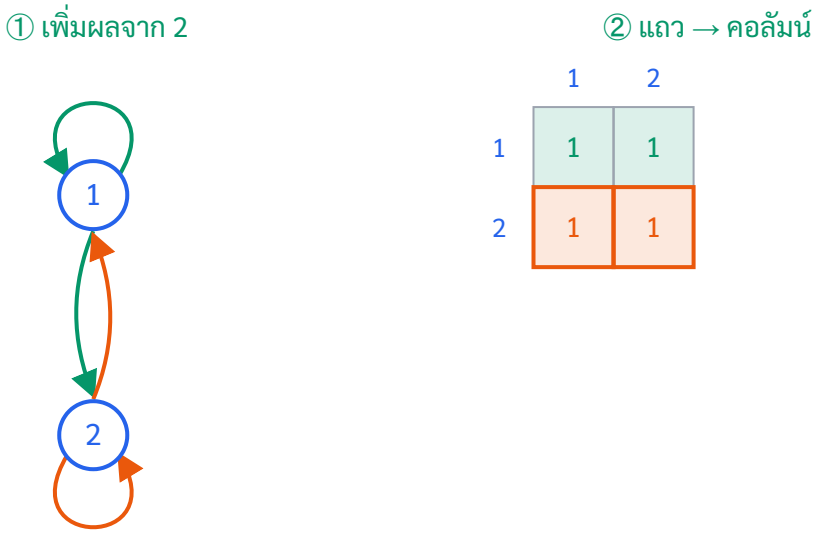


② แถว → คอลัมน์

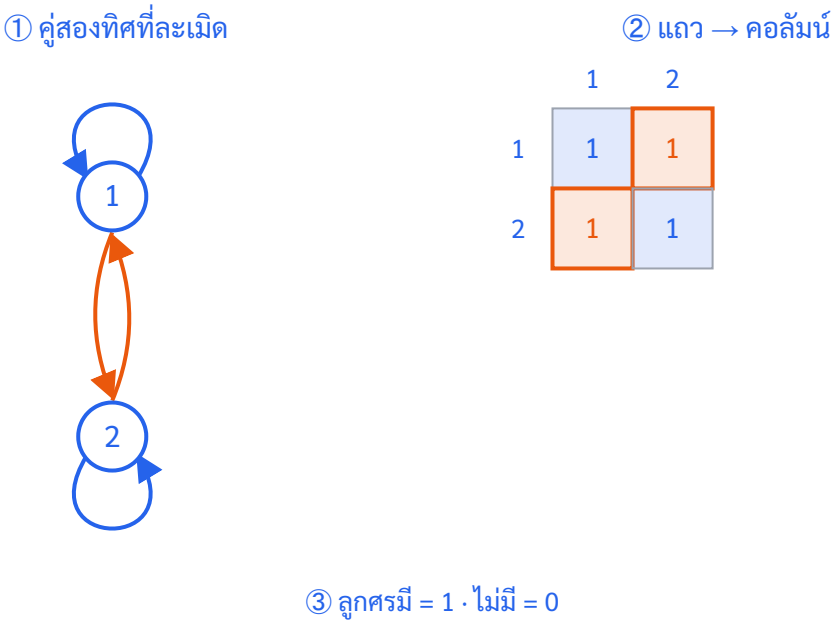
	1	2
1	1	1
2	0	0

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 4 — เดินจาก 2 S พา 2 ไป 1 แล้ว R พา 1 ไป 1 หรือ 2 ได้ จึงเพิ่ม (2,1),(2,2)



บรรทัด 5 — สรุปผลและหาตัวแย้ง $R \circ S = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$ มี (1,2),(2,1) โดย $1 \neq 2$ จึงไม่ปฏิสมมาตร



เช็กกลับ ทุกคู่ในผลมีจุดกลางเป็น 1 จริง สมมติฐานทั้งสองปฏิสมมาตรผ่าน ข้อสรุปพังด้วยคู่ต่างจุด 1,2 จึงหักล้างข้อความครบ

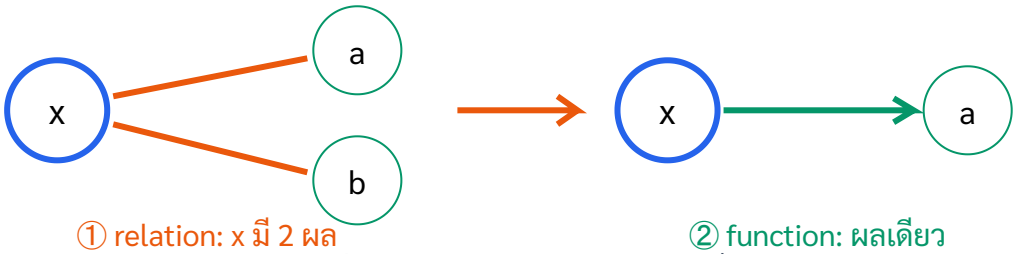
การไม่มีวงวนที่ 2 ใน R หรือ S ไม่ทำให้ปฏิสมมาตรเสีย เพราะการบังคับวงวนเป็นเงื่อนไขสะท้อน อย่าใช้เงื่อนไขของอีกสมบัติมาปฏิเสธตัวอย่างโต้แย้งนี้

ลงมือทำตามนี้

1. ห้ามสับสนปฏิสมมาตรกับสะท้อน

2. ยืนยันว่า R และ S ไม่มีคู่สองทิศต่างจุด
3. คำนวณผลประกอบให้ครบทุกตัวหน้า
4. วงคู่สองทิศต่างจุดในผล พร้อมระบุว่าสองจุดไม่เท่ากัน
5. จบเมื่อสมมติฐานจริงและข้อสรุปเท็จครบ

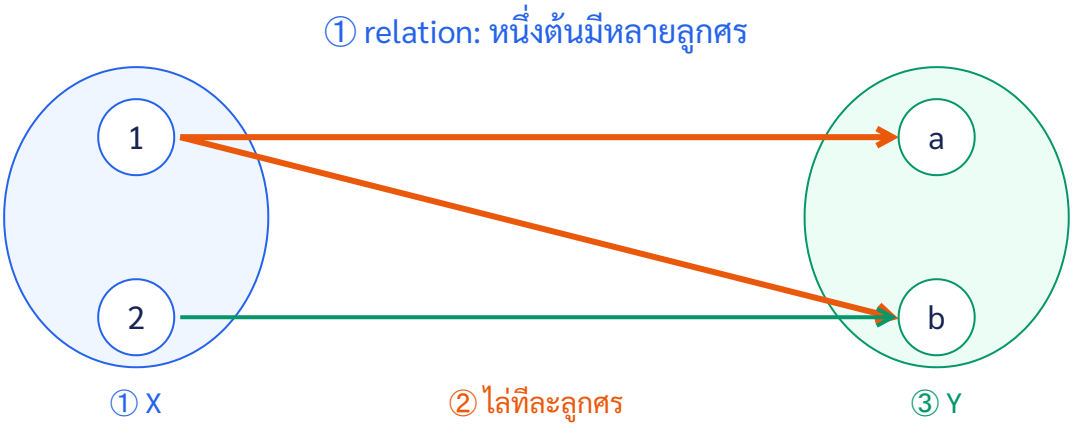
รับช่วงไปบทถัดไป: ความสัมพันธ์ทั่วไปเลือกได้หลายปลายทางจากตัวหน้าหนึ่งตัว ฟังก์ชันจะเพิ่มเงื่อนไขว่าทุกตัวในโดเมนต้องมีภาพเพียงตัวเดียว ส่วนความสัมพันธ์สมมูลจะใช้สะท้อน สมมาตร ถ่ายทอด เพื่อจัดสมาชิกเป็นกลุ่ม เราจะใช้เครื่องมือคู่–ลูกศร–ตารางที่ฝึกในบทนี้ต่อไป

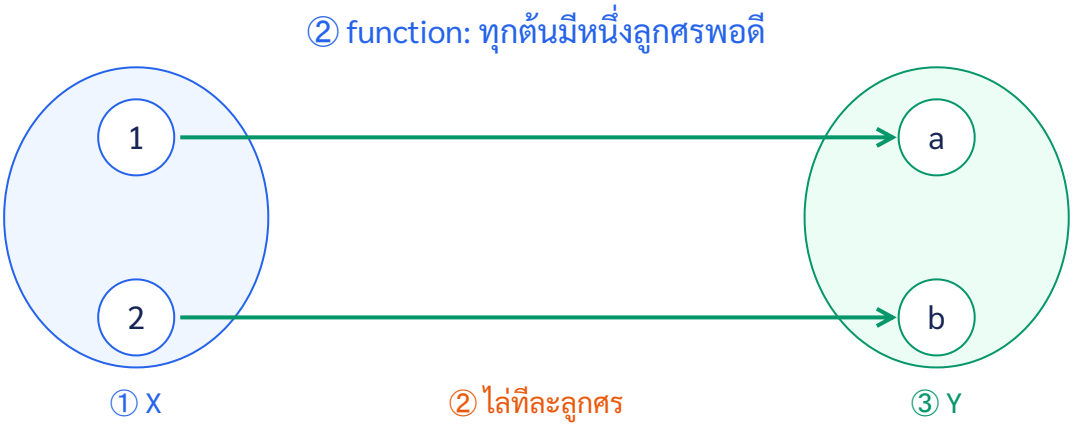


① relation: x มี 2 ผล ② function: ผลเดียว

③ บทถัดไปเพิ่มกฎ “ทุกต้นทางมีลูกศรออกหนึ่งเส้นพอดี”

บทที่ 5 ฟังก์ชันและความสัมพันธ์สมมูล





จากลูกศรความสัมพันธ์ในบทก่อน เราจะจัดสมาชิกที่ทำงานเหมือนกันให้เป็นกลุ่ม แล้วตรวจเครื่องจับคู่ว่าให้ผลครบหรือไม่ ย้อนกลับได้หรือไม่ และประกอบกันแล้วรักษาคุณสมบัติอะไร ภาพทุกชุดคงสมาชิกตั้งต้นให้ตรวจกลับได้

5.1 แยกกลุ่มแล้วมีสมาชิกซ้ำข้ามกลุ่มไหม

วางบัตร 1,2 ในถาดแรก 3,6 ในถาดที่สอง และ 8,9 ในถาดที่สาม ไม่มีหมายเลขใดอยู่สองถาดพร้อมกัน แต่ถ้าเปลี่ยนถาดสุดท้ายเป็น 3,9 หมายเลข 3 จะซ้ำกับถาดกลาง

ลองก่อนดูเฉลย

ถ้าตรวจเพียงถาดแรกกับถาดที่สองแล้วไม่พบซ้ำ เพียงพอจะรับรองทั้งสามถาดไหม

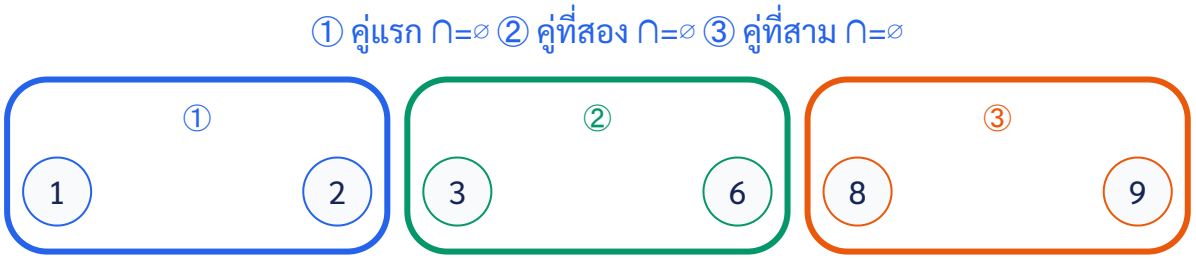
เฉลย ยังไม่พอ ต้องตรวจถาดที่สามกับถาดอื่นด้วย เพราะคู่ถาดที่สองกับสามอาจมีสมาชิกซ้ำ

ครอบครัวของเซตที่ **ไม่ทับซ้อนกันเป็นคู่ ๆ (pairwise disjoint)** หมายถึงเซตคนละตัวทุกคู่มีส่วนร่วมเป็นเซตว่าง เขียน $X \cap Y = \emptyset$ เมื่อ X, Y เป็นคนละเซตในครอบครัวนั้น

คำว่าเป็นคู่ ๆ ขอให้ไม่มีสมาชิกซ้ำข้ามกลุ่มใดเลย ไม่ใช่แค่ไม่มีสมาชิกตัวหนึ่งที่อยู่พร้อมกันทุกกลุ่ม

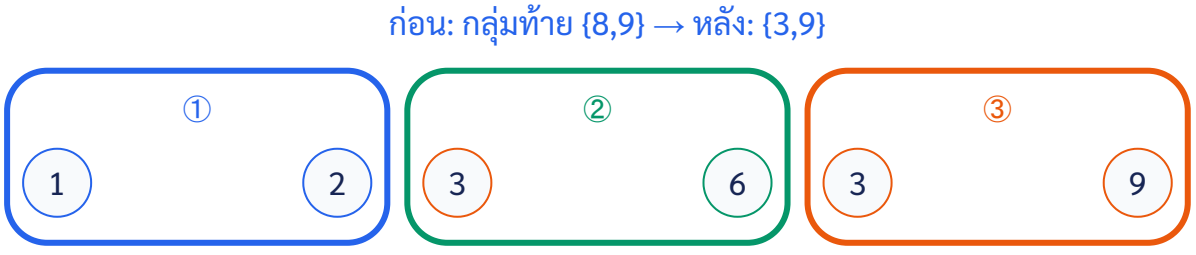
① ตรวจตัวอย่าง 3.1 ชุดแรก

$S_1 = \{\{1,2\},\{3,6\},\{8,9\}\}$ มีสามคู่ให้ตรวจ: กลุ่มแรกกับกลาง กลุ่มแรกกับท้าย และกลุ่มกลางกับท้าย ทุกคู่ไม่มีสมาชิกร่วม



② เปลี่ยนเฉพาะกลุ่มท้าย

$S_2 = \{\{1,2\},\{3,6\},\{3,9\}\}$ ทำให้ $\{3,6\} \cap \{3,9\} = \{3\}$ ซึ่งไม่ว่าง จึงไม่เป็น pairwise disjoint



③ เช็กกลับนิยาม

ผลร่วมของทุกกลุ่มใน S_2 พร้อมกันยังว่าง เพราะกลุ่มแรกไม่มี 3 แต่เกณฑ์เป็นคู่ ๆ แพ้ที่คู่กลาง–ท้าย จึงต้องตอบว่าไม่ผ่าน



③ ต้องผ่านทุกคู่ ไม่ใช่ดู ∩ รวมครั้งเดียว

ทำผิดแล้วพังตรงไหน

การหาส่วนร่วมของสามกลุ่มพร้อมกันแล้วได้ ∅ เป็นหลักฐานไม่พอ ตัวอย่าง S_2 แสดงว่ารวมว่างได้ทั้งที่คู่หนึ่งยังทับกัน

ลงมือทำตามนี้

1. เขียนกลุ่มทั้งหมด
2. เลือกทุกคู่ของกลุ่มที่ต่างกัน
3. หาส่วนร่วมของแต่ละคู่
4. พบส่วนร่วมไม่ว่างหยุดตอบไม่ผ่าน; ถ้าว่างครบทุกคู่จึงผ่าน

5.2 แบ่งของครบทุกชิ้น โดยแต่ละชิ้นอยู่กลุ่มเดียว

มีบัตร 1,2,3,4,5 ต้องแจกลงถาดให้ครบ ไม่มีบัตรตกหล่น ไม่ให้บัตรซ้ำข้ามถาด และไม่มีถาดว่างถูกนับเป็นหนึ่งกลุ่ม

ลองก่อนดูเฉลย

กลุ่ม {1},{2,3},{4,5} ผ่านไหม ถ้าเอา 5 ออกจากกลุ่มสุดท้ายจะยังผ่านหรือไม่

เฉลย ชุดแรกผ่านครบ แต่เมื่อเอา 5 ออกก็มีของตกหล่น จึงไม่ผ่านแม้กลุ่มยังไม่ทับกัน

การแบ่งส่วนหรือพาร์ทิชัน (partition) ของ X คือครอบครัวเซตย่อยที่ไม่ว่าง ไม่ทับซ้อนกันเป็นคู่ ๆ และรวมกันได้ X พอดี สมาชิกของ X จึงอยู่หนึ่งกลุ่มพอดี

แต่ละเงื่อนไขทำคนละหน้าที่: เซตย่อยห้ามของเกิน เซตไม่ว่างห้ามกลุ่มหลอก ไม่ทับกันห้ามซ้ำ และรวมครบห้ามตกหล่น

① ตรวจตัวอย่าง 3.13 แบบแรก

ให้ X={1,2,3,4,5}, S_a={{1},{2,3},{4,5}} ทุกกลุ่มไม่ว่าง ทุกคู่ไม่ทับ และรวมได้ X

① กลุ่มไม่ว่าง ② ไม่ทับกัน ③ รวมครบ 1–5



② ย้ายสมาชิกแต่ยังรักษาเงื่อนไข

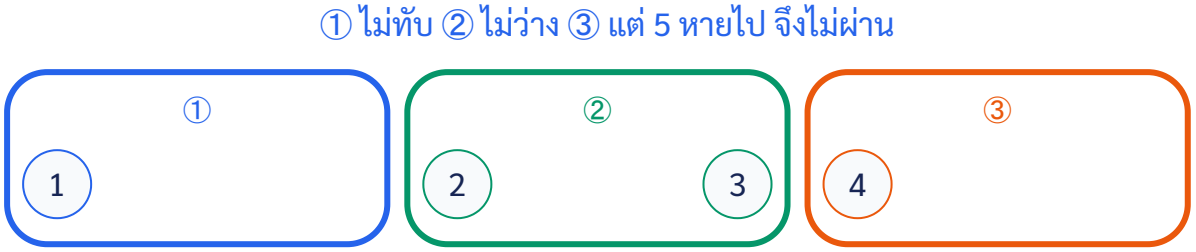
อีกแบบ S_β={{1,4},{2,5},{3}} ก็ผ่าน ไม่จำเป็นต้องแบ่งตามจำนวนติดกัน

ก่อน S_a → ย้ายบัตร → หลัง S_β ยังคงครบและไม่ซ้ำ



③ ลองทำของตกแล้วเช็กกลับ

เปลี่ยน S_a เป็น {{1},{2,3},{4}} จะรวมได้ {1,2,3,4} ซึ่งขาด 5 จึงไม่เป็นพาร์ทิชันของ X เดิม



④ แยกเกณฑ์กลุ่มว่าง

ถ้าเติม ∅ เข้า S_a ผลรวมยังครบและไม่ทับกลุ่มอื่น แต่ผิดเงื่อนไขกลุ่มไม่ว่าง จึงห้ามเติมกลุ่มว่าง



ทำผิดแล้วพังตรงไหน

การไม่ทับกันอย่างเดียวไม่ได้รับรองว่าแบ่งครบ และการรวมครบอย่างเดียวไม่ได้รับรองว่าไม่ซ้ำ เช่นเพิ่ม 3 ไปกลุ่มแรกของ S_a จะทำให้ 3 อยู่สองกลุ่ม

ลงมือทำตามนี้

1. ทุกกลุ่มต้องไม่ว่างและเป็นเซตย่อยของ X
2. ตรวจทุกคู่ว่าไม่ทับ
3. รวมสมาชิกแล้วเทียบกับ X
4. ผ่านครบสามเงื่อนไขจึงหยุดตอบว่าเป็นพาร์ทิชัน

5.3 จากกลุ่มสี สร้างลูกศร “อยู่กลุ่มเดียวกัน”: ตัวอย่าง 3.14

แยกบัตรเป็นกลุ่ม {1,3,5}, {2,6}, {4} แล้วลากลูกศรจากสมาชิกหนึ่งไปหาอีกสมาชิกเมื่ออยู่ถาดเดียวกัน สมาชิกหนึ่งย่อมอยู่ถาดเดียวกับตัวเองด้วย

ลองก่อนดูเฉลย

ต้องมีลูกศร 1→5 และ 5→1 ไหม แล้ว 1→2 ต้องมีหรือไม่

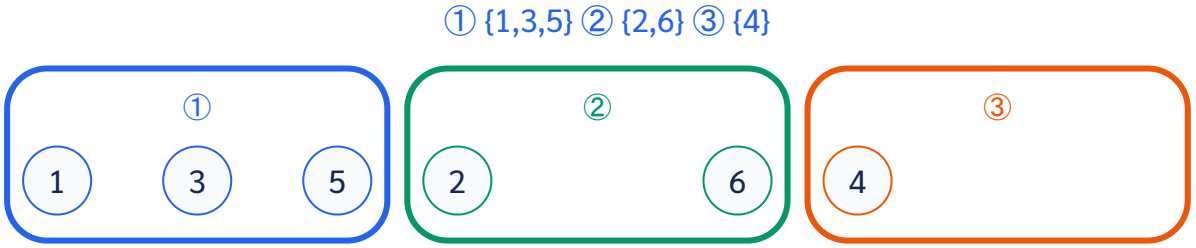
เฉลย สองลูกศรแรกต้องมีเพราะอยู่กลุ่มเดียวกัน ส่วน 1→2 ไม่มีเพราะข้ามกลุ่ม

กำหนด **ความสัมพันธ์จากพาร์ทิชัน** โดย xRy ก็ต่อเมื่อมีส่วน A ของพาร์ทิชันที่ x และ y อยู่ใน A ด้วยกัน แต่ละกลุ่มจึงสร้างทุกคู่ใน A×A รวมถึงคู่ตัวเอง

ถ้าตกคู่ใดภายในกลุ่ม เราจะบอกว่าคนในกลุ่มเดียวกันบางคู่ไม่สัมพันธ์กัน ซึ่งผิดนิยาม ส่วนการเติมคู่ข้ามกลุ่มก็จะอ้างว่าอยู่กลุ่มเดียวกันทั้งที่ไม่ใช่

① เก็บข้อมูลตั้งต้น

X={1,2,3,4,5,6}, S={{1,3,5},{2,6},{4}} ตรวจว่าบัตรทุกใบอยู่กลุ่มเดียวพอดี

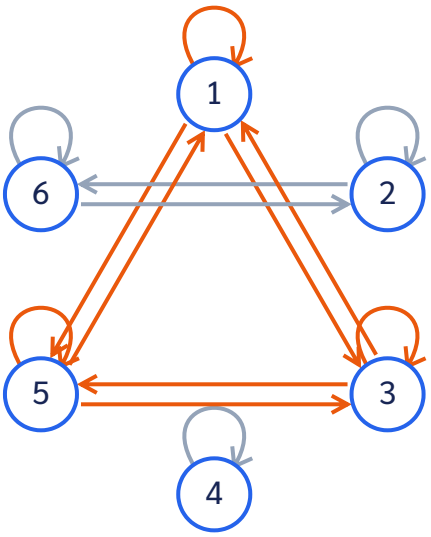


② สร้างคู่จากกลุ่มแรก

{1,3,5}×{1,3,5} ให้ (1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5) รวม 9 คู่

ก่อน: กลุ่มสี → หลัง: คู่ในกลุ่มแรก

① ลูกศรของคู่ลำดับ



② แถว x / คอลัมน์ y

	1	2	3	4	5	6
1	1	0	1	0	1	0
2	0	1	0	0	0	1
3	1	0	1	0	1	0
4	0	0	0	1	0	0
5	1	0	1	0	1	0
6	0	1	0	0	0	1

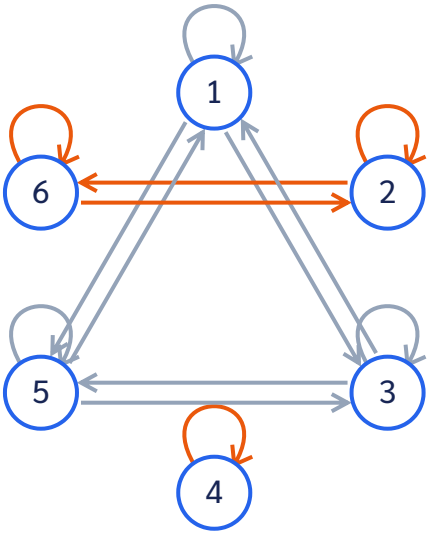
③ ช่อง 1 ตรงกับลูกศรหนึ่งคู่; สีส้มคือคู่ที่กำลังตรวจ

③ เติมอีกสองกลุ่ม

กลุ่ม {2,6} ให้ (2,2),(2,6),(6,2),(6,6) รวม 4 คู่; กลุ่ม {4} ให้ (4,4) อีก 1 คู่ รวมทั้งหมด 9+4+1=14 คู่

เติมคู่จาก {2,6} และ {4}

① ลูกศรของคู่ลำดับ



② แถว x / คอลัมน์ y

	1	2	3	4	5	6
1	1	0	1	0	1	0
2	0	1	0	0	0	1
3	1	0	1	0	1	0
4	0	0	0	1	0	0
5	1	0	1	0	1	0
6	0	1	0	0	0	1

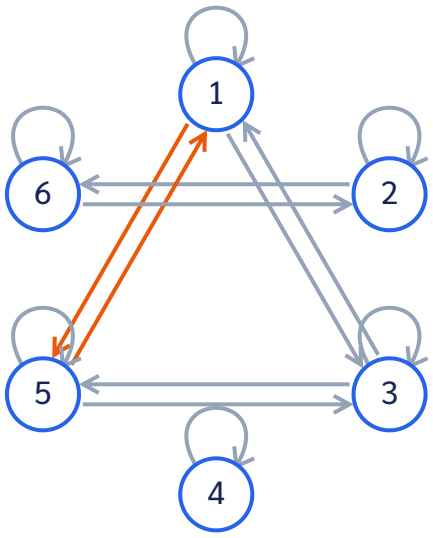
③ ช่อง 1 ตรงกับลูกศรหนึ่งคู่; สีส้มคือคู่ที่กำลังตรวจ

④ เช็กกลับ

ทุกลูกศรต้องเริ่มและจบในกลุ่มเดียวกัน เมทริกซ์มี 1 ทั้งหมด 14 ช่อง และตำแหน่ง (1,2) เป็น 0 ตรงกับไม่มีลูกศรข้ามกลุ่ม

เช็กครบ: 14 ลูกศร ↔ 14 ช่องที่เป็น 1

① ลูกศรของคู่ลำดับ



② แถว x / คอลัมน์ y

	1	2	3	4	5	6
1	1	0	1	0	1	0
2	0	1	0	0	0	1
3	1	0	1	0	1	0
4	0	0	0	1	0	0
5	1	0	1	0	1	0
6	0	1	0	0	0	1

③ ช่อง 1 ตรงกับลูกศรหนึ่งคู่; สีส้มคือคู่ที่กำลังตรวจ

ทำผิดแล้วพังตรงไหน

ลืมวงวน (4,4) เพราะกลุ่มมีสมาชิกเดียวจะผิด สมาชิก 4 ยังอยู่กลุ่มเดียวกับตัวเอง จึงต้องมีคู่นี้

ลงมือทำตามนี้

1. ตรวจว่ากลุ่มตั้งต้นเป็นพาร์ทิชัน
2. ทำ A×A ของแต่ละกลุ่ม
3. รวมคู่ทั้งหมดโดยไม่เติมคู่ข้ามกลุ่ม
4. เทียบทุกคู่กับภาพและเมทริกซ์แล้วหยุด

5.4 ทำไม “อยู่กลุ่มเดียวกัน” มีคุณสมบัติครบสามข้อ

เมื่อ 1 กับ 3 อยู่กลุ่มเดียวกัน ลูกศรกลับ 3→1 ก็มีด้วย ถ้า 3 อยู่กลุ่มเดียวกับ 5 ทั้ง 1 และ 5 ก็ยังต้องอยู่ในกลุ่มนั้น เพราะสมาชิก 3 อยู่ได้เพียงกลุ่มเดียว

ลองก่อนดูเฉลย

ถ้าอนุญาตให้ 3 อยู่ทั้งกลุ่ม {1,3} และ {3,5} เรายังสรุปว่า 1 กับ 5 อยู่กลุ่มเดียวกันได้หรือไม่

เฉลย สรุปไม่ได้ นี่เป็นเหตุผลที่ข้อห้ามทับกันของพาร์ทิชันจำเป็นต่อการเชื่อมสองลูกศร

ความสัมพันธ์สมมูล (equivalence relation) ต้องมีสามคุณสมบัติ: สะท้อน (reflexive: xRx ทุก x), สมมาตร (symmetric: xRy แล้ว yRx), ถ่ายทอด (transitive: xRy และ yRz แล้ว xRz) บทนี้ใช้ทั้งสามข้อกับความหมายของกลุ่ม

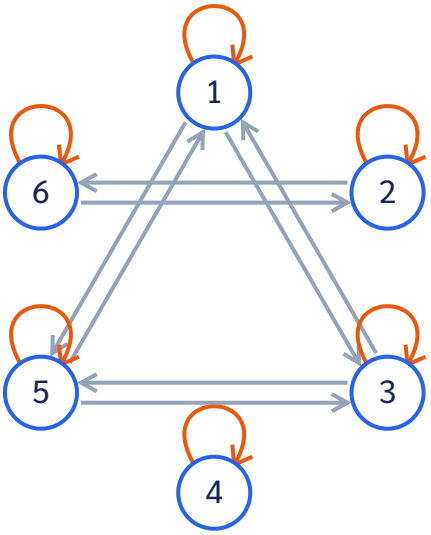
แยกให้ชัดว่า **สิ่งที่ให้มา** คือ S เป็นพาร์ทิชันของ X และ xRy หมายถึงอยู่ส่วนเดียวกัน **สิ่งที่ต้องพิสูจน์** คือคุณสมบัติสามข้อ เราห้ามสมมติว่าความสัมพันธ์สมมูลอยู่แล้ว

① สะท้อน: เริ่มจากสมาชิกทั่วไป

เลือก $x \in X$ ใด ๆ เพราะ S รวมครบ X จึงมีส่วน A ที่ $x \in A$ และ x อยู่ A ร่วมกับตัวเอง จึง xRx

สิ่งที่แสดง: วงวนมีครบทุกสมาชิก

① ลูกศรของคู่ลำดับ



② แถว x / คอลัมน์ y

	1	2	3	4	5	6
1	1	0	1	0	1	0
2	0	1	0	0	0	1
3	1	0	1	0	1	0
4	0	0	0	1	0	0
5	1	0	1	0	1	0
6	0	1	0	0	0	1

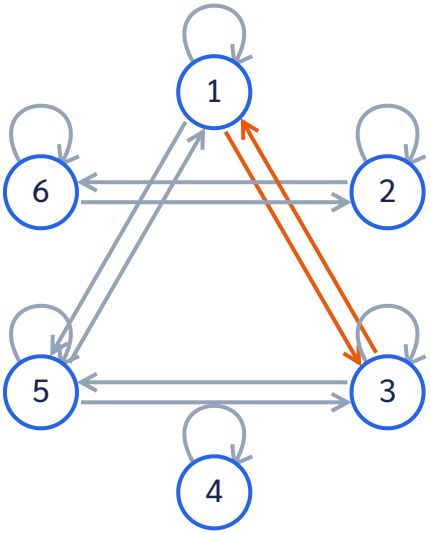
③ ช่อง 1 ตรงกับลูกศรหนึ่งคู่; สีส้มคือคู่ที่กำลังตรวจ

② สมมาตร: ใช้สมมติฐานของข้อนี้

สมมติ xRy จึงมี A ที่ x,y∈A สลับลำดับเป็น y,x ก็ยังอยู่ A เดิม จึง yRx ตัวอย่าง 1→3 บังคับให้มี 3→1

ก่อน 1→3 → สลับลำดับ → หลัง 3→1

① ลูกศรของคู่ลำดับ



② แถว x / คอลัมน์ y

	1	2	3	4	5	6
1	1	0	1	0	1	0
2	0	1	0	0	0	1
3	1	0	1	0	1	0
4	0	0	0	1	0	0
5	1	0	1	0	1	0
6	0	1	0	0	0	1

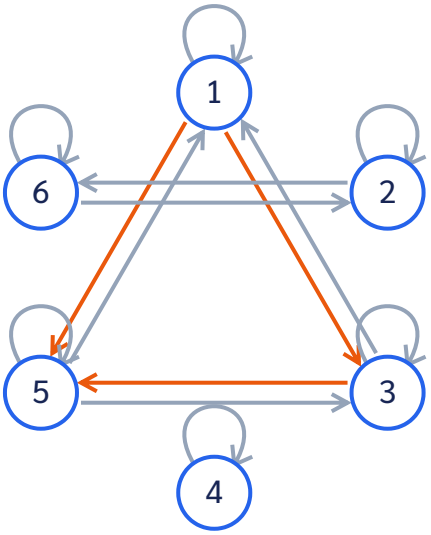
③ ช่อง 1 ตรงกับลูกศรหนึ่งคู่; สีส้มคือคู่ที่กำลังตรวจ

③ ถ่ายทอด: เชื่อมสองส่วนให้เป็นส่วนเดียว

สมมติ xRy และ yRz จึง x,y อยู่ส่วน A และ y,z อยู่ส่วน B เนื่องจาก y∈A∩B ส่วน A,B ทับกัน พาร์ทิชันห้ามส่วนต่างกันทับ จึง A=B ทำให้ x,z อยู่ส่วนเดียวกัน และ xRz

ก่อน 1→3 และ 3→5 → หลังต้องมี 1→5

① ลูกศรของคู่ลำดับ



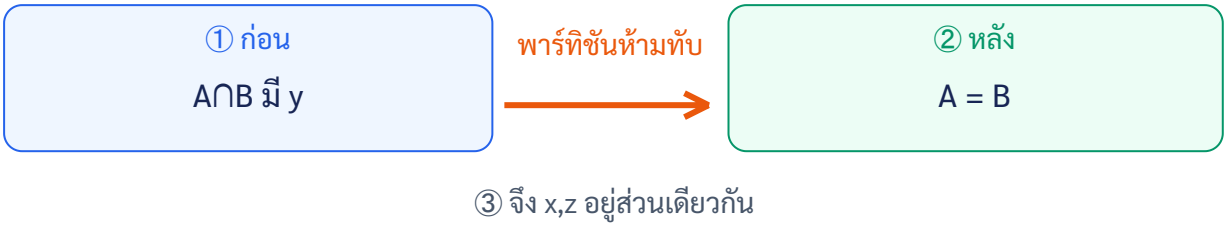
② แถว x / คอลัมน์ y

	1	2	3	4	5	6
1	1	0	1	0	1	0
2	0	1	0	0	0	1
3	1	0	1	0	1	0
4	0	0	0	1	0	0
5	1	0	1	0	1	0
6	0	1	0	0	0	1

③ ช่อง 1 ตรงกับลูกศรหนึ่งคู่; สีส้มคือคู่ที่กำลังตรวจ

④ เช็กกลับว่าใช้สมมติฐานตรงไหน

ใช้ “รวมครบ” เพื่อให้ทุก x มีส่วน ใช้ “ไม่ทับกัน” เพื่อสรุป A=B และใช้ “อยู่ส่วนเดียวกัน” เพื่อสร้างลูกศร ไม่ได้อ้างคุณสมบัติที่กำลังพิสูจน์เป็นเหตุผลให้ตัวมันเอง



ทำผิดแล้วพังตรงไหน

ถ้าเริ่มว่า “R ถ่ายทอดเพราะ R เป็นสมมูล” จะวนอ้างข้อสรุปเป็นสมมติฐาน ต้องเริ่มจาก xRy,yRz และโครงสร้างของพาร์ทิชันจริง ๆ

ลงมือทำตามนี้

1. จดสิ่งที่ให้มาก่อน: พาร์ทิชันและนิยาม R
2. แยกเป้าหมายสามข้อ
3. ในแต่ละข้อใช้สมาชิกทั่วไปและสมมติฐานเฉพาะข้อนั้น
4. ครบสามข้อจึงหยุดสรุปว่าเป็นสมมูล

5.5 เลือกตัวแทนหนึ่งตัว แล้วเก็บทั้งกลุ่ม: ตัวอย่าง 3.15

ในกลุ่ม {1,3,5} ถ้าถามว่าใครบ้างสัมพันธ์กับ 1 จะได้ 1,3,5 หากเปลี่ยนไปถามว่าใครบ้างสัมพันธ์กับ 3 ก็ยังได้กลุ่มเดิม

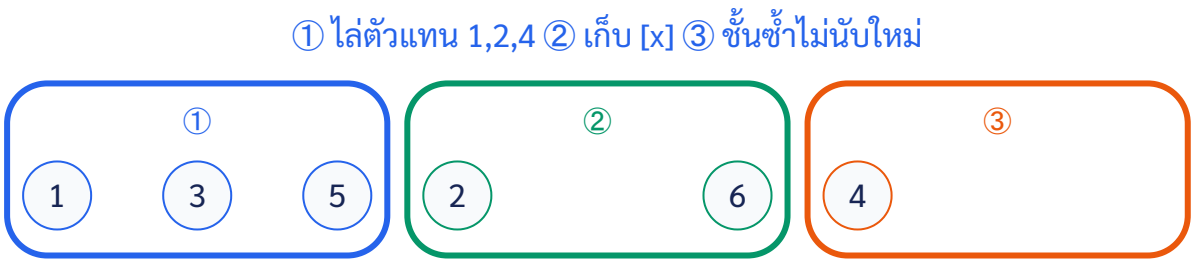
ลองก่อนดูเฉลย

กลุ่มที่ได้จากตัวแทน 1 กับตัวแทน 3 ต้องนับเป็นสองกลุ่มใหม่หรือกลุ่มเดียวกัน

เฉลย เป็นกลุ่มเดียวกันเพราะมีสมาชิกเหมือนกัน แม้ชื่อที่ใช้เรียกต่างกัน

ชั้นสมมูล (equivalence class) ของ a เขียน $[a]=\{x\in X \mid xRa\}$ คือสมาชิกทั้งหมดที่สัมพันธ์กับ a ใช้กับ R ที่ตรวจแล้วว่าเป็นความสัมพันธ์สมมูล ตัวแทนต่างกันอาจเรียกชั้นเดียวกันได้

การเลือก a เป็นการเลือกจุดเริ่มค้นกลุ่ม ไม่ใช่การบังคับว่าชั้นมีสมาชิกเพียง a เมื่อ R เกิดจากพาร์ทิชัน ชั้นจึงคือส่วนเดิมของพาร์ทิชัน

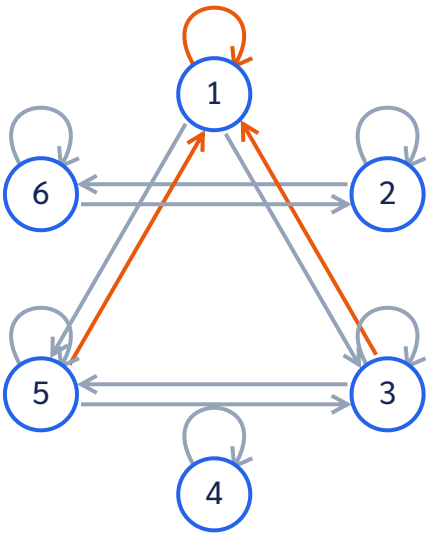


① หา [1] จากคู่ที่ลงท้ายด้วย 1

ใน R ของตัวอย่าง 3.14 คู่ที่ลงท้ายด้วย 1 คือ (1,1),(3,1),(5,1) จึง [1]={1,3,5}

① ล็อกคอลัมน์ 1 ② เก็บแถวที่เป็น 1 ③ ได้ [1]

① ลูกศรของคู่ลำดับ



② แถว x / คอลัมน์ y

	1	2	3	4	5	6
1	1	0	1	0	1	0
2	0	1	0	0	0	1
3	1	0	1	0	1	0
4	0	0	0	1	0	0
5	1	0	1	0	1	0
6	0	1	0	0	0	1

③ ช่อง 1 ตรงกับลูกศรหนึ่งคู่; สีส้มคือคู่ที่กำลังตรวจ

② เปลี่ยนตัวแทนแต่ผลเดิม

[3] และ [5] ก็ได้ {1,3,5}; [2]=[6]={2,6}; [4]={4}

① [1]=[3]=[5] ② [2]=[6] ③ [4]



③ เก็บเฉพาะชั้นที่ต่างกัน

ชั้นที่ต่างกันมี {1,3,5}, {2,6}, {4} จึงกลับเป็น S={{1,3,5},{2,6},{4}} ซึ่งมี 3 ส่วน ไม่ใช่ 6 ส่วน



③ จำนวนตัวแทนไม่เท่าจำนวนชั้น

④ เช็กกลับเป็นพาร์ทิชัน

ชั้นทั้งสามไม่ว่าง ไม่ทับกัน รวมได้ X={1,2,3,4,5,6} พอดี และคู่ที่อยู่ในชั้นเดียวกันสร้าง R เดิมครบ 14 คู่

ก่อน R → หลังชั้นสมมูล → กลับมาสร้าง R เดิมได้



ทำผิดแล้วพังตรงไหน

อย่าเก็บ [1] และ [3] เป็นคนละส่วนเพียงเพราะชื่อไม่เหมือนกัน เซตตัดสินจากสมาชิก จึง {1,3,5} เป็นกลุ่มเดิมเพียงกลุ่มเดียว

ลงมือทำตามนี้

1. ตรวจ R ว่าเป็นสมมูลก่อนเรียกชั้นสมมูล
2. ล็อก a แล้วรวบ x ที่ทำให้ xRa
3. ทำจนครบสมาชิกแต่ลบชั้นที่ซ้ำ
4. ตรวจไม่ว่าง ไม่ทับ รวมครบ แล้วหยุด

5.6 ทำไมชั้นสมมูลที่ทับกันต้องเป็นชั้นเดียวกัน

ถ้าเจอสมาชิกตัวหนึ่งอยู่ในทั้งกลุ่มของ a และกลุ่มของ b เราอยากรู้ว่าจะเป็นสองกลุ่มที่ทับกันเฉย ๆ หรือจริง ๆ เป็นกลุ่มเดียวกันทั้งชุด

ลองก่อนดูเฉลย

ในตัวอย่างก่อน 3 อยู่ทั้ง [1] และ [5] ผลสองชั้นนั้นต่างกันหรือเหมือนกัน

เฉลย เหมือนกันทั้งชุด คือ {1,3,5} ไม่ใช่เพียงมี 3 ซ้ำกันตัวเดียว

สำหรับความสัมพันธ์สมมูล **ชั้นสมมูลสองชั้นต้องเท่ากันหรือไม่ทับกันเลย** ข้อความนี้เป็นเหตุผลที่ชั้นทั้งหมดสร้างพาร์ทิชันได้

สมมติฐาน: R สะท้อน สมมาตร ถ่ายทอด และมี z∈[a]∩[b] **เป้าหมาย:** [a]=[b] เราจะพิสูจน์ว่าทุกสมาชิกของชั้นหนึ่งอยู่ในอีกชั้น แล้วทำกลับทิศ



③ ชั้นสมมูลทับกันแล้วต้องเป็นกลุ่มเดียว

① แปลการมีสมาชิกกลาง

z∈[a] ให้ zRa และ z∈[b] ให้ zRb จากสมมาตรของ zRa ได้ aRz



③ พร้อมต่อผ่านสมาชิก z

② เชื่อมตัวแทน

จาก aRz และ zRb ใช้การถ่ายทอดได้ aRb



③ ตัวแทนทั้งสองสัมพันธ์กัน

③ ย้ายสมาชิกทั่วไป

เลือก x∈[a] ใด ๆ จึง xRa แล้วต่อกับ aRb ได้ xRb จึง x∈[b] และ [a]⊆[b]



③ สมาชิกทุกตัวของ [a] อยู่ใน [b]

④ ทำกลับทิศแล้วเช็กกลับ

จาก aRb ใช้สมมาตรได้ bRa ทำแบบเดิมกับสมาชิกใน [b] จึง [b]⊆[a] รวมสองทิศได้ [a]=[b]

เช็กตัวอย่าง: [1] และ [5] ใช้กลุ่มสีเดียวกัน



⑤ ตรวจครบพาร์ทิชัน

ทุก a อยู่ [a] เพราะ aRa จึงทุกชั้นไม่ว่างและรวมครบ X ส่วนผลข้างต้นบอกว่าชั้นที่ต่างกันไม่ทับกัน จึงเป็นพาร์ทิชัน



③ ทุกสมาชิกมีชั้นและชั้นไม่ว่าง

ทำผิดแล้วพังตรงไหน

หาก R ไม่สมมาตรหรือไม่ถ่ายทอด ขั้นเชื่อมลูกศรอาจทำไม่ได้ จึงห้ามใช้กฎชั้นเท่ากันหรือไม่ทับกับความสัมพันธ์ใด ๆ โดยยังไม่ตรวจสมมูล

ลงมือทำตามนี้

1. สมมติว่ามีสมาชิกกลางในสองชั้น
2. ใช้สมมาตรกลับลูกศรให้ต่อได้
3. ใช้ถ่ายทอดเพื่อย้ายสมาชิกทั่วไปไปอีกชั้น
4. ทำสองทิศจึงสรุปเท่ากัน แล้วใช้สะท้อนตรวจไม่ว่างและรวมครบ

5.7 ผลต่างหารสองลงตัว: ตัวอย่าง 3.16

1 กับ 5 ต่างกัน -4 ซึ่งหารสองลงตัว ส่วน 1 กับ 2 ต่างกัน -1 ซึ่งหารสองไม่ลงตัว ความสัมพันธ์นี้ดูว่าจำนวนสองตัวเป็นคี่เหมือนกันหรือคู่เหมือนกันหรือไม่

ลองก่อนดูเฉลย

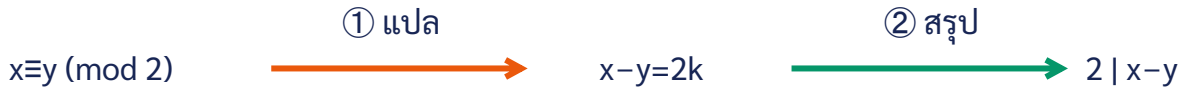
เมื่อ 1 สัมพันธ์กับ 5 แล้ว 5 สัมพันธ์กับ 1 ด้วยไหม แม้ผลต่างเปลี่ยนจาก -4 เป็น 4

เฉลย สัมพันธ์ด้วย เพราะทั้ง -4 และ 4 เป็นจำนวนเต็มคูณ 2 ได้

กำหนด $X=\{1,2,3,4,5,6\}$ และ xRy เมื่อ **2 หาร $x-y$ ลงตัว** เขียนได้ว่า $x-y=2k$ สำหรับจำนวนเต็ม k เราจะพิสูจน์ว่า R เป็นสมมูลโดยไม่สมมติผลนี้ไว้ล่วงหน้า

สิ่งที่ให้มา: สมาชิก x,y,z อยู่ X และนิยามการหารลงตัว **สิ่งที่ต้องแสดง:** สะท้อน สมมาตร ถ่ายทอด ตัวแปร k,m ที่ใช้เป็นจำนวนเต็ม จึงยังคงเป็นจำนวนเต็มเมื่อเปลี่ยนเครื่องหมายหรือบวกกัน

พิสูจน์สองทิศด้วยผลต่างเดียวกัน



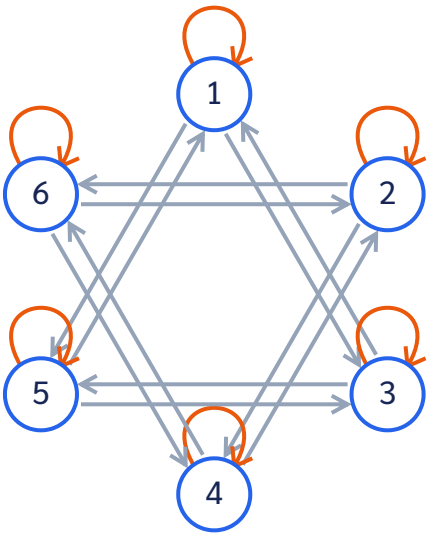
③ ย้อนลูกศร: $2 \mid x-y \Rightarrow x-y=2k \Rightarrow x\equiv y \pmod 2$

① สะท้อน: ใช้ x ทั่วไป

$x-x=0=2\times 0$ จึง 2 หาร $x-x$ ลงตัว และ xRx ทุก $x\in X$

ก่อน x → ตรวจ x−x=0 → หลังมีวงวนทุกจุด

① ลูกศรของคู่ลำดับ



② แถว x / คอลัมน์ y

	1	2	3	4	5	6
1	1	0	1	0	1	0
2	0	1	0	1	0	1
3	1	0	1	0	1	0
4	0	1	0	1	0	1
5	1	0	1	0	1	0
6	0	1	0	1	0	1

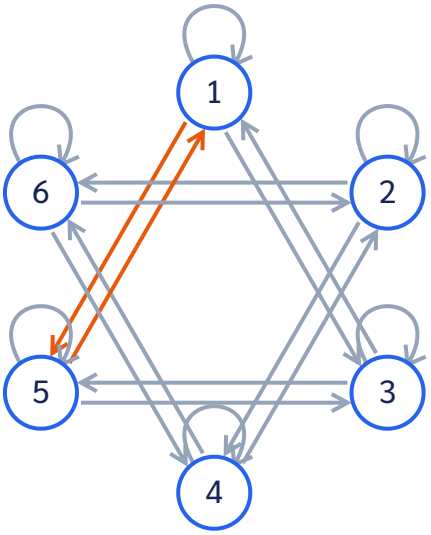
③ ช่อง 1 ตรงกับลูกศรหนึ่งคู่; สีส้มคือคู่ที่กำลังตรวจ

② สมมาตร: เริ่มจากสิ่งที่สมมติ

สมมติ xRy จึง $x-y=2k$ สำหรับ $k\in\mathbb{Z}$ จะได้ $y-x=-(x-y)=-2k=2(-k)$ และ $-k\in\mathbb{Z}$ จึง yRx

ก่อน 1→5 จาก −4 → หลัง 5→1 จาก 4

① ลูกศรของคู่ลำดับ



② แถว x / คอลัมน์ y

	1	2	3	4	5	6
1	1	0	1	0	1	0
2	0	1	0	1	0	1
3	1	0	1	0	1	0
4	0	1	0	1	0	1
5	1	0	1	0	1	0
6	0	1	0	1	0	1

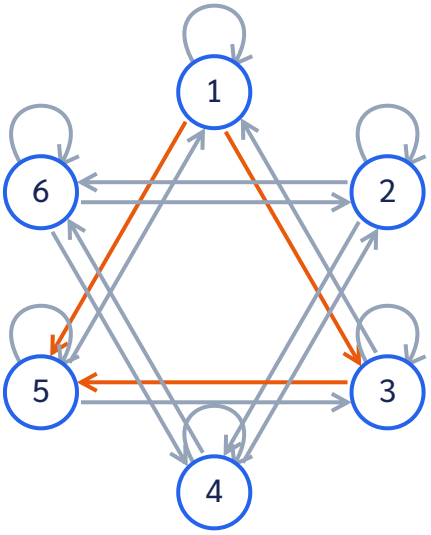
③ ช่อง 1 ตรงกับลูกศรหนึ่งคู่; สีส้มคือคู่ที่กำลังตรวจ

③ ถ่ายทอด: สมมติสองความสัมพันธ์

สมมติ xRy และ yRz เขียน $x-y=2k$ และ $y-z=2m$ แล้ว $x-z=(x-y)+(y-z)=2k+2m=2(k+m)$ จึง xRz

ก่อน 1→3, 3→5 → หลังต้องมี 1→5

① ลูกศรของคู่ลำดับ



② แถว x / คอลัมน์ y

	1	2	3	4	5	6
1	1	0	1	0	1	0
2	0	1	0	1	0	1
3	1	0	1	0	1	0
4	0	1	0	1	0	1
5	1	0	1	0	1	0
6	0	1	0	1	0	1

③ ช่อง 1 ตรงกับลูกศรหนึ่งคู่; สีส้มคือคู่ที่กำลังตรวจ

④ เช็กกลับตัวเลข

$1-3=-2, 3-5=-2$ รวมได้ $1-5=-4$ ซึ่งหาร 2 ลงตัว เช่นเดียวกับเหตุผลทั่วไป จึงครบสามข้อและ R เป็นสมมูล



③ สมาชิกกลาง 3 หักล้างออก

ทำผิดแล้วพังตรงไหน

การเห็นว่าทุก x มี xRx เพียงข้อเดียวไม่พอเรียกสมมูล ต้องพิสูจน์อีกสองข้อด้วย และผลต่างติดลบยังหารลงตัวได้ ไม่ควรตัดคู่ย้อนทิ้ง

ลงมือทำตามนี้



③ ตรวจนิยามทั้งสองทิศแล้วจบ

1. เขียนการหารลงตัวเป็นผลคูณจำนวนเต็ม
2. ตรวจ x−x
3. เริ่มสมมาตรจาก xRy แล้วหาคู่ย้อน
4. เริ่มถ่ายทอดจากสองคู่แล้วบวกสมการ ครบสามข้อจึงหยุด

5.8 แยกคี่กับคู่จากคู่ลำดับ: ตัวอย่าง 3.16 ต่อ

ถ้าล็อกตัวแทนเป็น 1 สมาชิกที่ลบ 1 แล้วได้จำนวนคู่คือ 1,3,5 ถ้าล็อกเป็น 2 สมาชิกที่ผ่านเปลี่ยนเป็น 2,4,6

ลองก่อนดูเฉลย

3 อยู่กลุ่มของ 1 หรือกลุ่มของ 2 ใช้ผลต่างใดเป็นหลักฐาน

เฉลย อยู่กลุ่มของ 1 เพราะ $3-1=2$ หารสองลงตัว แต่ $3-2=1$ หารสองไม่ลงตัว

เพราะข้อก่อนตรวจแล้วว่า R เป็นสมมูล เราจึงหาชั้นด้วย $[a]=\{x\in X \mid 2 \text{ หาร } x-a \text{ ลงตัว}\}$ แล้วรวมชื่อชั้นที่ได้เซตเดียวกัน

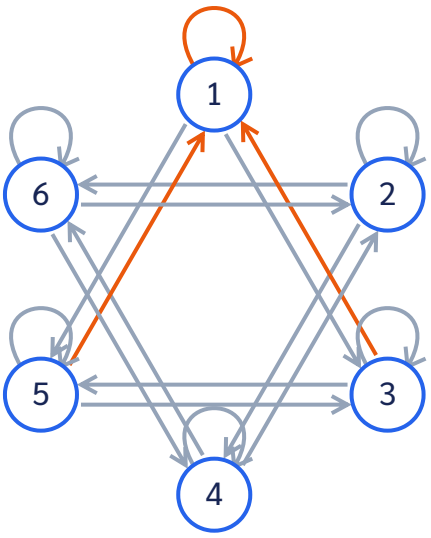
ผลต่างของจำนวนคี่สองตัวและจำนวนคู่สองตัวเป็นคู่ ส่วนคี่ลบคู่หรือคู่ลบคี่เป็นคี่ นี่เป็นเหตุผลที่ไม่มีลูกศรข้ามสองกลุ่ม

① ตรวจคอลัมน์ของ 1

ผล $x-1$ เมื่อ $x=1,2,3,4,5,6$ คือ $0,1,2,3,4,5$ ตามลำดับ ตัวที่หารสองลงตัวเกิดที่ $x=1,3,5$ จึง $[1]=\{1,3,5\}$

ล็อกปลายทาง 1: รับลูกศรจาก 1,3,5

① ลูกศรของคู่ลำดับ



② แถว x / คอลัมน์ y

	1	2	3	4	5	6
1	1	0	1	0	1	0
2	0	1	0	1	0	1
3	1	0	1	0	1	0
4	0	1	0	1	0	1
5	1	0	1	0	1	0
6	0	1	0	1	0	1

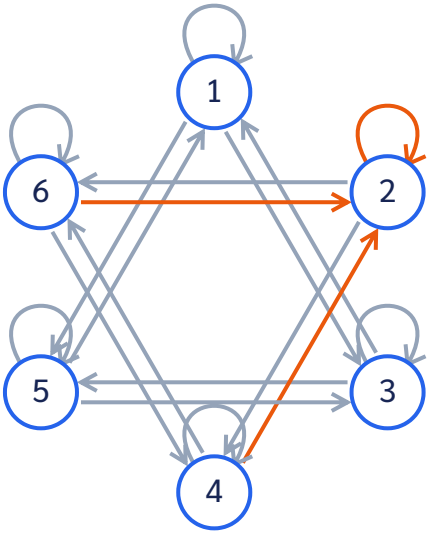
③ ช่อง 1 ตรงกับลูกศรหนึ่งคู่; สีส้มคือคู่ที่กำลังตรวจ

② ตรวจคอลัมน์ของ 2

ผล x−2 คือ −1,0,1,2,3,4 ตัวที่หารสองลงตัวเกิดที่ x=2,4,6 จึง [2]={2,4,6}

ล็อกปลายทาง 2: รับลูกศรจาก 2,4,6

① ลูกศรของคู่ลำดับ



② แถว x / คอลัมน์ y

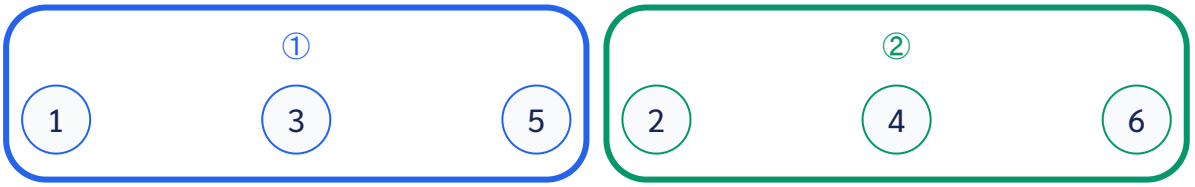
	1	2	3	4	5	6
1	1	0	1	0	1	0
2	0	1	0	1	0	1
3	1	0	1	0	1	0
4	0	1	0	1	0	1
5	1	0	1	0	1	0
6	0	1	0	1	0	1

③ ช่อง 1 ตรงกับลูกศรหนึ่งคู่; สีส้มคือคู่ที่กำลังตรวจ

③ รวมชื่อชั้น

[1]=[3]=[5]={1,3,5} และ [2]=[4]=[6]={2,4,6} จึง S={{1,3,5},{2,4,6}}

① ชั้นคี่ ② ชั้นคู่ ③ รวมครบ X และไม่ทับ

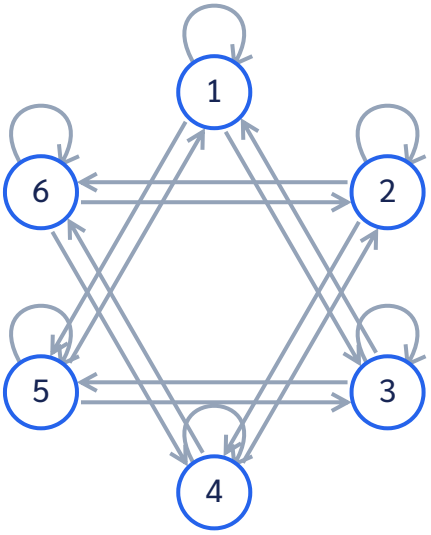


④ เช็กกลับจำนวนคู่

แต่ละชั้นมี 3 ตัวจึงสร้าง 3×3=9 คู่ สองชั้นรวม 9+9=18 คู่ ตรงกับช่อง 1 ในเมทริกซ์ของ R

ตรวจ 18 ช่องที่เป็น 1 ตรงกับคู่ภายในสองกลุ่ม

① ลูกศรของคู่ลำดับ



② แถว x / คอลัมน์ y

	1	2	3	4	5	6
1	1	0	1	0	1	0
2	0	1	0	1	0	1
3	1	0	1	0	1	0
4	0	1	0	1	0	1
5	1	0	1	0	1	0
6	0	1	0	1	0	1

③ ช่อง 1 ตรงกับลูกศรหนึ่งคู่; สีส้มคือคู่ที่กำลังตรวจ

ทำผิดแล้วพังตรงไหน

อย่าเอาชั้น {2,6} จากตัวอย่างพาร์ทิชันก่อนมาใช้ เพราะตอนนี้นิยามเปลี่ยนเป็นผลต่างหารสองลงตัว สมาชิก 4 จึงต้องอยู่ชั้นคู่ด้วย

ลงมือทำตามนี้

1. ใช้ R ของโจทย์ปัจจุบัน
2. ล็อกตัวแทนแล้วตรวจสมาชิกทุกตัว
3. ลบชั้นที่ซ้ำและตรวจรวมครบ
4. สร้างคู่จากกลุ่มกลับไปเทียบ R แล้วหยุด

5.9 ผลบวก x+3y หารสี่ลงตัว: ตัวอย่าง 3.17

แม้หน้าตา x+3y จะเหมือนให้บทบาท x กับ y ไม่เท่ากัน แต่ 3y ต่างจาก −y อยู่ 4y พอดี ซึ่งเป็นจำนวนที่หารสี่ลงตัวอยู่แล้ว

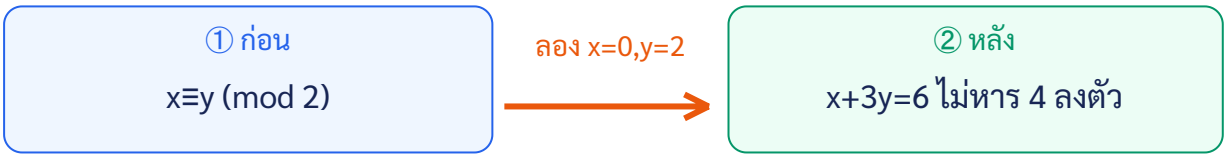
ลองก่อนดูเฉลย

สำหรับ x=1,y=5 ได้ x+3y=16 ถ้าสลับ x,y จะได้เท่าไร และยังหารสี่ลงตัวไหม

เฉลย ได้ 5+3(1)=8 ยังหารสี่ลงตัว แม้จำนวนที่คำนวณได้ไม่เท่ากัน

ให้ X={1,2,3,4,5,6} และ xRy เมื่อ 4 หาร x+3y ลงตัว ความสัมพันธ์นี้เท่ากับ **ผลต่าง x−y หารสี่ลงตัว** เพราะ x+3y=(x−y)+4y

เราต้องพิสูจน์การแปลงทั้งสองทิศก่อนใช้: ถ้า x+3y=4k แล้ว x−y=4(k−y); ถ้า x−y=4m แล้ว x+3y=4(m+y) ทุกวงเล็บเป็นจำนวนเต็ม จึงใช้เงื่อนไขผลต่างแทนได้



③ อยู่ชั้น mod 2 เดียวกัน แต่ไม่อยู่ชั้น mod 4 เดียวกัน

① แปลงเงื่อนไขให้เห็นสองทิศ

สิ่งที่ให้มาคือ 4∣(x+3y) สิ่งที่ยังต้องพิสูจน์คือสมบัติสามข้อ เริ่มแปลงโดยลบ 4y หรือบวก 4y จึงได้เงื่อนไขที่เท่ากัน



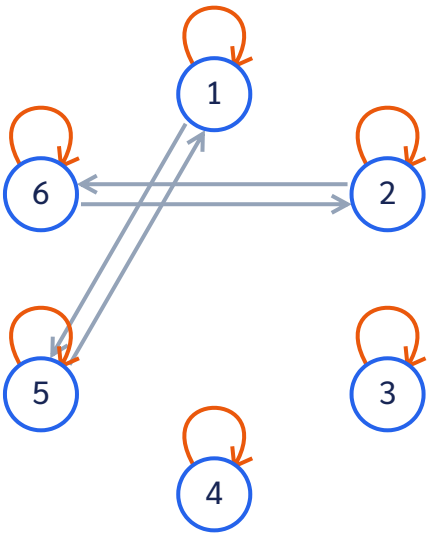
③ ย้อนกลับโดยบวก 4y ได้

② สะท้อน

เลือก $x \in X$ ใด ๆ จะได้ $x+3x=4x$ ซึ่งหารสี่ลงตัว จึง xRx ทุก x

ก่อน x → คำนวณ 4x → หลังวงวนมีครบ

① ลูกศรของคู่ลำดับ



② แถว x / คอลัมน์ y

	1	2	3	4	5	6
1	1	0	0	0	1	0
2	0	1	0	0	0	1
3	0	0	1	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0
5	1	0	0	0	1	0
6	0	1	0	0	0	1

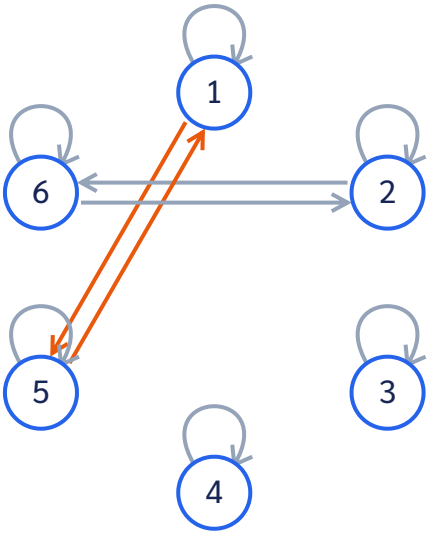
③ ช่อง 1 ตรงกับลูกศรหนึ่งคู่; สีส้มคือคู่ที่กำลังตรวจ

③ สมมาตร

สมมติ xRy จึง $x-y=4m$ ทำให้ $y-x=4(-m)$ หารสี่ลงตัว เมื่อแปลงกลับจึง $y+3x$ หารสี่ลงตัว และ yRx

ก่อน 1→5:16 → หลัง 5→1:8

① ลูกศรของคู่ลำดับ



② แถว x / คอลัมน์ y

	1	2	3	4	5	6
1	1	0	0	0	1	0
2	0	1	0	0	0	1
3	0	0	1	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0
5	1	0	0	0	1	0
6	0	1	0	0	0	1

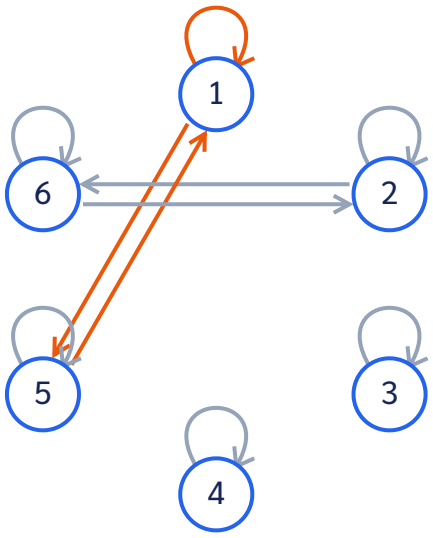
③ ช่อง 1 ตรงกับลูกศรหนึ่งคู่; สีส้มคือคู่ที่กำลังตรวจ

④ ถ่ายทอด

สมมติ xRy,yRz จึง x−y=4m,y−z=4n แล้ว x−z=4(m+n) หารสี่ลงตัว แปลงกลับได้ x+3z หารสี่ลงตัว จึง xRz

ก่อน 1→5 และ 5→1 → หลังต้องมี 1→1

① ลูกศรของคู่ลำดับ



② แถว x / คอลัมน์ y

	1	2	3	4	5	6
1	1	0	0	0	1	0
2	0	1	0	0	0	1
3	0	0	1	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0
5	1	0	0	0	1	0
6	0	1	0	0	0	1

③ ช่อง 1 ตรงกับลูกศรหนึ่งคู่; สีส้มคือคู่ที่กำลังตรวจ

⑤ เช็กกลับ

1+3(5)=16=4×4; 5+3(1)=8=4×2; 1+3(1)=4=4×1 ตรงกับลูกศรที่ใช้เป็นภาพประกอบ เหตุผลทั่วไปข้างต้นยืนยันครบทุกคู่และทุกสามตัว จึง R เป็นสมมูล



③ ตัวอย่างตรงกับข้อพิสูจน์ทั่วไป

ทำผิดแล้วพังตรงไหน

ห้ามบอกว่าสมมาตรเพราะ x+3y=y+3x ซึ่งไม่จริง เช่น 16≠8 สิ่งที่เหมือนคือการหารสี่ลงตัว ไม่ใช่ค่าของนิพจน์



③ คู่จริงต้องผ่านกติกาเดิม

ลงมือทำตามนี้

1. แปลง x+3y เป็น (x−y)+4y
2. ยืนยันการแปลงกลับทั้งสองทิศ
3. พิสูจน์สะท้อน สมมาตร ถ่ายทอดทีละข้อ
4. แทนคู่จริงกลับในนิยามเดิมก่อนหยุด

5.10 อ่านคู่ทั้งหมดของตัวอย่าง 3.17

จำนวน 1 กับ 5 ต่างกัน 4 ส่วน 2 กับ 6 ต่างกัน 4 จึงเข้ากลุ่มเดียวกันเป็นคู่ ๆ แต่ใน X ไม่มีเลขอื่นที่ต่างจาก 3 หรือ 4 เป็นพหุคูณของสี่

ลองก่อนดูเฉลย

3 ต้องจับคู่กับตัวเองหรือถูกทิ้งเพราะไม่มีสมาชิกอื่นอยู่กลุ่มเดียวกัน

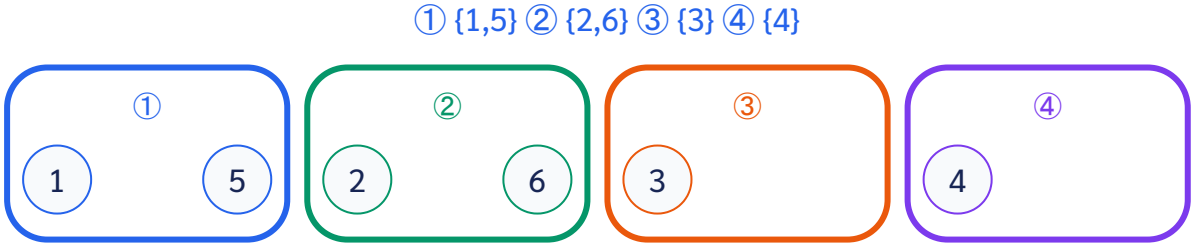
เฉลย ต้องจับคู่กับตัวเอง เพราะ 3+3(3)=12 หารสี่ลงตัว และชั้นที่มีสมาชิกเดียวก็เป็นชั้นสมมูลได้

จากการตรวจสมมูลแล้ว เราหาชั้นได้เป็น [1]=[5]={1,5}, [2]=[6]={2,6}, [3]={3}, [4]={4} คู่ลำดับทั้งหมดคือผลคูณของแต่ละชั้นกับตัวเอง

กลุ่มที่มีสองสมาชิกสร้างสี่คู่ เพราะต้องรวมทั้งสองทิศและสองวงวน กลุ่มสมาชิกเดียวสร้างหนึ่งวงวน จึงไม่ใช่การจับคู่แบบเลือกเส้นเดียวระหว่างสองจุด

① แจกสมาชิกลงชั้น

ชั้นที่ต่างกันมี {1,5},{2,6},{3},{4} รวมครบ X โดยไม่ทับกัน

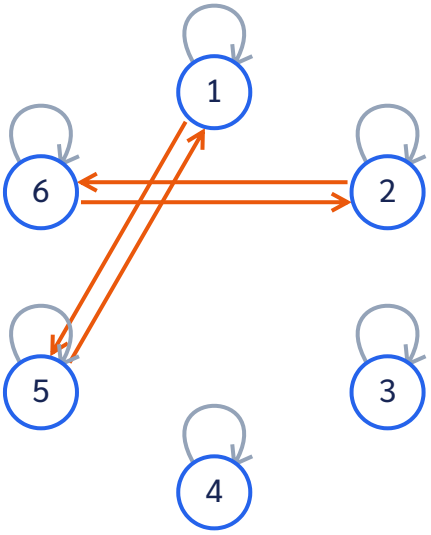


② เขียนคู่จากทุกชั้น

R={(1,1),(1,5),(2,2),(2,6),(3,3),(4,4),(5,1),(5,5),(6,2),(6,6)} ตรงกับรายการในต้นฉบับ

ก่อนกลุ่มสี → หลังคู่ทั้งหมดของ R

① ลูกศรของคู่ลำดับ



② แถว x / คอลัมน์ y

	1	2	3	4	5	6
1	1	0	0	0	1	0
2	0	1	0	0	0	1
3	0	0	1	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0
5	1	0	0	0	1	0
6	0	1	0	0	0	1

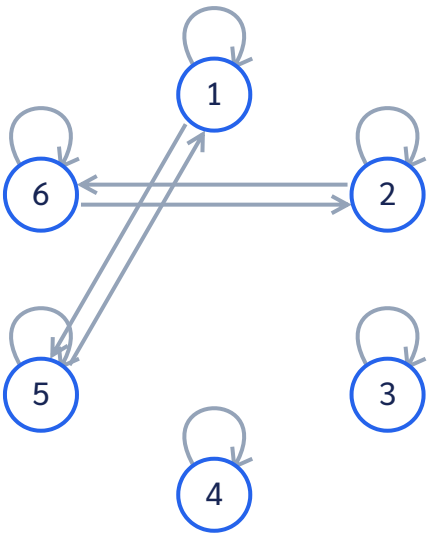
③ ช่อง 1 ตรงกับลูกศรหนึ่งคู่; สีส้มคือคู่ที่กำลังตรวจ

③ นับแล้วเช็กกลับ

จำนวนคู่คือ $2^2+2^2+1^2+1^2=4+4+1+1=10$ คู่ เมทริกซ์มี 1 จำนวน 10 ช่อง และตรวจ 36 คู่ใน X×X แล้วไม่มีคู่ที่ตกหล่น

เช็กกลับทั้ง 6×6 ช่อง: คู่ที่ผ่านมี 10 คู่

① ลูกศรของคู่ลำดับ



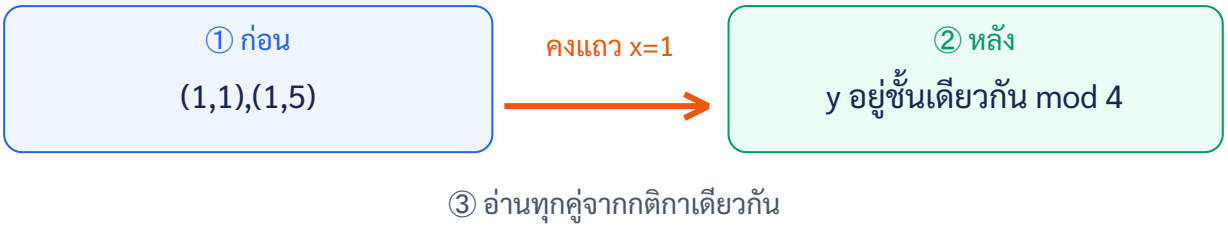
② แถว x / คอลัมน์ y

	1	2	3	4	5	6
1	1	0	0	0	1	0
2	0	1	0	0	0	1
3	0	0	1	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0
5	1	0	0	0	1	0
6	0	1	0	0	0	1

③ ช่อง 1 ตรงกับลูกศรหนึ่งคู่; สีส้มคือคู่ที่กำลังตรวจ

ทำผิดแล้วพังตรงไหน

อย่าเอาชั้น {1,3,5} ของการหารสองมาใช้กับการหารสี่ เพราะ $1-3=-2$ ไม่หารสี่ลงตัว จึงไม่มีคู่ (1,3) ในข้อนี้



ลงมือทำตามนี้

1. ใช้ตัวหารตามนิยามปัจจุบัน
2. หาชั้นโดยตรวจทุกสมาชิก
3. เขียนทุกคู่ภายในชั้นรวมวงวน
4. ตรวจคู่ที่ไม่อยู่ใน R ด้วย แล้วหยุดเมื่อครบ $X \times X$

5.11 เครื่องจับคู่ที่ไม่ขาดและไม่แตกทาง

คิดถึงเครื่องรับบัตร 1,2,3 แล้วส่งบัตรแต่ละใบไปช่อง a,b,c ถ้าบัตร 3 ไม่มีปลายทาง เครื่องยังทำงานกับอินพุตทุกตัวไม่ได้ ถ้าบัตร 1 มีปลายทางสองช่องก็ไม่รู้ว่าผลของ 1 คืออะไรแน่

ลองก่อนดูเฉลย

ถ้าบัตร 2 กับ 3 ไปช่อง c เดียวกัน แต่แต่ละใบมีลูกศรออกเพียงเส้นเดียว เครื่องแบบนี้ใช้ได้ไหม

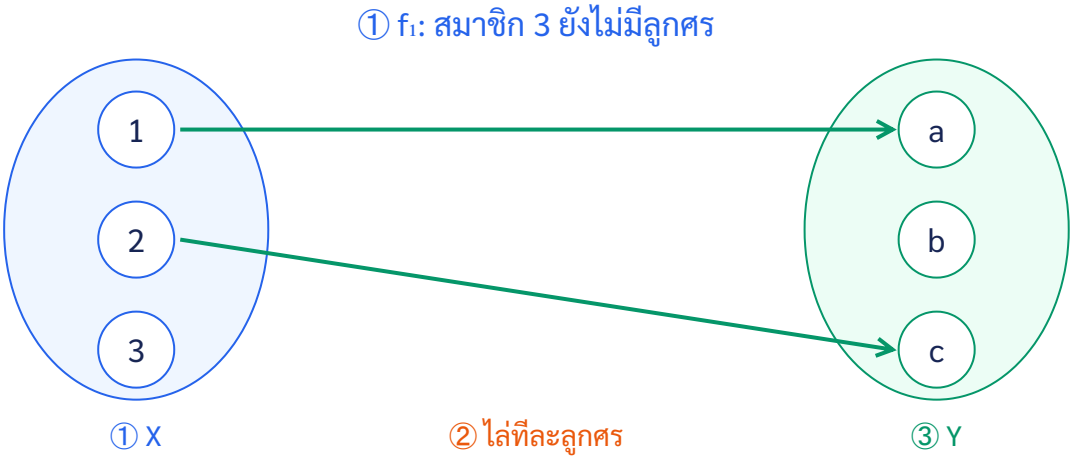
เฉลย ใช้ได้ เงื่อนไขพื้นฐานถามว่าแต่ละต้นทางมีผลหนึ่งค่า ไม่ได้ห้ามคนละต้นทางใช้ปลายทางเดียวกัน

ฟังก์ชัน (function) $f:X\to Y$ คือความสัมพันธ์ที่สมาชิกทุก $x\in X$ มี $y\in Y$ เพียงตัวเดียวที่จับคู่ด้วย เขียน $(x,y)\in f$ หรือ $f(x)=y$ เซต X คือโดเมน และ Y คือ **โคโดเมน (codomain)** หรือเซตปลายทางที่ประกาศไว้

เงื่อนไขมีสองส่วนที่ขาดไม่ได้: ต้องมีผลสำหรับทุก x และผลต้องไม่กำกวม คำว่า “เพียงหนึ่ง” รวมทั้งการมีอยู่กับการไม่ซ้ำสองผล

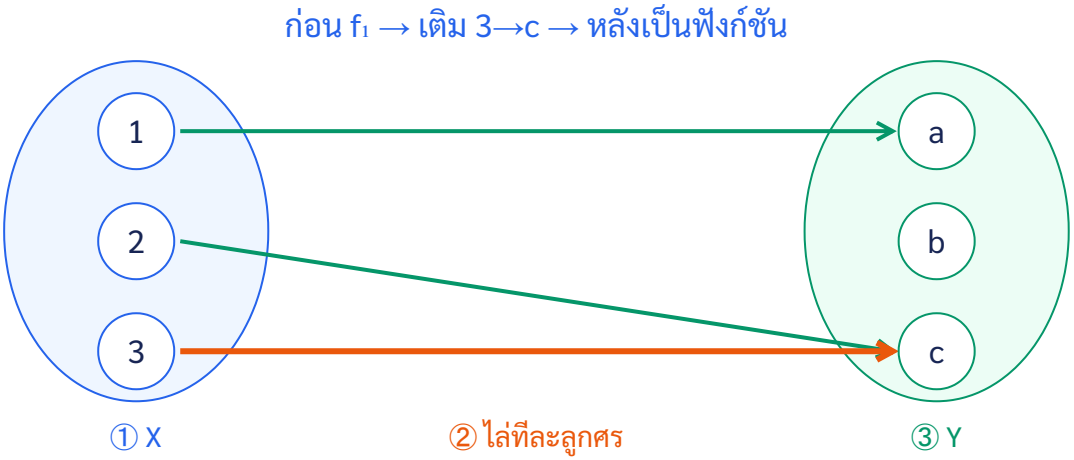
① ดูกรณีขาดต้นทาง

ถ้าให้ $f=\{(1,a),(2,c)\}$ บน $X=\{1,2,3\}$ จะขาดผลของ 3 จึงไม่เป็นฟังก์ชันจาก X ไป Y



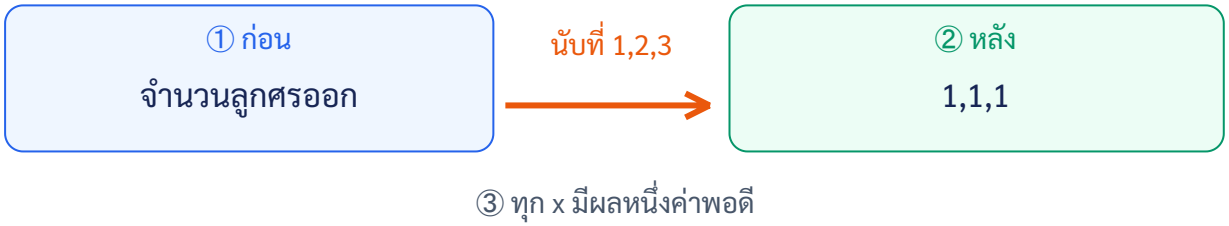
② เติมผลให้สมาชิกที่ขาด

เติม (3,c) ได้ f={(1,a),(2,c),(3,c)} ตอนนี้ทุกต้นทางมีผลหนึ่งค่า แม้ c รับสองลูกศรก็ยังเป็นฟังก์ชัน



③ เช็กกลับความหมาย

f(1)=a, f(2)=c, f(3)=c มีครบสามค่า ส่วน b ไม่มีลูกศรเข้าก็ไม่ทำให้ผิดนิยามฟังก์ชัน



ทำผิดแล้วพังตรงไหน

อย่านับลูกศรเข้าของ Y เพื่อวินิจฉัยการเป็นฟังก์ชัน เพราะนิยามนี้ควบคุมลูกศรออกจาก X ส่วนการนับปลายทางจะใช้กับคุณสมบัติอื่นในหัวข้อถัดไป

ลงมือทำตามนี้

1. ประกาศ X และ Y
2. ตรวจทุก x ว่ามีผลอยู่ใน Y
3. ตรวจแต่ละ x ว่าไม่มีสองผลต่างกัน
4. ผ่านทั้งมีครบและไม่แตกทางจึงหยุดตอบว่าเป็นฟังก์ชัน

5.12 ตรวจทั้งสี่ภาพในตัวอย่าง 3.18

ภาพต้นฉบับมีโดเมน X={1,2,3} และโคโดเมน Y={a,b,c} เหมือนกันทั้งสี่รูป เราจึงเปรียบเทียบเฉพาะลูกศรที่เปลี่ยน โดยรักษาสิทธิ์ของสมาชิกทุกตัวไว้

ลองก่อนดูเฉลย

ถ้าเห็นสามลูกศรในภาพ เพียงพอจะบอกว่าทั้งสามต้นทางมีผลหนึ่งค่าไหม

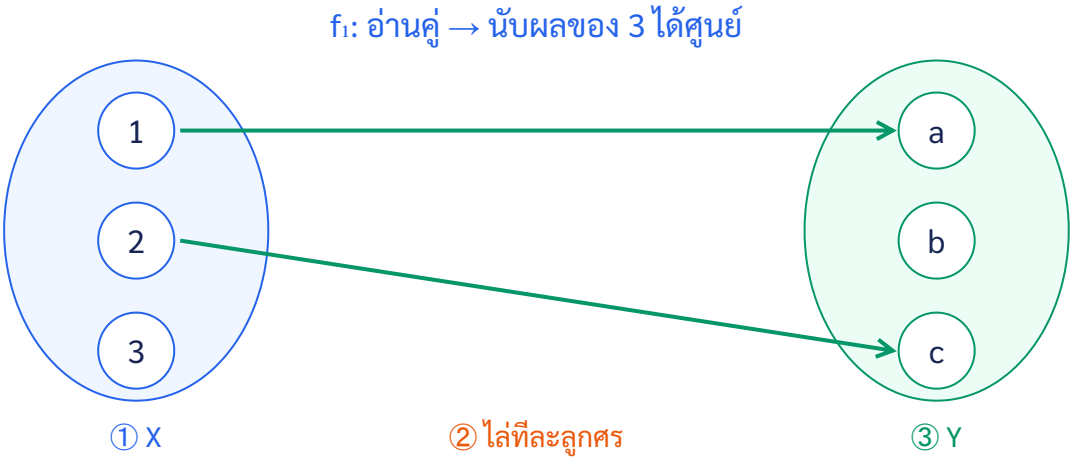
เฉลย ไม่พอ ต้องดูว่าลูกศรออกจากตัวไหน การนับยอดรวมอาจซ่อนตัวหนึ่งที่ไม่มีผลกับอีกตัวที่แตกสองผล

การตรวจฟังก์ชันจากแผนภาพใช้ **จำนวนปลายทางที่ต่างกันของแต่ละต้นทาง** ไม่ใช่จำนวนลูกศรรวม เราจะอ่านแต่ละภาพเป็นเซตคู่ลำดับก่อนตรวจ

ข้อความ “โดเมนของ f ต้องเท่ากับ X” ทำให้เปลี่ยน X เองเพื่อช่วยภาพที่ขาดสมาชิกไม่ได้ ส่วนความเป็นเอกเทศของผลทำให้ลบลูกศรส่วนเกินเองเพื่อช่วยภาพแตกทางไม่ได้

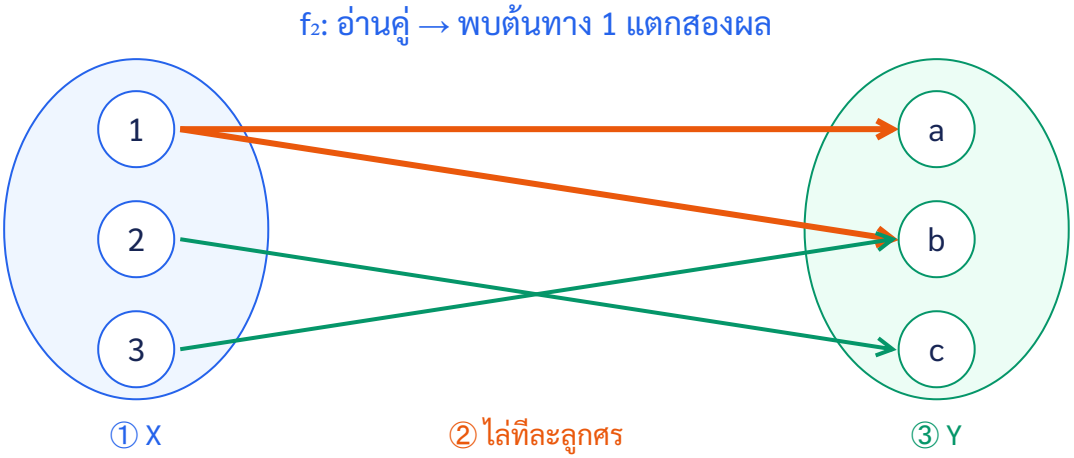
ภาพ f_1 · ① อ่านแล้วตรวจ

f_1={(1,a),(2,c)} จำนวนผลของ 1,2,3 คือ 1,1,0 ตามลำดับ จึงไม่เป็นฟังก์ชันเพราะขาดสมาชิก 3



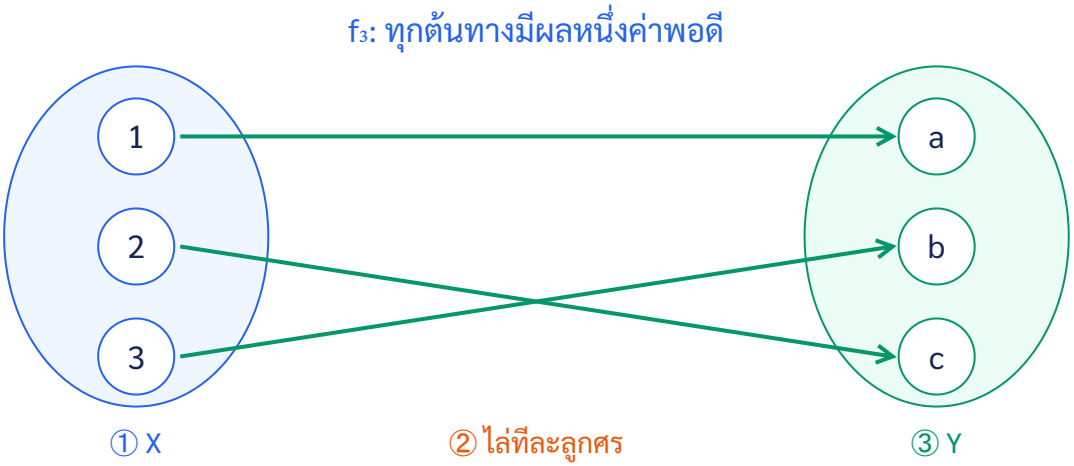
ภาพ f_2 · ② อ่านแล้วตรวจ

f_2={(1,a),(1,b),(2,c),(3,b)} จำนวนผลคือ 2,1,1 จึงไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะ 1 มีทั้ง a และ b



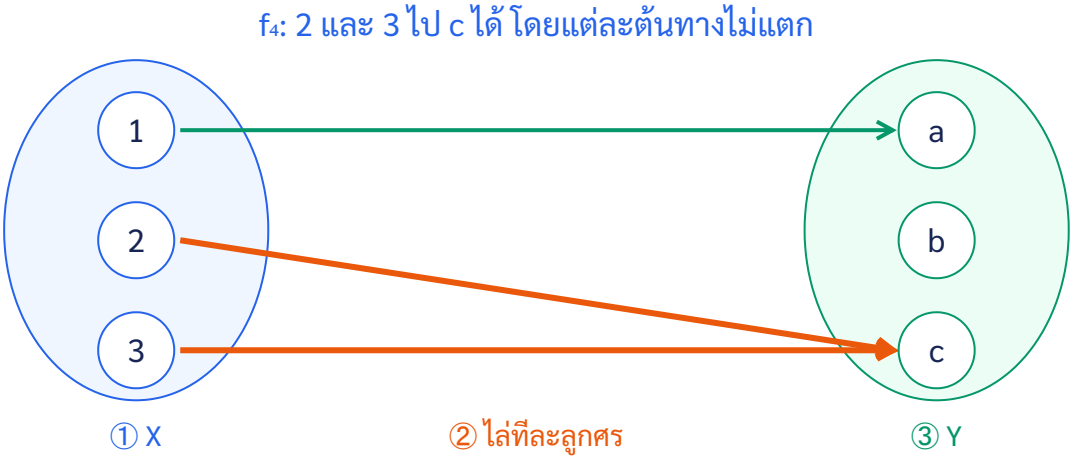
ภาพ f_3 · ③ อ่านแล้วตรวจ

f_3={(1,a),(2,c),(3,b)} จำนวนผลคือ 1,1,1 จึงเป็นฟังก์ชัน



ภาพ f_4 · ④ อ่านแล้วตรวจ

f_4={(1,a),(2,c),(3,c)} จำนวนผลคือ 1,1,1 จึงเป็นฟังก์ชันเช่นกัน การชนที่ c ไม่ใช่การแตกทางของต้นทาง



⑤ เช็กกลับคำตอบ

สรุป f_1 ไม่ใช่, f_2 ไม่ใช่, f_3 ใช่, f_4 ใช่ ตรวจทั้งสี่รูปด้วยเกณฑ์ต้นทางเดียวกัน จึงไม่เปลี่ยนนิยามกลางคัน



③ กรณีชนปลายทางยังเป็นฟังก์ชันได้

ทำผิดแล้วพังตรงไหน

ถ้าตอบ f_4 ไม่ใช่เพราะ 2 กับ 3 ไป c จะเอาเงื่อนไขหนึ่งต่อหนึ่งที่ยังไม่ได้กำหนดมาปนกับนิยามฟังก์ชันพื้นฐาน

ลงมือทำตามนี้

1. อ่านคู่จากภาพโดยไม่เพิ่มหรือลบลูกศร
2. นับผลของ 1 แล้ว 2 แล้ว 3
3. ชี้ต้นทางที่ขาดหรือแตกเมื่อไม่ผ่าน
4. ตอบแต่ละภาพแยกกันและเช็กกลับครบโดเมนก่อนหยุด

5.13 คนละต้นทางห้ามชนปลายทาง: ตัวอย่าง 3.19

เครื่องแรกส่ง 1→a,2→b,3→c ส่วนเครื่องที่สองเปลี่ยน 2 ไป a ทำให้ 1 กับ 2 ชนที่ปลายทางเดียวกัน ทั้งสองยังเป็นฟังก์ชัน แต่การกู้ต้นทางจาก a ในเครื่องที่สองกำกวม

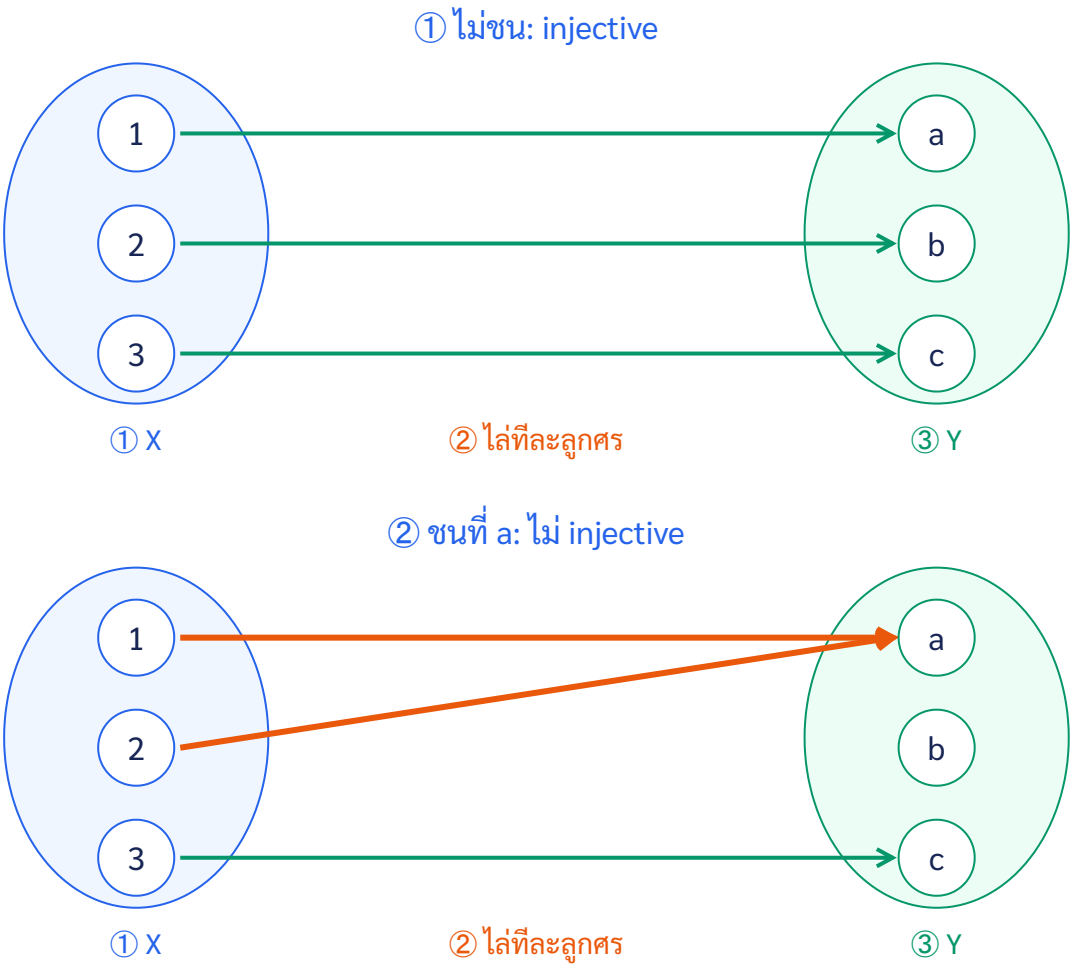
ลองก่อนดูเฉลย

ถ้าบอกเพียงว่าผลลัพธ์ของเครื่องที่สองคือ a เรารู้แน่ไหมว่าป้อน 1 หรือ 2

เฉลย ไม่รู้ เพราะทั้ง 1 และ 2 ให้ a เหมือนกัน

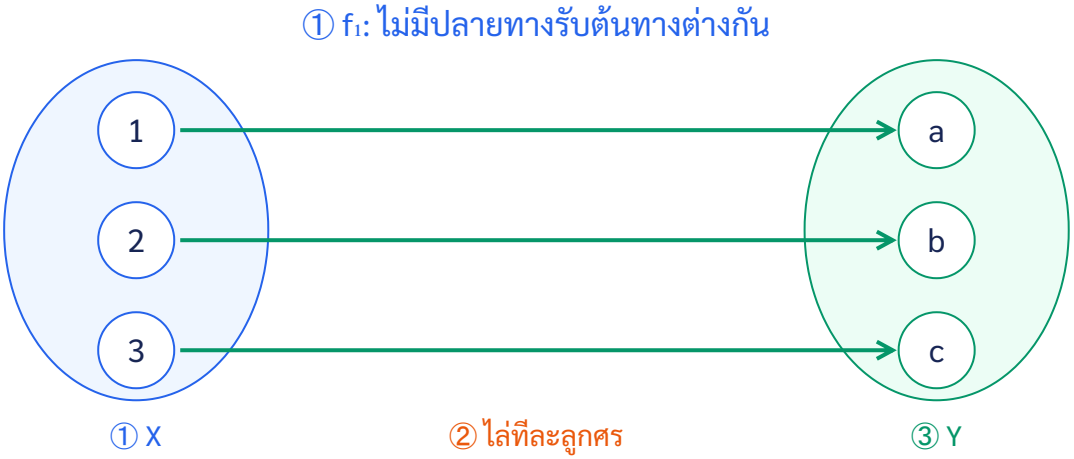
ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง (one-to-one / injective) คือฟังก์ชันที่ปลายทางแต่ละตัวรับจากต้นทางได้อย่างมากหนึ่งตัว เขียนเป็นเงื่อนไขว่า ถ้า $f(x_1)=f(x_2)$ แล้ว $x_1=x_2$

ข้อสังเกตสำคัญคือ “อย่างมากหนึ่ง” ยอมให้บางปลายทางไม่มีคนมาเลย สิ่งที่ห้ามคือปลายทางเดียวรับต้นทางต่างกันสองตัวขึ้นไป



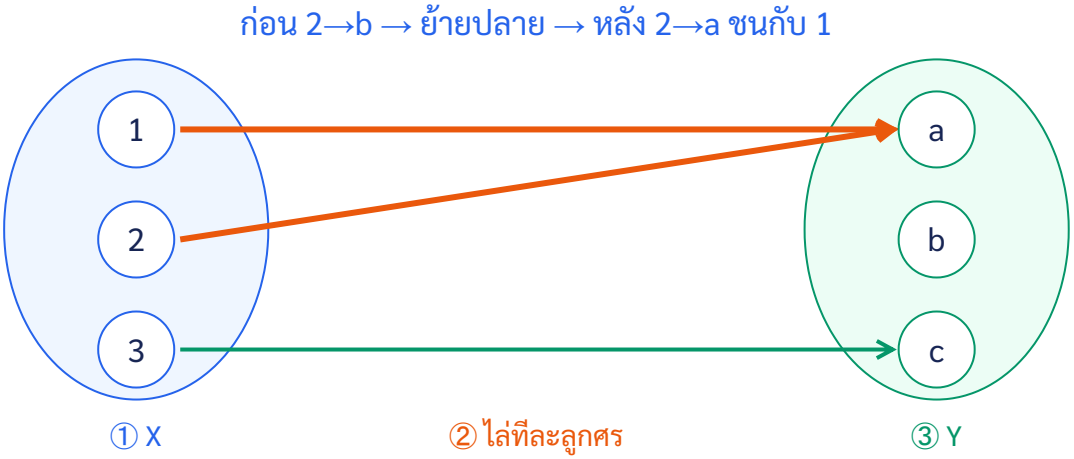
① ตรวจ f_1

$f_1=\{(1,a),(2,b),(3,c)\}$ แต่ละ a,b,c รับหนึ่งต้นทาง จึงเป็นหนึ่งต่อหนึ่ง



② เปลี่ยนลูกศรเดียว

$f_2=\{(1,a),(2,a),(3,c)\}$ เปลี่ยน 2→b เป็น 2→a จึง a รับจาก 1 และ 2 ซึ่งเป็นคนละตัว



③ เขียนหลักฐานที่ทำให้นิยามพัง

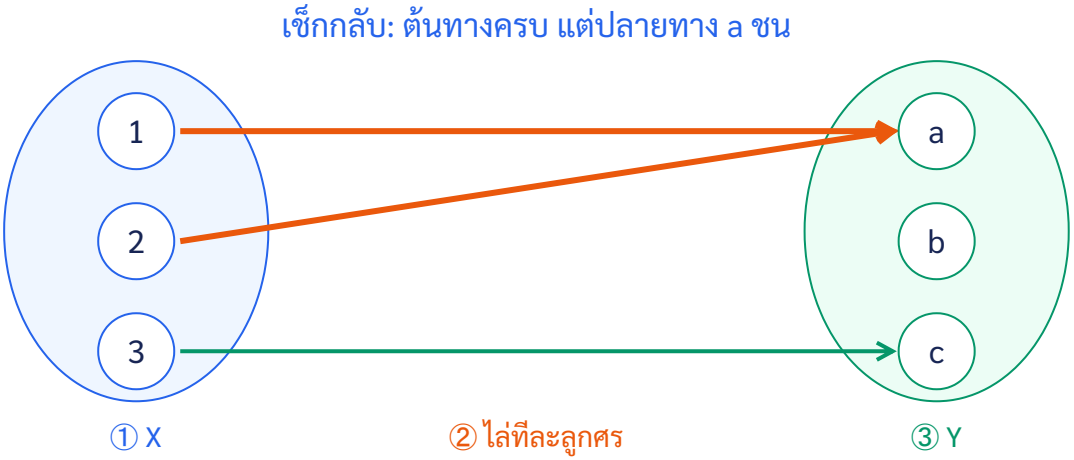
$f_2(1)=f_2(2)=a$ แต่ $1\neq 2$ จึงข้อความ “ผลเท่ากันแล้วต้นทางเท่ากัน” เป็นเท็จ และ f_2 ไม่เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง



③ พบคู่ชนที่หักล้าง injective

④ เช็กกลับไม่ปนกับนิยามฟังก์ชัน

f_2 ยังมีผลหนึ่งค่าต่อทุกต้นทาง จึงเป็นฟังก์ชัน แต่มีสองต้นทางมาชนปลายทางจึงไม่เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง



ทำผิดแล้วพังตรงไหน

สมมติว่า $x_1 \neq x_2$ แล้วสรุปว่า $f(x_1) \neq f(x_2)$ โดยไม่มีเหตุผล เป็นการอ้างนิยามที่ยังไม่ได้พิสูจน์ ต้องใช้สูตรหรือคู่ที่โจทย์ให้จริง ๆ เพื่อยืนยัน

ลงมือทำตามนี้

1. ตรวจว่าเป็นฟังก์ชันก่อน
2. ดูทุกปลายทางว่ารับจากต้นทางต่างกันกี่ตัว
3. พบคู่ชนให้ระบุ $x_1 \neq x_2$ และผลที่เท่ากัน
4. ถ้าไม่ชนครบทุกคู่จึงหยุดตอบว่าเป็นหนึ่งต่อหนึ่ง

5.14 ทุกปลายทางต้องมีคนมาถึง: ตัวอย่าง 3.20

มีต้นทาง 1,2,3 กับช่องปลายทาง a,b ถ้าส่ง 1,2 ไป a แล้วส่ง 3 ไป b ทั้งสองช่องมีคนมาถึง แต่ถ้าส่งทุกตัวไป a ช่อง b จะว่าง

ลองก่อนดูเฉลย

ช่อง a รับหลายต้นทางทำให้เงื่อนไข “ทุกปลายทางมีคนมาถึง” พังหรือไม่

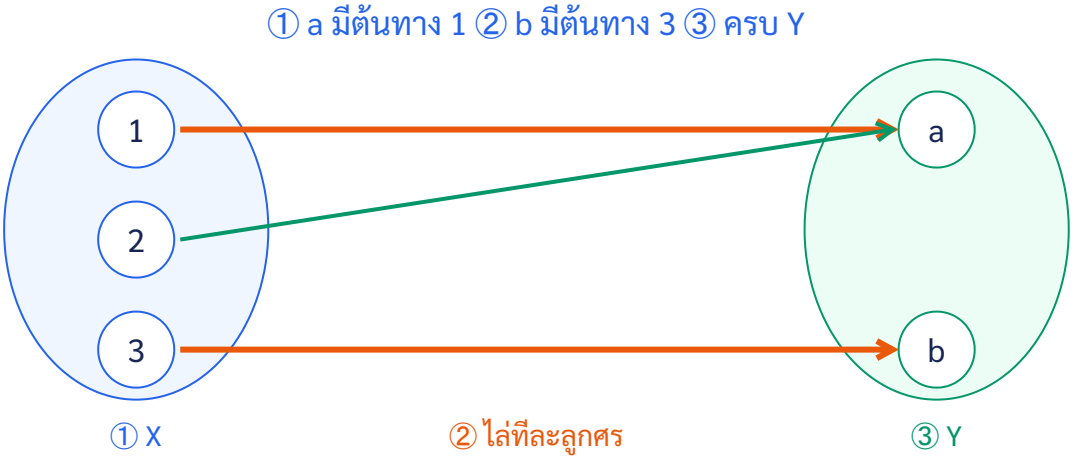
เฉลย ไม่พัง การชนปลายทางไม่ใช่ปัญหาของเงื่อนไขนี้ ปัญหาคือมีปลายทางที่ไม่มีต้นทางมาเลย

ฟังก์ชันทั่วถึง (onto / surjective) $f:X\to Y$ หมายถึงทุก $y\in Y$ มี $x\in X$ อย่างน้อยหนึ่งตัวที่ $f(x)=y$ ผลลัพธ์ที่เกิดจริงทั้งหมดเรียกว่า **เรนจ์หรือเซตภาพ (range/image)** $f(X)$ ฟังก์ชันทั่วถึงเมื่อ $f(X)=Y$

เราต้องเทียบกับ Y ที่โจทย์ประกาศไว้ ไม่ใช่เปลี่ยน Y ให้เท่ากับผลที่เกิดเอง เพราะการทำเช่นนั้นทำให้ปลายทางที่ขาดถูกซ่อนออกจากโจทย์

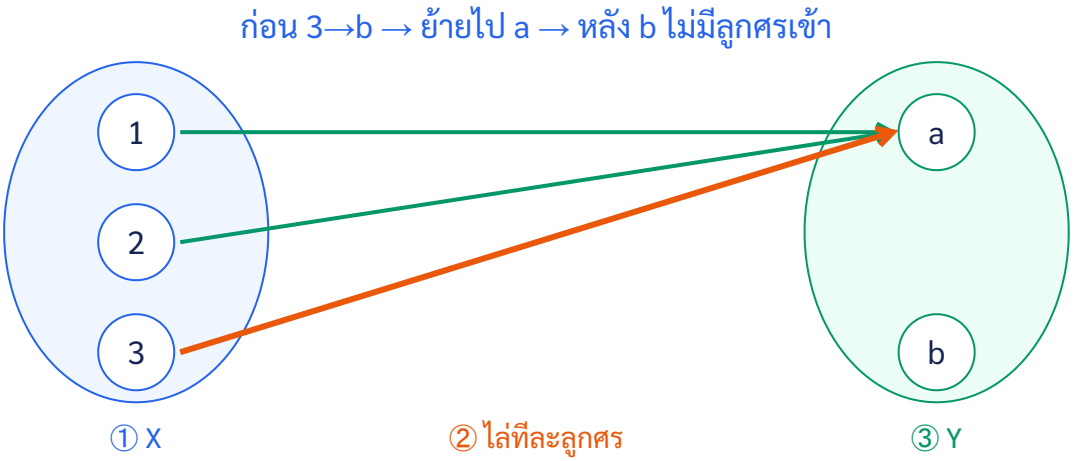
① สร้างตัวอย่างที่ทั่วถึง

เลือก $f_1=\{(1,a),(2,a),(3,b)\}$ บน $X=\{1,2,3\}, Y=\{a,b\}$ สมาชิก a มีพยาน x=1 และ b มีพยาน x=3 จึงทั่วถึง



② เปลี่ยนให้ไม่ทั่วถึง

ย้าย 3→b เป็น 3→a ได้ $f_2=\{(1,a),(2,a),(3,a)\}$ ตอนนี้ไม่มีต้นทางใดให้ b จึงไม่ทั่วถึง



③ เช็กกลับด้วยเซตภาพ

$f_1(X)=\{a,b\}=Y$ แต่ $f_2(X)=\{a\}\neq Y$ จึงคำตอบสองรูปตรงกับการตรวจลูกศร



ทำผิดแล้วพังตรงไหน

ถ้าพบพยานให้ a แล้วหยุดตอบทั่วถึง จะลืมว่า ∀y ต้องตรวจ b ด้วย และถ้าเปลี่ยนโคโดเมนจาก {a,b} เป็น {a} เอง จะเปลี่ยนโจทย์

ลงมือทำตามนี้

1. ล็อกโคโดเมน Y
2. หาต้นทางหนึ่งตัวให้แต่ละ y
3. ถ้ามี y ที่ไม่มีใครมา ให้ชี้ y นั้นแล้วหยุดว่าไม่ทั่วถึง
4. ถ้าทุก y มีพยานจึงหยุดว่าทั่วถึง

5.15 จับคู่พอดีทั้งสองฝั่ง: ตัวอย่าง 3.21

ส่ง 1→a,2→b,3→c จะไม่มีการชนและไม่มีช่องว่าง หากเปลี่ยน 2→a จะชนที่ a พร้อมกับทิ้ง b ว่าง

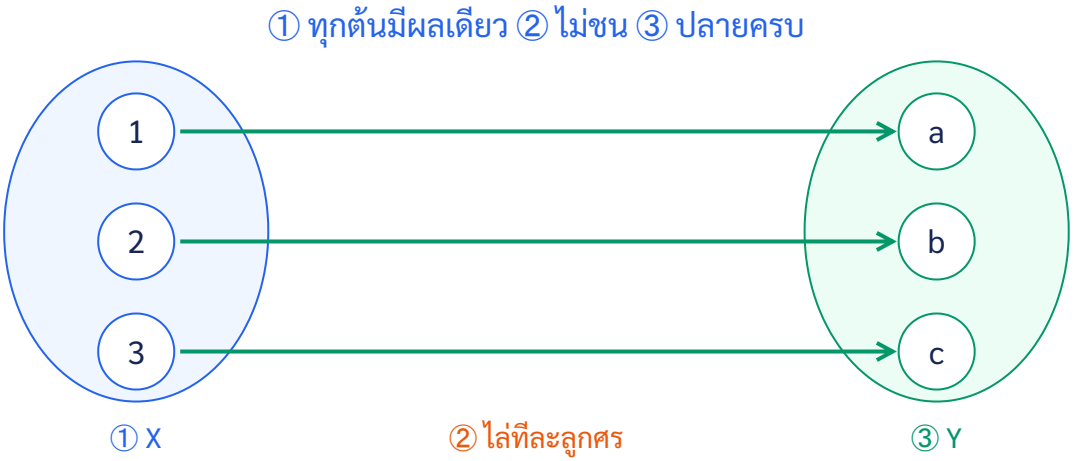
ลองก่อนดูเฉลย

ถ้าทุกต้นทางมีผลหนึ่งค่า แต่มีปลายทางที่ว่าง เราเรียกว่าจับคู่พอดีทั้งสองฝั่งได้ไหม

เฉลย ไม่ได้ ต้องตรวจปลายทางด้วยว่ารับหนึ่งต้นทางพอดีทุกตัว

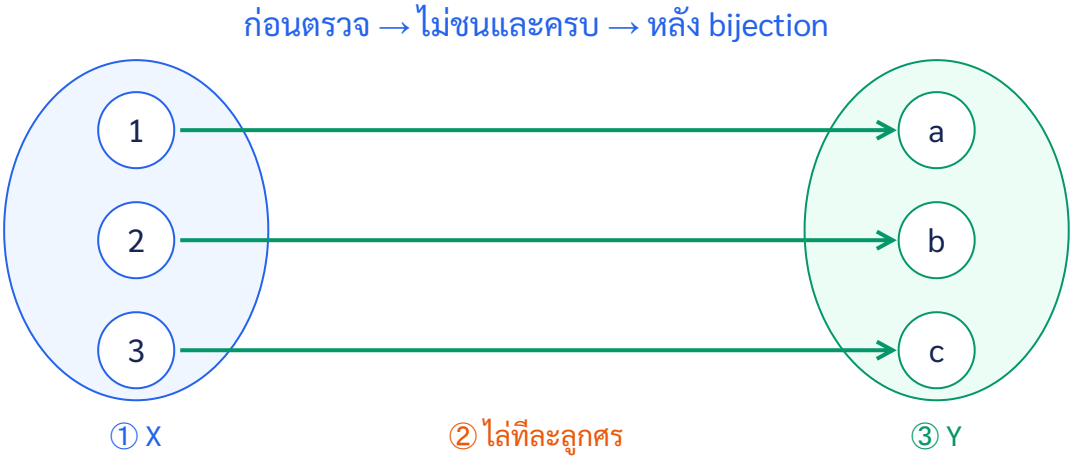
ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง (bijection) คือฟังก์ชันที่เป็นทั้ง injective และ surjective นั่นคือปลายทางทุกตัวรับต้นทางหนึ่งตัวพอดี

หนึ่งต่อหนึ่งให้ “อย่างมากหนึ่ง” ส่วนทั่วถึงให้ “อย่างน้อยหนึ่ง” เมื่อรวมกันจึงได้ “หนึ่งพอดี” การผ่านคุณสมบัติเดียวไม่พอ



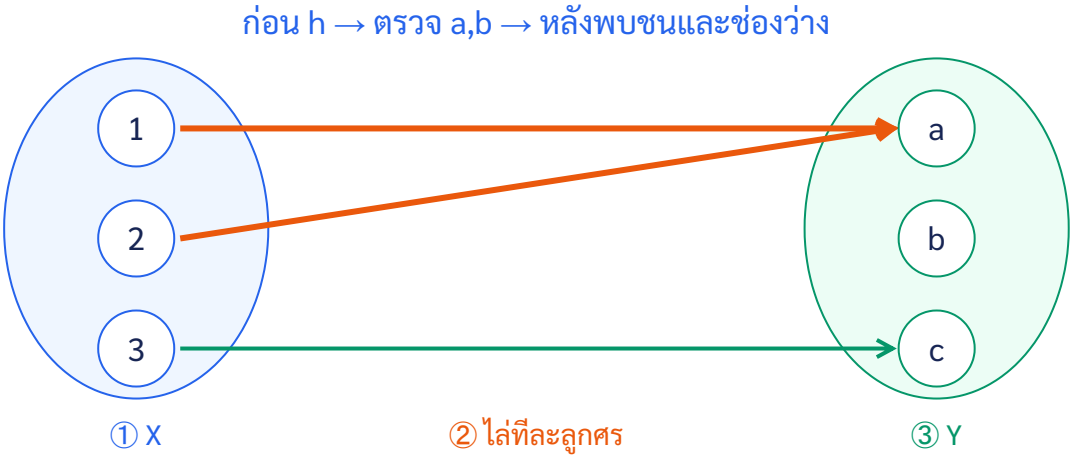
① ตัวอย่างที่เป็น bijection

X={1,2,3},Y={a,b,c}, f={(1,a),(2,b),(3,c)} ทุกต้นทางมีผลหนึ่งค่า ปลายทางไม่ชน และ a,b,c ถูกใช้ครบ



② ตัวอย่างที่ไม่เป็น

h={(1,a),(2,a),(3,c)} มีคู่ชน 1,2 ที่ a และไม่มีต้นทางให้ b จึงไม่เป็น bijection ทั้งที่ยังเป็นฟังก์ชัน



③ เช็กกลับเงื่อนไขสองฝั่ง

f มีจำนวนลูกศรเข้าที่ a,b,c เท่ากับ 1,1,1; h มี 2,0,1 จึงตัวเลขยืนยันภาพ



③ หนึ่งพอดีทุกปลายทางคือ bijection

ทำผิดแล้วพังตรงไหน

เพียง |X|=|Y| ไม่ได้บังคับว่าเป็น bijection ตัวอย่าง h มีสมาชิกสองฝั่งเท่ากัน แต่จับคู่ไม่ดีจึงไม่ผ่าน ต้องตรวจลูกศรจริง



③ ผ่าน injective และ onto พร้อมกัน

ลงมือทำตามนี้

1. ตรวจฟังก์ชันพื้นฐาน
2. ตรวจไม่ชนเพื่อ injective
3. ตรวจไม่มีปลายทางว่างเพื่อ surjective
4. ผ่านทั้งสองคุณสมบัติจึงหยุดตอบ bijection

5.16 เทียบหนึ่งต่อหนึ่ง ทั่วถึง และทั้งสองแบบ

ลองให้ต้นทางมีสองตัวและปลายทางมีสามตัว เราส่งแต่ละต้นทางไปคนละช่องได้โดยไม่ชน แต่ยังเหลือช่องว่าง หากสลับให้ต้นทางสามตัวปลายทางสองตัว เราใช้ปลายทางครบได้แต่ต้องมีการชน

ลองก่อนดูเฉลย

คำว่าไม่ชนกับคำว่าใช้ปลายทางครบ เป็นเรื่องเดียวกันหรือไม่

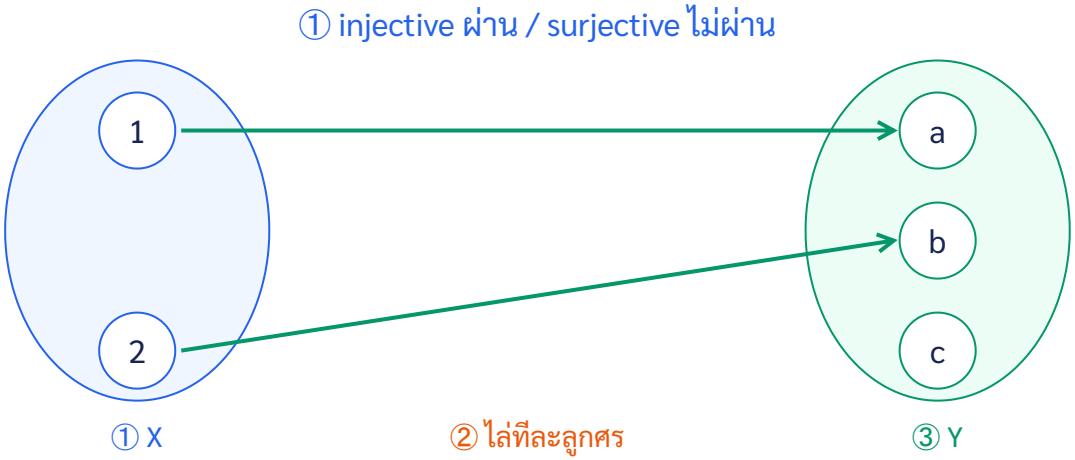
เฉลย ไม่ใช่ ภาพแรกไม่ชนแต่ไม่ครบ ภาพที่สองครบแต่ชน จึงต้องตรวจแยกกัน

เราจะใช้สามคำที่นิยามแล้วกับกรณีที่แยกความต่างชัด: **injective อย่างเดียว**, **surjective อย่างเดียว** และ **bijection**

ความสับสนมักเกิดเมื่อเห็นแต่ตัวอย่างโดเมนและโคโดเมนมีขนาดเท่ากัน การเปลี่ยนขนาดฝั่งหนึ่งทำให้เห็นชัดว่านิยามขอคนละอย่าง

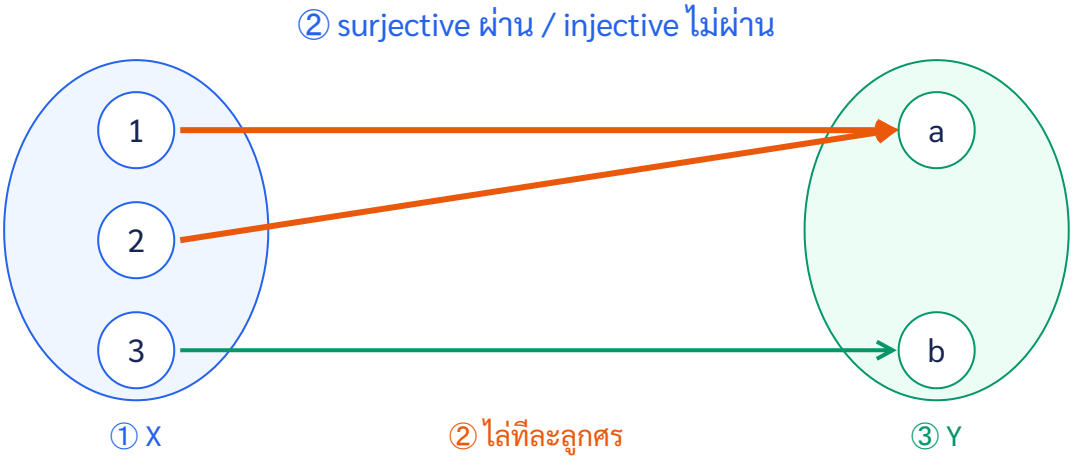
① ไม่ชนแต่ไม่ครบ

X={1,2},Y={a,b,c}, f={(1,a),(2,b)} เป็น injective เพราะไม่ชน แต่ไม่ surjective เพราะ c ไม่มีต้นทาง



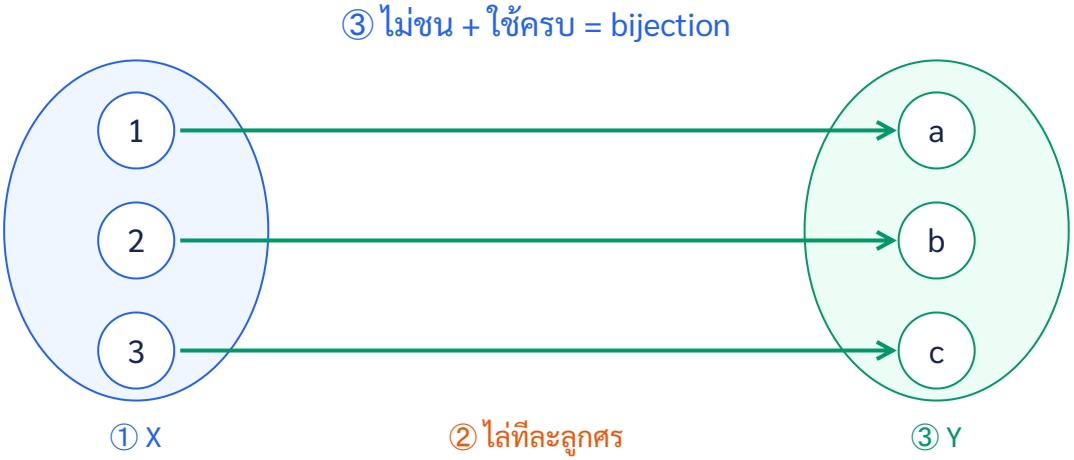
② ครบแต่ชน

X={1,2,3},Y={a,b}, f={(1,a),(2,a),(3,b)} เป็น surjective แต่ไม่ injective เพราะ 1 กับ 2 ชนที่ a



③ ไม่ชนและครบ

X={1,2,3},Y={a,b,c}, f={(1,a),(2,b),(3,c)} ผ่านทั้งสองข้อ จึง bijection



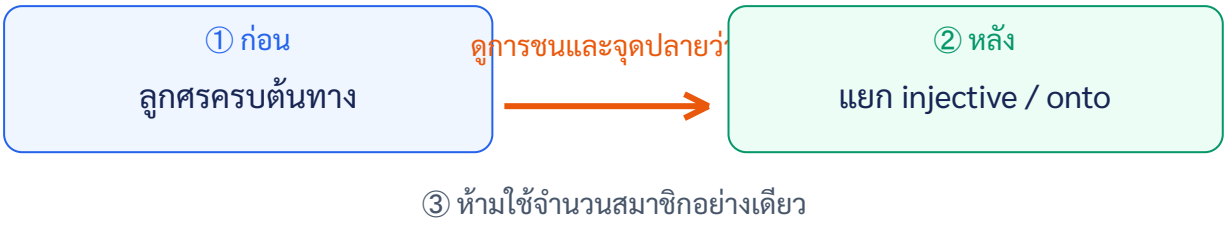
④ เช็กกลับด้วยเกณฑ์เดียว

จำนวนลูกศรเข้าปลายทางของสามภาพคือ (1,1,0), (2,1), (1,1,1) ตามลำดับ: injective ขอไม่เกิน 1; surjective ขอไม่น้อยกว่า 1; bijection ขอเท่ากับ 1



ทำผิดแล้วพังตรงไหน

อย่าพูดว่า “มีลูกศรครบ” โดยไม่บอกว่าครบฝั่งไหน ครบต้นทางใช้ตรวจฟังก์ชัน ส่วนครบปลายทางใช้ตรวจทั่วถึง



ลงมือทำตามนี้

1. ตรวจจำนวนออกของ X ก่อน
2. จากนั้นนับจำนวนเข้าของทุก y
3. แยกผลไม่เกินหนึ่งกับอย่างน้อยหนึ่ง
4. รวมสองข้อเฉพาะเมื่อต้องการ bijection แล้วหยุด

5.17 แบ่งกลุ่มอินพุตที่ให้ผลเท่ากัน: ตัวอย่าง 3.22 เริ่มจากภาพ

ให้เครื่องส่ง 1,2,3 ไป 1 และส่ง 4 ไป 4 ถ้ามองเฉพาะผลลัพธ์ กลุ่มอินพุต 1,2,3 จะแยกจากกันไม่ได้เพราะทุกตัวให้ผล 1 เหมือนกัน

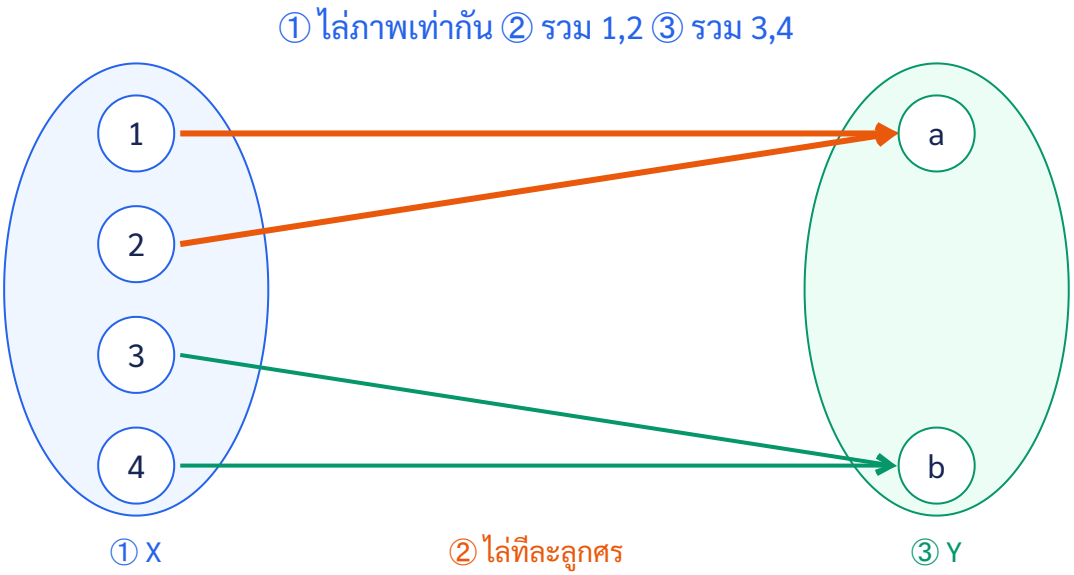
ลองก่อนดูเฉลย

1 กับ 3 ควรถูกจัดกลุ่มเดียวกันไหม และ 1 กับ 4 ควรอยู่กลุ่มเดียวกันหรือไม่

เฉลย 1 กับ 3 อยู่กลุ่มเดียวกันเพราะผลเท่ากัน ส่วน 1 กับ 4 อยู่คนละกลุ่มเพราะผลเป็น 1 กับ 4

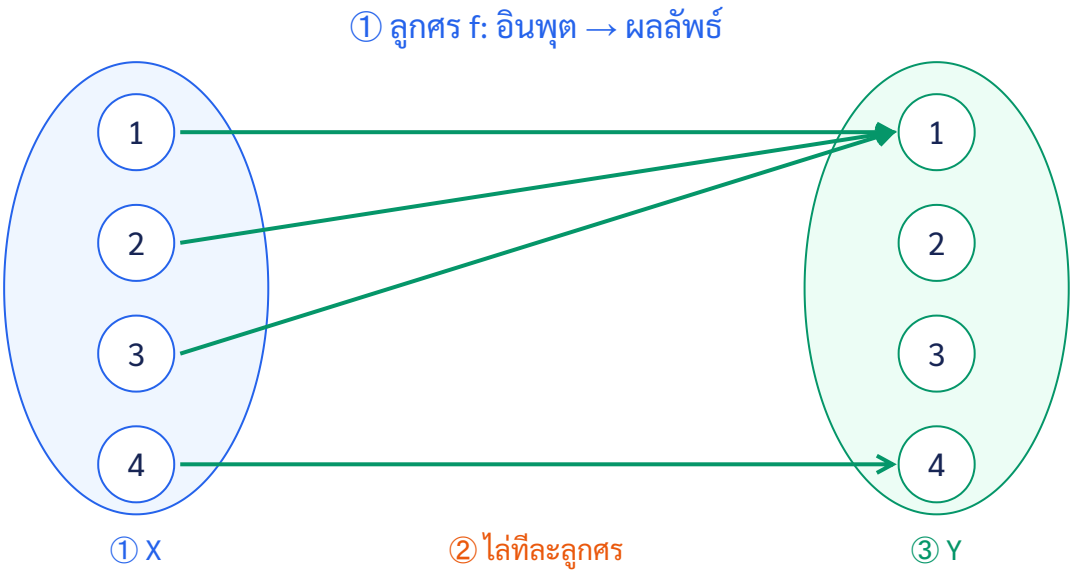
ตัวอย่าง 3.22 กำหนดฟังก์ชัน $f:X\to X$ แล้วสร้าง **ความสัมพันธ์ผลเท่ากัน** โดย $x_1 R x_2$ ก็ต่อเมื่อ $f(x_1)=f(x_2)$ เป้าหมายของต้นฉบับคือพิสูจน์ว่า R เป็นสมมูลสำหรับฟังก์ชันใด ๆ

ภาพนี้เป็นตัวอย่างช่วยแยกสองความสัมพันธ์: ลูกศรของ f ชี้อินพุตไปผลลัพธ์ ส่วนลูกศรของ R เชื่อมอินพุตสองตัวที่ให้ผลเท่ากัน จึงไม่ควรคัดลอกลูกศร f มาเป็น R โดยตรง



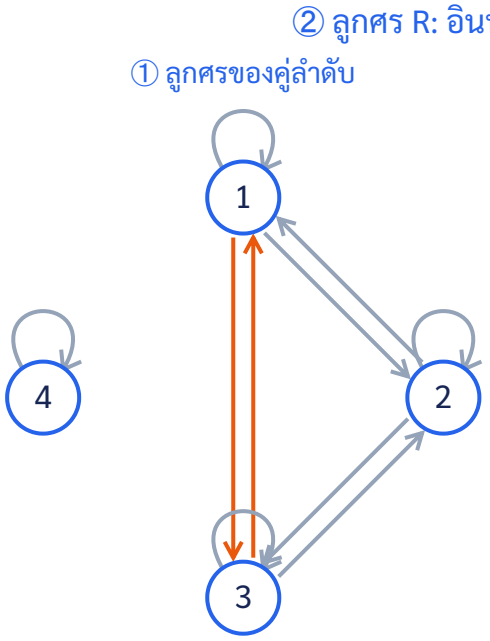
① เก็บฟังก์ชันตั้งต้น

ใช้ X={1,2,3,4}, f(1)=f(2)=f(3)=1 และ f(4)=4 เป็นฟังก์ชันจาก X ไป X จริงเพราะทุกอินพุตมีผลหนึ่งค่าใน X



② สร้าง R จากผลที่เท่ากัน

1,2,3 ให้ผล 1 เท่ากัน จึงเชื่อมทุกคู่ใน {1,2,3}; 4 ให้ผล 4 จึงมีเพียงคู่ (4,4) ในกลุ่มนี้



② แถว x / คอลัมน์ y

	1	2	3	4
1	1	1	1	0
2	1	1	1	0
3	1	1	1	0
4	0	0	0	1

③ ช่อง 1 ตรงกับลูกศรหนึ่งคู่; สีส้มคือคู่ที่กำลังตรวจ

③ อ่านกลุ่มแล้วเช็กกลับ

ได้ชั้น {1,2,3} และ {4}; เช่น 1R3 เพราะ f(1)=f(3)=1 แต่ไม่ใช่ 1R4 เพราะ 1≠4 นับคู่ได้ $3^2+1^2=10$ คู่



ทำผิดแล้วพังตรงไหน

ลูกศร 2→1 ของ f ไม่ได้บอกว่า R มีเพียงคู่ (2,1) เพราะผลของ 2 ยังเท่ากับผลของ 3 และของ 2 เอง จึงต้องมี (2,3) และ (2,2) ด้วย

ลงมือทำตามนี้

1. เขียน f(x) ของทุกอินพุต
2. เปรียบเทียบผลของทุกคู่อินพุต
3. เชื่อม R เมื่อผลเท่ากัน
4. ตรวจคู่กับนิยาม $f(x_1)=f(x_2)$ ก่อนหยุด; ข้อทั่วไปพิสูจน์ในหัวข้อถัดไป

5.18 พิสูจน์ผลเท่ากันเป็นสมมูล โดยไม่สมมติว่า f หนึ่งต่อหนึ่ง

สิ่งที่เราต้องใช้จากเครื่องคืออินพุตหนึ่งตัวมีผลแน่นอนหนึ่งค่า เมื่อผลของตัวแรกเท่ากับผลของตัวกลาง และผลตัวกลางเท่ากับผลตัวท้าย ผลแรกกับท้ายก็ต้องเท่ากัน

ลองก่อนดูเฉลย

จำเป็นไหมที่คนละอินพุตจะต้องให้ผลต่างกัน เพื่อให้ข้อความ “ผลเท่ากัน” เป็นความสัมพันธ์สมมูล

เฉลย ไม่จำเป็น ตัวอย่างที่ 1,2,3 ให้ผลเดียวกันยังจัดเป็นกลุ่มได้ตามปกติ

สมมติฐานหลัก: f:X→X เป็นฟังก์ชัน และ aRb นิยามว่า f(a)=f(b) **เป้าหมาย:** R สะท้อน สมมาตร ถ่ายทอด เราไม่ได้รับสมมติฐานว่า f เป็น injective, onto หรือ bijection

ข้อพิสูจน์อาศัยสมบัติของเครื่องหมายเท่ากับ การมีฟังก์ชันทำให้ f(a) เป็นค่าที่ใช้เปรียบเทียบได้แน่นอน ส่วนความเป็นหนึ่งต่อหนึ่งไม่จำเป็นต่อเหตุผลใดข้างล่าง

① สะท้อน · เลือกสมาชิกทั่วไป

ให้ a∈X ใด ๆ เนื่องจาก f(a)=f(a) จึง aRa ตามนิยาม ทำได้กับทุก a



③ ยังไม่ได้สมมติว่า R สะท้อน

② สมมาตร · สมมติเพียงคู่ตั้งต้น

สมมติ aRb จึง f(a)=f(b) สลับข้างสมการได้ f(b)=f(a) จึง bRa ตามนิยาม



③ สมมติ aRb; สิ่งที่ต้องได้คือ bRa

③ ถ่ายทอด · สมมติสองคู่ตั้งต้น

สมมติ aRb และ bRc จึง f(a)=f(b) และ f(b)=f(c) แทนค่าที่เท่ากันได้ f(a)=f(c) จึง aRc



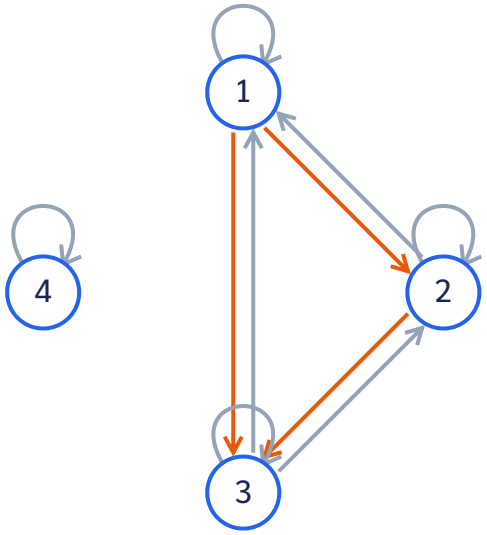
③ สมมติสองคู่เพื่อพิสูจน์คู่ลัด

④ เช็กกลับกับตัวอย่างที่ไม่ injective

ในตัวอย่าง f(1)=f(2)=f(3)=1 จึงมี 1R2,2R3,1R3 ครบ เป็นภาพของขั้นถ่ายทอดที่ไม่ได้ใช้ 1=2 หรือ 2=3 เลย

สมมติ 1R2 และ 2R3 → สิ่งที่ต้องได้ 1R3

① ลูกศรของคู่ลำดับ



② แถว x / คอลัมน์ y

	1	2	3	4
1	1	1	1	0
2	1	1	1	0
3	1	1	1	0
4	0	0	0	1

③ ช่อง 1 ตรงกับลูกศรหนึ่งคู่; สีส้มคือคู่ที่กำลังตรวจ

⑤ รวมข้อสรุป

ครบสามคุณสมบัติจึง R เป็นความสัมพันธ์สมมูลสำหรับฟังก์ชัน f ที่โจทย์กำหนด ข้อสรุปไม่ได้อ้างว่า f ต้องเป็นหนึ่งต่อหนึ่ง



③ เงื่อนไขที่พิสูจน์เป็นของ R ไม่ใช่ของ f

ทำผิดแล้วพังตรงไหน

จาก f(a)=f(b) แล้วเขียน a=b ทันทีเป็นการแอบสมมติว่า f หนึ่งต่อหนึ่ง ซึ่งโจทย์ไม่ได้ให้ และตัวอย่าง f(1)=f(2)=1 แต่ 1≠2 หักล้างขั้นนี้

ลงมือทำตามนี้

1. จดสมมติฐานที่โจทย์ให้จริง
2. แปลง aRb เป็นสมการผลลัพธ์ทุกครั้ง
3. ใช้สมบัติเท่ากับเพื่อสร้างสมการปลายทาง
4. แปลงกลับเป็น R และสรุปหลังครบสามข้อ

5.19 กลับลูกศรแล้วต้องยังเป็นฟังก์ชัน

เครื่องส่ง 1→a,2→c,3→b ถ้ารับ a แล้วอยากรู้ต้นทางเดิม จะได้ 1 แน่นอน รับ c ได้ 2 และรับ b ได้ 3 เราจึงกลับลูกศรทุกเส้นได้โดยไม่กำกวม

ลองก่อนดูเฉลย

ถ้าเดิม 2 และ 3 ไป c เหมือนกัน เมื่อกลับทาง c จะต้องชี้ไปกี่ตัว และยังเป็นฟังก์ชันหรือไม่

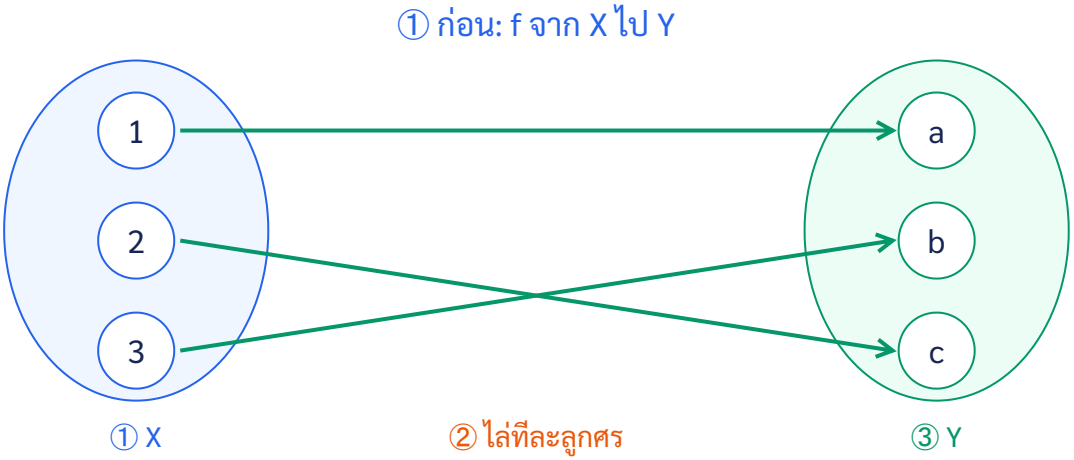
เฉลย ชี้ไปทั้ง 2 และ 3 จึงมีสองผล ไม่เป็นฟังก์ชัน

เมื่อ $f:X\to Y$ เป็น bijection นิยาม **ฟังก์ชันผกผัน (inverse function)** $f^{-1}:Y\to X$ โดยกลับทุกคู่ (x,y) เป็น (y,x) จึง $f^{-1}(y)=x$ เมื่อ $f(x)=y$ สัญลักษณ์ f^{-1} ไม่ได้หมายถึง $1/f$

ความทั่วถึงรับรองว่าทุก y มีลูกศรให้กลับ ส่วนความเป็นหนึ่งต่อหนึ่งรับรองว่าเมื่อกลับแล้ว y ไม่แตกเป็นสองผล จึงต้องมีทั้งสองข้อเพื่อผกผันบน Y ทั้งหมด

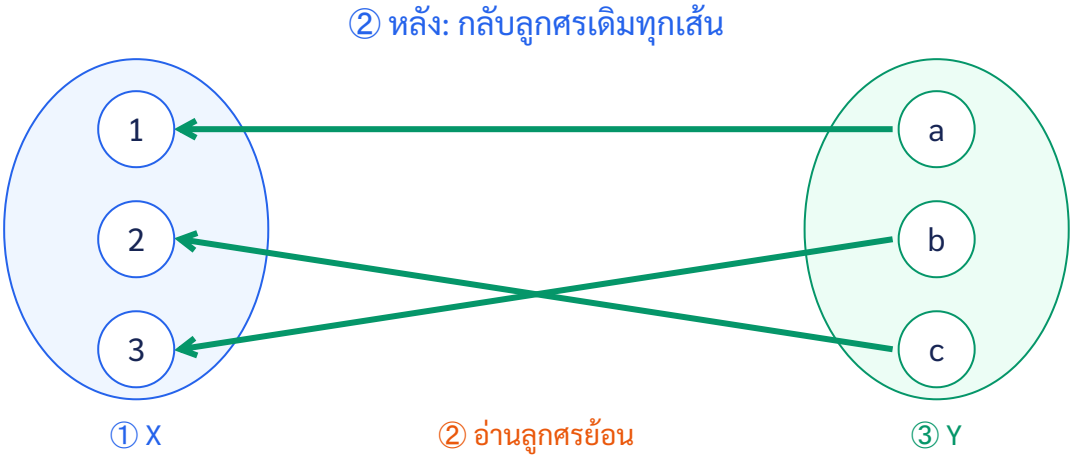
① อ่าน f จากภาพต้นฉบับ

$f=\{(1,a),(2,c),(3,b)\}$ เป็น bijection เพราะปลายทาง a,b,c รับต้นทางหนึ่งตัวพอดี



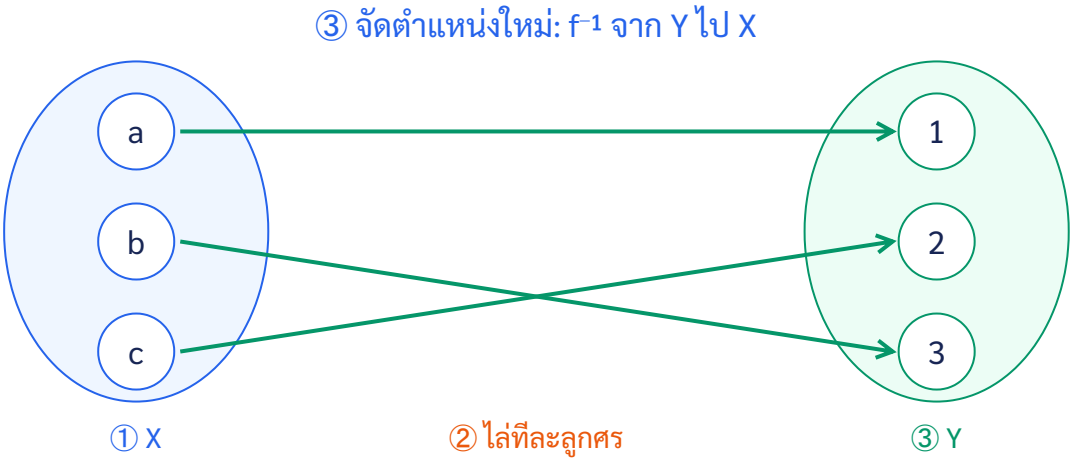
② กลับทิศโดยเก็บจุดเดิมไว้

คู่ (1,a) กลับเป็น (a,1); (2,c) กลับเป็น (c,2); (3,b) กลับเป็น (b,3) ภาพนี้ยังวาง X ซ้าย Y ขวาเพื่อเห็นเส้นเดิมกลับทาง



③ เขียนโดเมนใหม่ให้ชัด

$f^{-1}=\{(a,1),(b,3),(c,2)\}$ มีโดเมน Y และโคโดเมน X ภาพถัดไปย้าย Y มาเป็นฝั่งต้นทางทางซ้าย



④ เช็กกลับสองทิศ

$f^{-1}(f(2))=f^{-1}(c)=2$ และ $f(f^{-1}(b))=f(3)=b$ ทำแบบเดียวกันกับสมาชิกที่เหลือแล้วคืนตัวเริ่มทุกตัว



ทำผิดแล้วพังตรงไหน

การเขียน $f^{-1}(c)=1/c$ เป็นการสับสนสัญลักษณ์ผกผันกับส่วนกลับ ในตัวอย่าง c เป็นชื่อสมาชิก ไม่ใช่ตัวเลขที่ต้องนำมาหาร



③ โดเมนกับโคโดเมนสลับกัน

ลงมือทำตามนี้

1. ตรวจ bijection ก่อน
2. กลับทุกคู่พร้อมสลับโดเมน–โคโดเมน
3. ตรวจต้นทางใหม่ทุกตัวมีผลหนึ่งค่า
4. ตรวจ $f^{-1}(f(x))=x$ และ $f(f^{-1}(y))=y$ ครบโดเมนแล้วหยุด

5.20 ย้อนกลับไม่ได้เพราะชน หรือเพราะไม่มีลูกศร

ถ้าเครื่องเดิมไม่ชนแต่ใช้ปลายทางไม่ครบ การย้อนกลับจะติดที่ปลายทางว่าง หากเครื่องเดิมใช้ครบแต่ชน การย้อนกลับจะติดที่ตัวหนึ่งมีสองทางไป

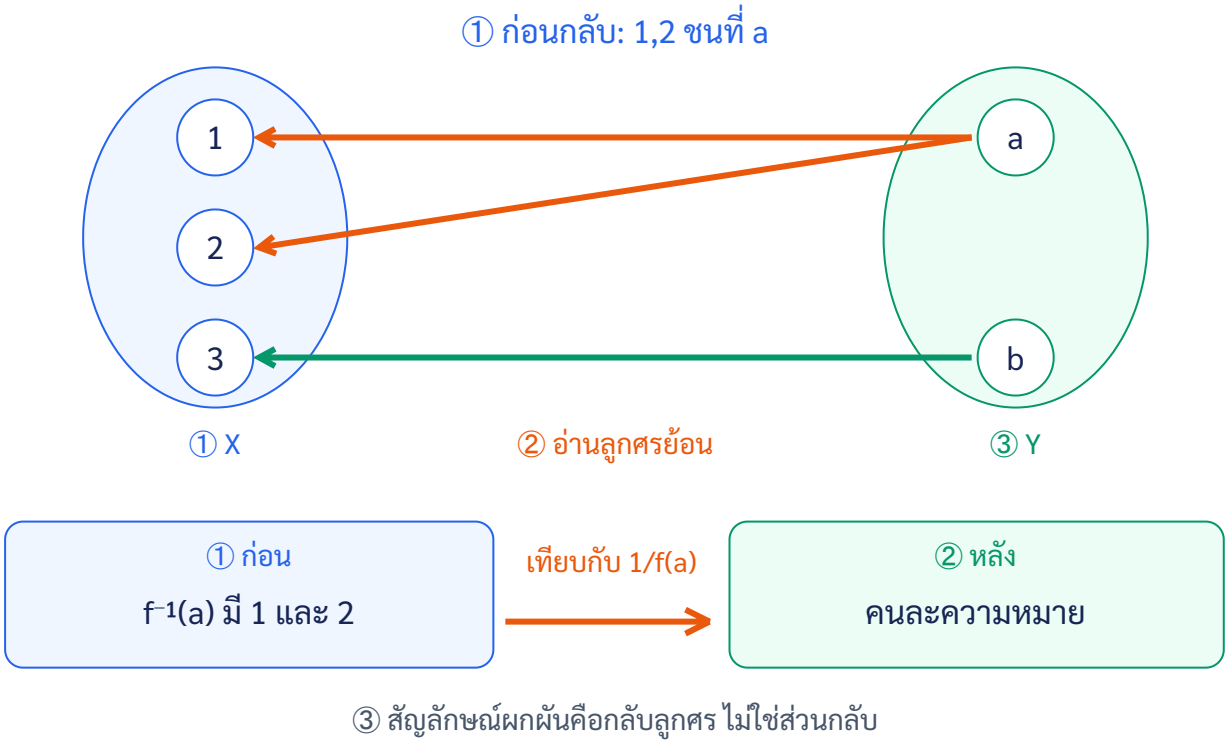
ลองก่อนดูเฉลย

การไม่มีผลย้อนหลังกับการมีสองผลย้อนหลัง ผิดเงื่อนไขเดียวกันหรือไม่

เฉลย ผิดคนละส่วน: แบบแรกผิดการมีผลทุกตัว แบบหลังผิดการมีผลเพียงหนึ่ง

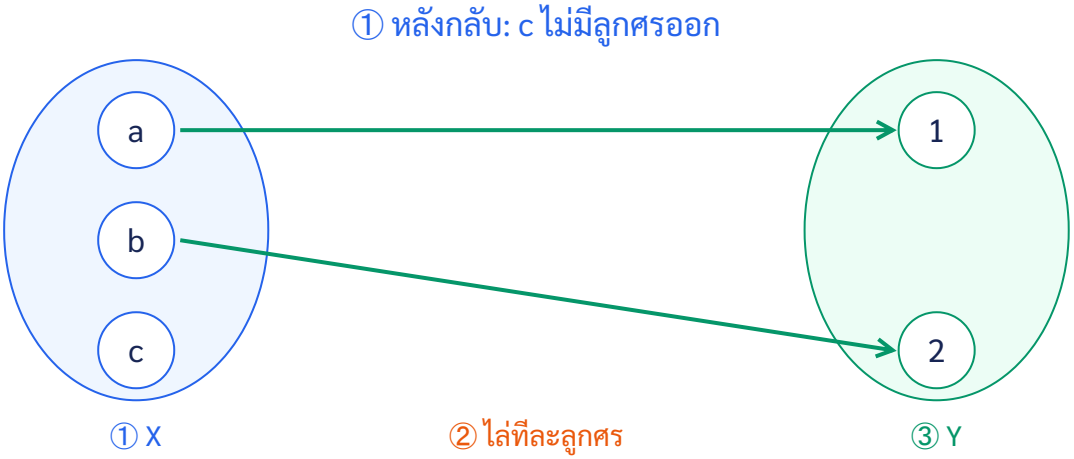
ความสัมพันธ์ผกผัน เกิดจากการกลับคู่ได้เสมอ แต่จะเป็น **ฟังก์ชันผกผันบนโคโดเมนที่ประกาศ** ได้เมื่อฟังก์ชันเดิมเป็น bijection

การแยกสองกรณีทำให้รู้ว่าทำไมคำว่า bijection อยู่ในนิยาม ไม่ใช่เงื่อนไขที่ใส่มาโดยไม่มีบทบาท



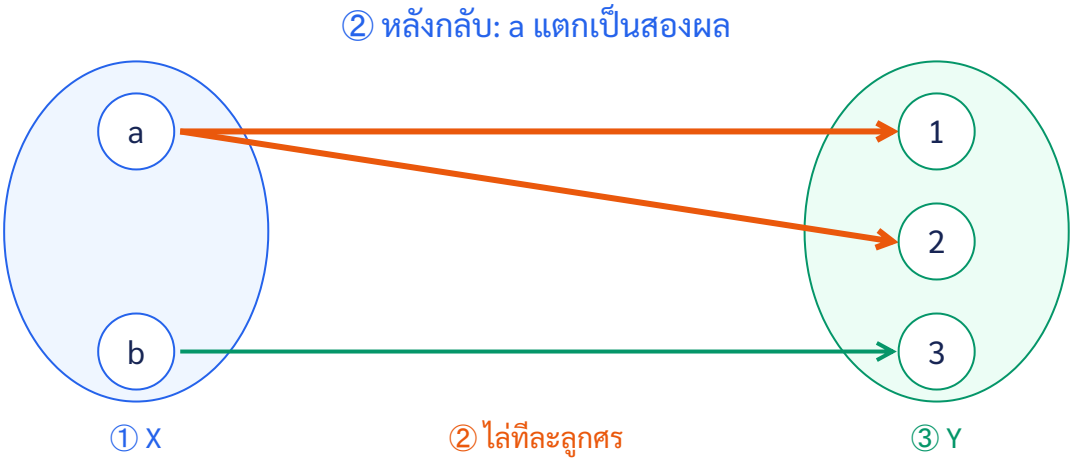
① ต้นฉบับไม่ชนแต่ขาด c

f:{1,2}→{a,b,c}, f={(1,a),(2,b)} เมื่อกลับจะมี a→1,b→2 แต่ c ไม่มีผล จึงไม่เป็นฟังก์ชันบน {a,b,c}



② ต้นฉบับทั่วถึงแต่ชนที่ a

h:{1,2,3}→{a,b}, h={(1,a),(2,a),(3,b)} เมื่อกลับ a→1 และ a→2 จึงไม่เป็นฟังก์ชัน



③ เช็กกลับเหตุผลของเงื่อนไข

เดิมทั่วถึงทำให้ย้อนหลังไม่ขาด; เดิมหนึ่งต่อหนึ่งทำให้ย้อนหลังไม่แตก ถ้าผ่านทั้งคู่จึงย้อนหลังเป็นฟังก์ชัน



③ นี่คือเงื่อนไขฟังก์ชันย้อนหลัง

ทำผิดแล้วพังตรงไหน

หากเปลี่ยนโคโดเมนของกรณีแรกเหลือเพียง {a,b} จะสร้างฟังก์ชันผกผันได้สำหรับโจทย์ใหม่ แต่ไม่ได้แก้โจทย์เดิมที่กำหนด Y={a,b,c}



③ หนึ่งอินพุตมีสองผล จึงไม่เป็นฟังก์ชัน

ลงมือทำตามนี้

1. ระบุ Y เดิมให้ชัด
2. กลับคู่ทั้งหมด
3. ตรวจตัวที่ไม่มีผลและตัวที่มีหลายผล
4. รายงานสาเหตุที่ย้อนแล้วไม่เป็นฟังก์ชัน โดยไม่เปลี่ยนโดเมนเอง

5.21 เดินผ่านสองเครื่อง: ฟังก์ชันประกอบ

เครื่อง g ส่ง 1 ไป a และ 2 ไป b จากนั้นเครื่อง f ส่ง a ไป u, b ไป v, c ไป u ถ้าเริ่มที่ 1 ต้องผ่าน a ก่อนจึงถึง u

ลองก่อนดูเฉลย

ถ้าเริ่ม x=2 ต้องใช้ g ก่อนหรือ f ก่อน เพื่อให้ค่าระหว่างทางอยู่ในโดเมนที่เครื่องรับได้

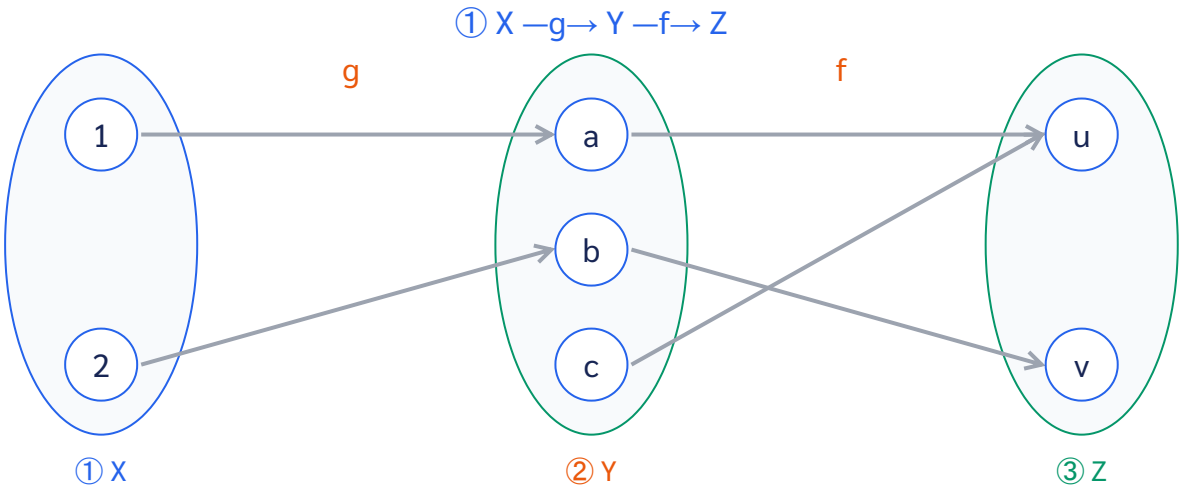
เฉลย ใช้ g ก่อน ได้ b แล้วใช้ f ต่อได้ v การเริ่มด้วย f(2) ใช้ไม่ได้ในตัวอย่างนี้เพราะ 2 ไม่อยู่ในโดเมนของ f

ฟังก์ชันประกอบ (composition) เมื่อ $g:X\to Y$ และ $f:Y\to Z$ เขียน $f\circ g:X\to Z$ โดย $(f\circ g)(x)=f(g(x))$ ต้องใช้ชื่อทางขวาก่อน เพราะผล g(x) เป็นอินพุตของ f

ความเข้ากันของโดเมนทำให้ทุก x เดินต่อได้จริง ผลจาก g อยู่ใน Y ซึ่งเป็นโดเมนของ f พอดี และแต่ละเครื่องให้ผลหนึ่งค่า จึงผลปลายทางยังมีหนึ่งค่า

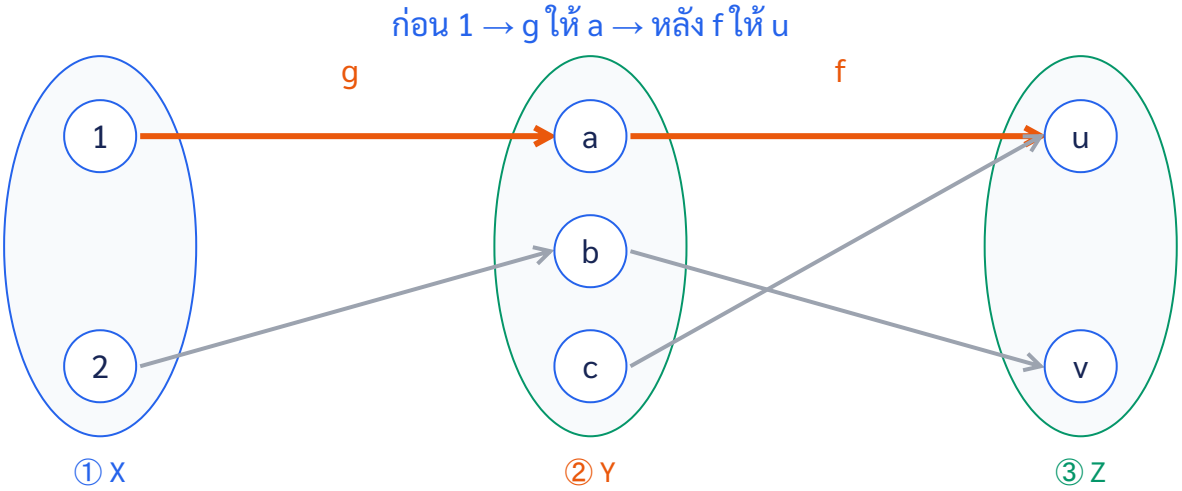
① เก็บลูกโซ่ก่อนคำนวณ

X={1,2},Y={a,b,c},Z={u,v}; g(1)=a,g(2)=b; f(a)=u,f(b)=v,f(c)=u



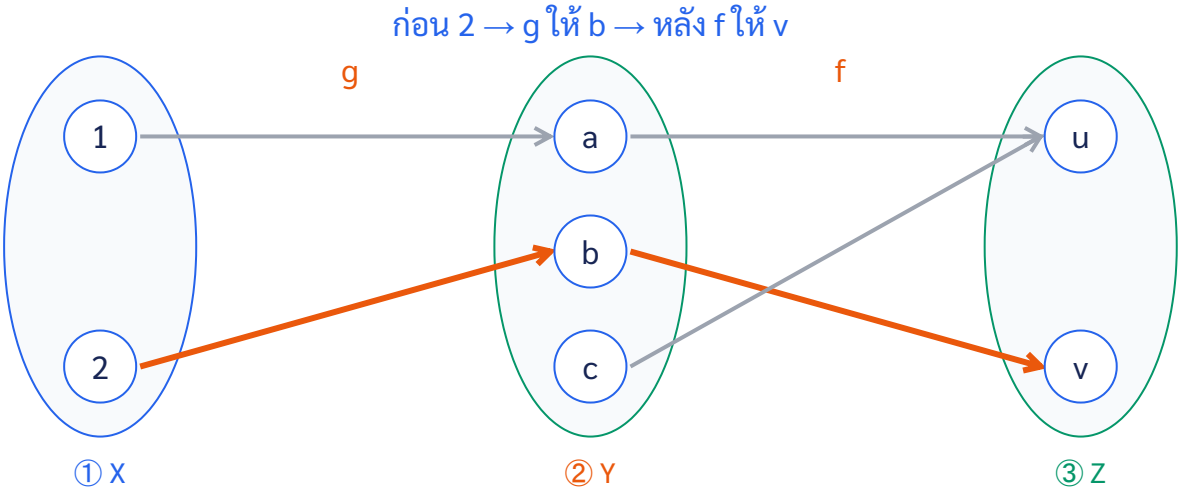
② เดินจาก 1

$(f \circ g)(1)=f(g(1))=f(a)=u$ เขียนผลกลาง a ไว้ ไม่ข้ามตรงจาก 1 ไป u โดยไม่มีเหตุผล



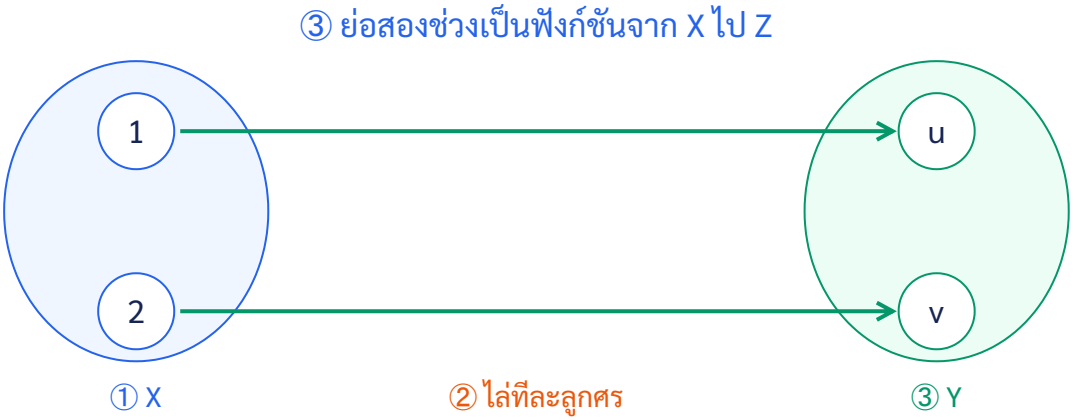
③ เดินจาก 2

$(f \circ g)(2)=f(g(2))=f(b)=v$



④ ย่อเส้นทางแล้วเช็กกลับ

จึง f∘g={(1,u),(2,v)} ตรวจกลับได้ว่าแต่ละลูกศรสั้นเกิดจากลูกศรสองช่วงจริง ส่วน c ไม่ถูก g ใช้จึงไม่ส่งผลต่อสองค่านี้



ทำผิดแล้วพังตรงไหน

อ่าน f∘g จากซ้ายก่อนจะพยายามหา f(1) ทั้งที่ f รับ a,b,c เท่านั้น ให้เขียน f(g(x)) ก่อนทุกครั้งจะเห็นชัดว่าต้องเติมวงเล็บด้านในก่อน

ลงมือทำตามนี้

1. เขียนโดเมน–โคโดเมนของสองฟังก์ชัน
2. ตรวจว่าผลตัวในเข้าตัวนอกได้
3. คำนวณตัวใน แล้วค่อยตัวนอก
4. เก็บผลกลางและตรวจลูกศรย่อก่อนหยุด

5.22 ถ้าชื่อสลับเป็น g∘f ก็ต้องใช้ f ก่อน

ให้เครื่อง f คูณอินพุตด้วย 2 และเครื่อง g บวก 1 เริ่มจาก 3 ถ้าบวกก่อนแล้วคูณจะได้ 8 แต่ถ้าคูณก่อนแล้วบวกจะได้ 7 การสลับลำดับเปลี่ยนผลได้

ลองก่อนดูเฉลย

ใน g∘f เครื่องที่ทำงานก่อนคือเครื่องบวกหรือเครื่องคูณ

เฉลย เครื่อง f คือคูณก่อน แล้ว g ค่อยบวก เพราะ g∘f เขียนเต็มว่า g(f(x))

ชื่อ f,g ไม่มีลำดับพิเศษในตัวเอง **เครื่องหมาย ∘ เป็นตัวบอกลำดับ** ตัวขวาทำก่อนเสมอ เมื่อทั้งสองฟังก์ชันเป็น $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ จะคำนวณได้ทั้งสองลำดับ แต่ไม่จำเป็นต้องได้ฟังก์ชันเดียวกัน

การคูณหลังบวกทำให้ส่วนที่บวกถูกคูณด้วย ส่วนการบวกหลังคูณไม่ได้คูณส่วนที่บวก นี่เป็นกลไกที่ทำให้ผลต่าง ไม่ใช่เพียงกฎว่า “ห้ามสลับ”

① คำนวณ f∘g

f(x)=2x, g(x)=x+1 จึง (f∘g)(x)=f(x+1)=2(x+1)=2x+2



③ บวก 1 ถูกคูณ 2 ด้วย

② คำนวณ g∘f

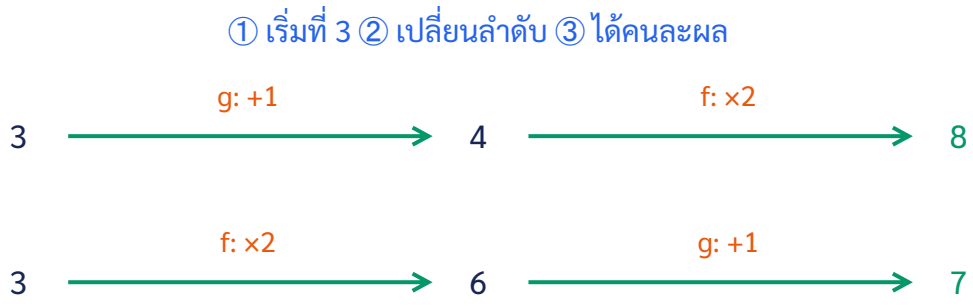
(g∘f)(x)=g(2x)=2x+1 ตัวที่บวก 1 เข้ามาหลังคูณเสร็จ



③ บวก 1 หลังจากคูณ

③ แทนค่าแล้วเช็กกลับ

เมื่อ x=3: f(g(3))=f(4)=8 ส่วน g(f(3))=g(6)=7 ค่าต่างกันจึงสองฟังก์ชันไม่เท่ากัน



ทำผิดแล้วพังตรงไหน

จำว่าต้องทำ g ก่อนทุกครั้งจะผิดเมื่อสูตรเปลี่ยนเป็น g∘f ให้ดูตำแหน่งทางขวาของ ∘ ไม่ใช่ตัวอักษรที่คุ้นเคย

ลงมือทำตามนี้

1. เขียนรูปซ้อนวงเล็บก่อน
2. ใช้ฟังก์ชันด้านในกับ x
3. แทนผลเข้าอีกฟังก์ชัน
4. ลองค่าเดียวกันทั้งสองลำดับเพื่อเช็กว่าต่างกันหรือไม่ แล้วหยุด

5.23 ผลประกอบหนึ่งต่อหนึ่ง บังคับให้ f หนึ่งต่อหนึ่งไหม: ตัวอย่าง 3.23

ในลูกโซ่ก่อนหน้า g ใช้เพียง a กับ b แต่ไม่เคยส่งอินพุตไป c เลย แม้ f จะส่ง a กับ c ไป u เหมือนกัน การชนที่ c ก็อาจไม่ถูกฟังก์ชันประกอบมองเห็น

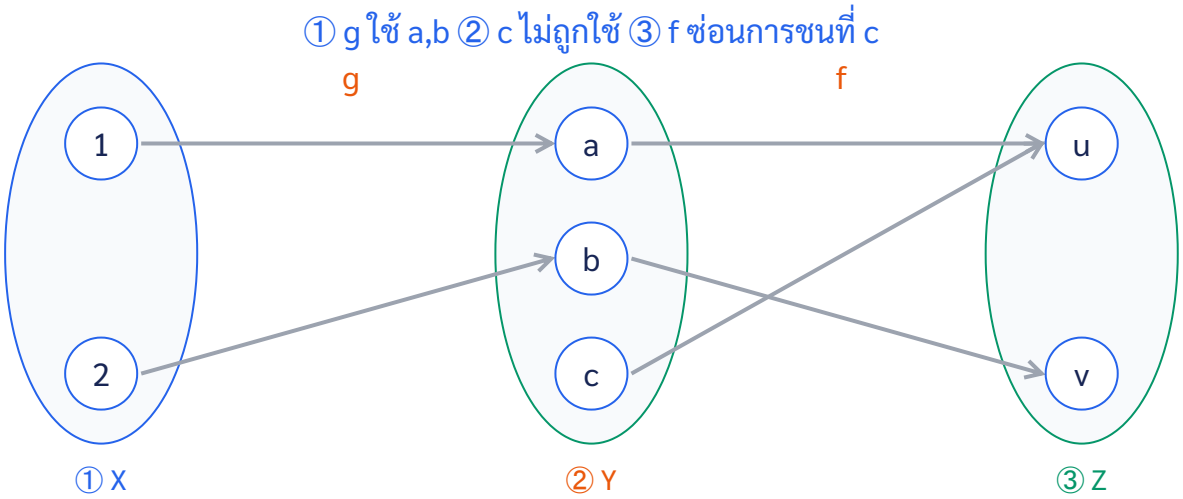
ลองก่อนดูเฉลย

ถ้า f ชนกันเฉพาะส่วนของ Y ที่ g ไม่ได้ใช้ ผลประกอบจำเป็นต้องชนด้วยหรือไม่

เฉลย ไม่จำเป็น เพราะอินพุตของฟังก์ชันประกอบเดินผ่านได้เฉพาะจุดที่ g ส่งถึง

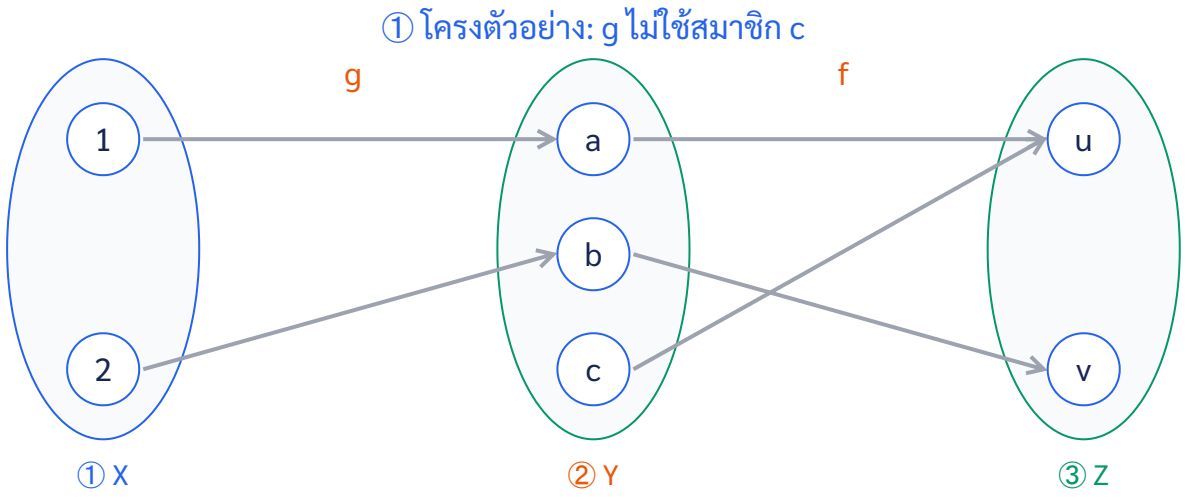
โจทย์อ้างว่า “ถ้า f∘g เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง แล้ว f เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง” เราจะ **หักล้างด้วยตัวอย่างค้าน** โดยสร้าง g:X→Y และ f:Y→Z ที่สมมติฐานเป็นจริง แต่ข้อสรุปเป็นเท็จ

สมมติฐานที่ตัวอย่างต้องทำให้จริง: f∘g ไม่ชน **ข้อสรุปที่ต้องทำให้เท็จ:** f ไม่ชน การแสดง f ชนอย่างเดียวโดยไม่ตรวจผลประกอบยังไม่ใช่ตัวอย่างค้านที่ครบ



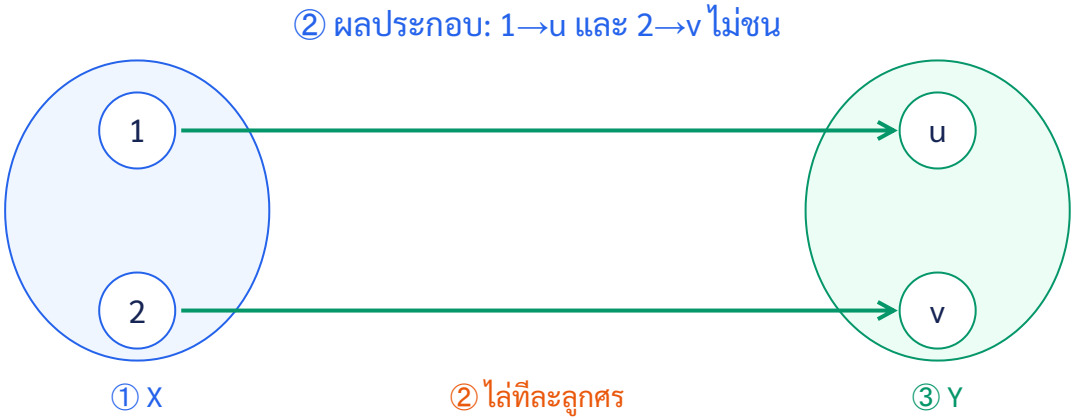
① สร้างฟังก์ชันและโดเมนให้ครบ

X={1,2},Y={a,b,c},Z={u,v}; g={(1,a),(2,b)} และ f={(a,u),(b,v),(c,u)} ทุกต้นทางมีผลหนึ่งค่าอยู่ในโคโดเมนที่ถูกต้อง



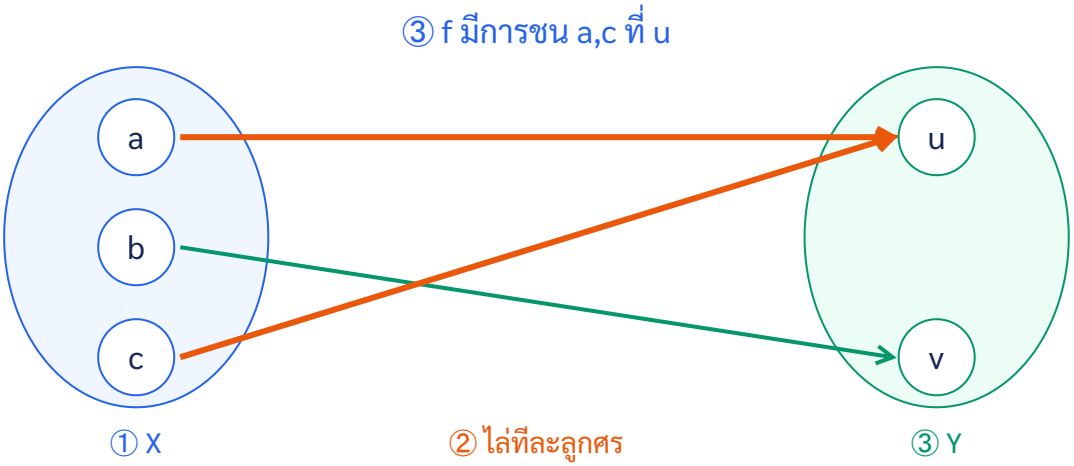
② ตรวจว่าสมมติฐานจริง

(f∘g)(1)=f(a)=u และ (f∘g)(2)=f(b)=v โดย u≠v จึงผลประกอบเป็นหนึ่งต่อหนึ่ง



③ ตรวจว่าข้อสรุปเท็จ

f(a)=f(c)=u แต่ a≠c จึง f ไม่เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง ใช้คู่ a,c เป็นหลักฐานชน



④ เช็กกลับรูปประโยค

ตัวอย่างนี้ให้หน้า T หลัง F ของประโยค “ถ้า...แล้ว...” จึงหักล้างข้อความทั่วไปได้ โดยไม่จำเป็นต้องลองทุกฟังก์ชันที่เป็นไปได้



③ T→F ทำให้ข้อความทั่วไปเป็นเท็จ

ทำผิดแล้วพังตรงไหน

ถ้าเลือก X,Y เท่ากันแล้ว g ใช้ Y ครบ อาจหาตัวอย่างแบบนี้ไม่เจอ เพราะไม่มีจุดที่ซ่อนการชน จึงควรมองส่วนของ Y ที่ g ไม่ใช้ ซึ่งโจทย์ไม่ได้ห้าม

ลงมือทำตามนี้

1. เขียนสมมติฐานและข้อสรุปแยกกัน
2. สร้าง Y ให้มีสมาชิกที่ g ไม่ใช้
3. ให้ f ชนระหว่างจุดที่ใช้กับจุดที่ไม่ใช้ โดยผลประกอบยังไม่ชน
4. ตรวจฟังก์ชันครบทุกต้นทางและหน้า T หลัง F แล้วหยุด

5.24 ผลประกอบหนึ่งต่อหนึ่ง บังคับให้ g หนึ่งต่อหนึ่ง: ตัวอย่าง 3.24

ถ้าเครื่องแรกส่งอินพุตสองตัวไปจุดเดียวกัน เครื่องที่สองจะได้รับอินพุตเดียวกันจากทั้งสองทาง จึงให้ผลปลายทางเดียวกันเสมอ เครื่องที่สองแยกสองต้นทางที่ถูกรวมไปแล้วกลับมาเองไม่ได้

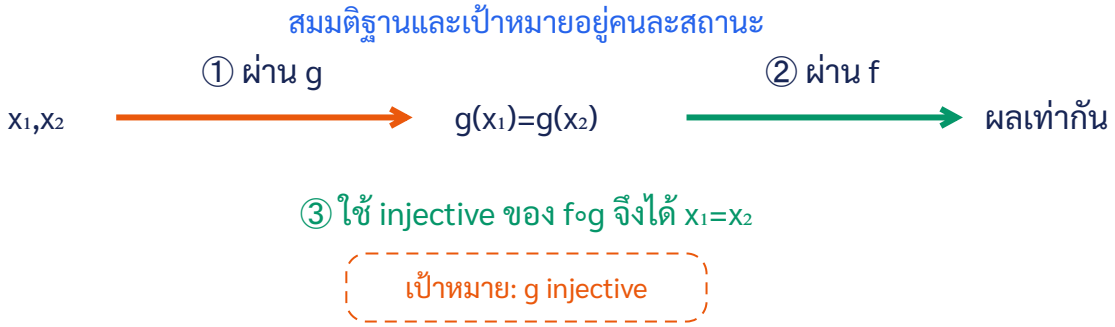
ลองก่อนดูเฉลย

ถ้า $g(x_1)=g(x_2)$ แล้ว $f(g(x_1))$ กับ $f(g(x_2))$ จะต่างกันได้หรือไม่ เมื่อ f เป็นฟังก์ชัน

เฉลย ต่างกันไม่ได้ เพราะ f ได้อินพุตเท่ากัน จึงให้ผลค่าเดียวกัน

ข้อความ “ถ้า $f\circ g$ เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง แล้ว g เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง” เป็นจริง เราจะพิสูจน์โดย **เริ่มจากผลของ g เท่ากัน แล้วแสดงว่าต้นทางต้องเท่ากัน** ซึ่งตรงนิยาม injective

สมมติฐานหลัก: $g:X\to Y, f:Y\to Z$ และ $f\circ g$ เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง **เป้าหมาย:** ถ้า $g(x_1)=g(x_2)$ ต้องได้ $x_1=x_2$ เราไม่ได้สมมติว่า f เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง เพราะข้อก่อนแสดงว่าไม่จำเป็น



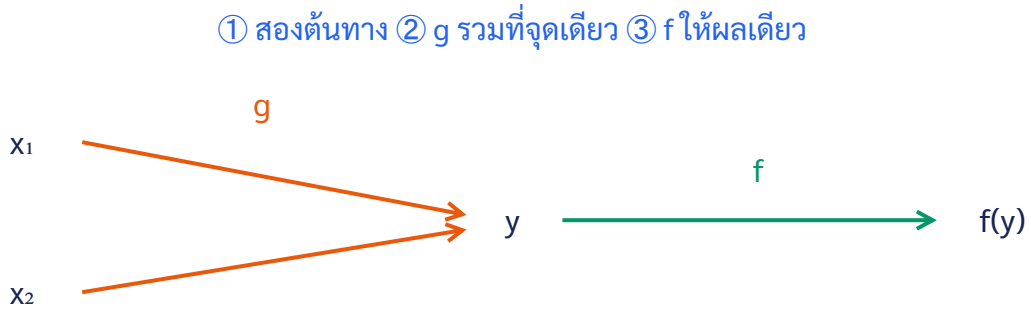
① ตั้งสมาชิกและสมมติฐานย่อย

เลือก $x_1,x_2\in X$ ใด ๆ สมมติ $g(x_1)=g(x_2)$ เพื่อเริ่มพิสูจน์ตามนิยามของ g



② ส่งสองข้างผ่าน f

เพราะอินพุตของ f เท่ากัน จึง $f(g(x_1))=f(g(x_2))$ ขั้นนี้ใช้เพียงว่า f เป็นฟังก์ชัน ไม่ได้ใช้ injective ของ f



③ แปลเป็นฟังก์ชันประกอบ

จากนิยาม $f(g(x))=(f\circ g)(x)$ จึง $(f\circ g)(x_1)=(f\circ g)(x_2)$



③ ยังไม่สรุปต้นทางจนกว่าจะใช้สมมติฐานหลัก

④ ใช้สมมติฐานหลักตรงจุด

เพราะ f∘g เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง ผลของมันเท่ากันจึงบังคับ $x_1=x_2$ นี่คือขั้นที่ใช้เงื่อนไขสำคัญของโจทย์



③ ใช้ injective ของ f∘g เท่านั้น

⑤ สรุปและเช็กกลับเป้าหมาย

เราเริ่ม $g(x_1)=g(x_2)$ แล้วได้ $x_1=x_2$ สำหรับสมาชิกทั่วไป จึง g เป็นหนึ่งต่อหนึ่งครบตามนิยาม ไม่ได้พิสูจน์เพียงกรณีตัวอย่าง



③ ตรงนิยาม g เป็น injective

ทำผิดแล้วพังตรงไหน

ถ้าเขียน $g(x_1)=g(x_2)$ แล้วสรุป $x_1=x_2$ ทันที จะสมมติสิ่งที่กำลังพิสูจน์ ต้องผ่าน f และใช้ injective ของ $f\circ g$ ที่โจทย์ให้มาก่อน

ลงมือทำตามนี้

1. จดสมมติฐานหลักว่า injective เป็นของ $f\circ g$
2. เลือกสมาชิกทั่วไปและสมมติผล g เท่ากัน
3. ส่งผ่าน f แล้วเรียกนิยาม composition
4. ใช้สมมติฐานหลักให้ได้ต้นทางเท่ากัน ตรวจว่าเป้าหมายครบแล้วหยุด

ภาคผนวก ก · เฉลย In-Class Week 1–2

วิธีทำเซตอยู่บทที่ 1 วิธีตรรกะและตัวบ่งปริมาณอยู่บทที่ 2 เลขข้อในภาคผนวกนี้ตรงกับใบงาน ทุกชื่อบุคคลเปลี่ยนเป็นคำกลางโดยคงความหมายของโจทย์

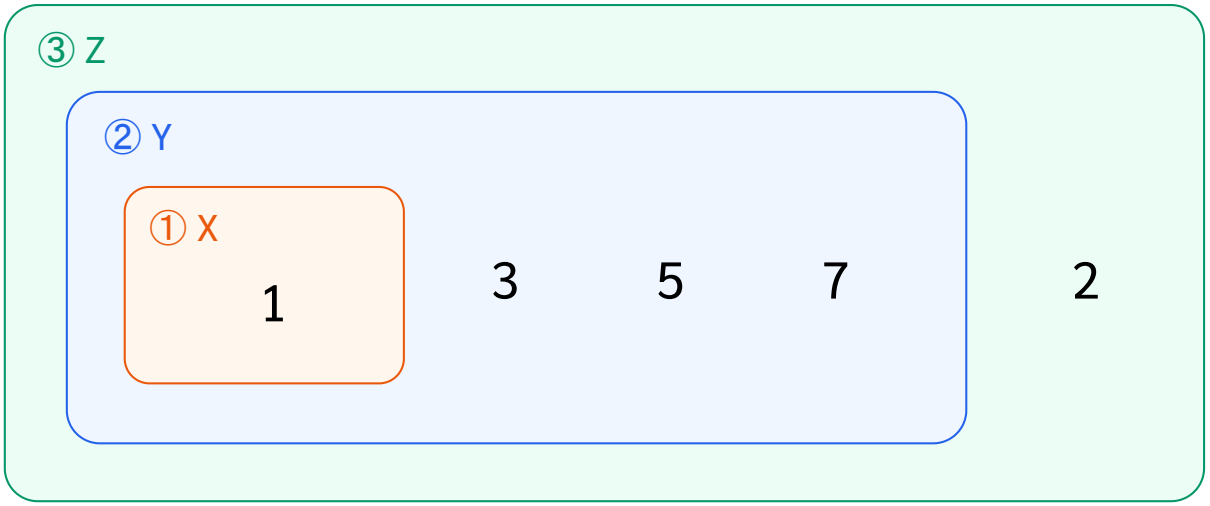
In-Class Week 1

ข้อ 1.1 · เลือกเซตให้ซ้อนกัน

กำหนด $Y=\{1,3,5,7\}$ และ $X \subseteq Y \subseteq Z$ ให้ยกตัวอย่าง X และ Z

① **เลือก X จากข้างใน Y** เลือกแค่ 1 จึงได้ $X=\{1\}$ ทุกสมาชิกของ X อยู่ใน Y

② **ขยาย Y เป็น Z** เติม 2 โดยเก็บสมาชิกเดิมครบ ได้ $Z=\{1,2,3,5,7\}$

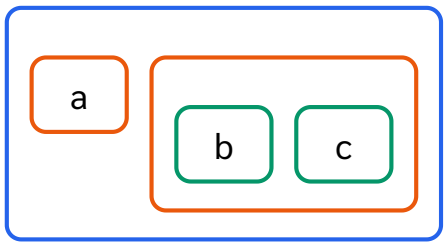


เช็กกลับ: $X \subseteq Y$ เพราะ 1 อยู่ใน Y; $Y \subseteq Z$ เพราะ 1,3,5,7 อยู่ใน Z ครบ คำตอบมีได้หลายแบบ และ $\subseteq$ ยอมให้เท่ากันได้

ข้อ 1.2 · เพาเวอร์เซตของเซตที่มีสมาชิกเป็นเซต

$A=\{a,\{b,c\}\}$ มีสมาชิกสองชิ้น คือ a กับทั้งกล่อง $\{b,c\}$ ไม่ใช่สมาชิกสามตัว a,b,c

① เปิดกรอบนอก: มีสองชิ้นให้เลือก

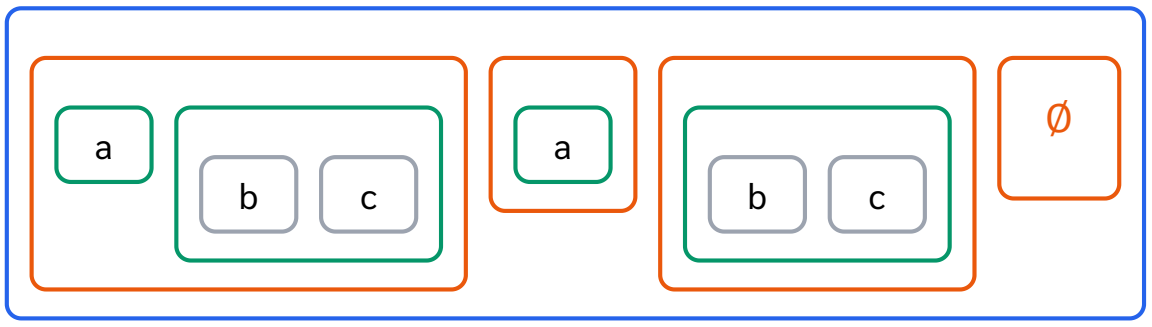


② เลือก/ไม่เลือกแต่ละชิ้น ไม่เลือกเลยได้ ∅; เลือก a อย่างเดียวได้ {a}; เลือกทั้งกล่องอย่างเดียวได้ {{b,c}}; เลือกทั้งคู่ได้ {a,{b,c}}

เลือก a?	เลือก {b,c}?	③ สับเซต
ไม่	ไม่	∅
ใช่	ไม่	{a}
ไม่	ใช่	{{b,c}}
ใช่	ใช่	{a,{b,c}}

ตอบ: P(A)={∅,{a},{{b,c}},{a,{b,c}}}

③ ใส่สับเซตแต่ละชุดเป็นสมาชิกของ P(A)



เช็กกลับ: ได้ $2^2=4$ ชุด แต่ละชุดหยิบเฉพาะสองสมาชิกเดิมของ A ห้ามแยก b กับ c ออกจากกล่อง

ข้อ 1.3 · เพาเวอร์เซตซ้อนสามชั้น

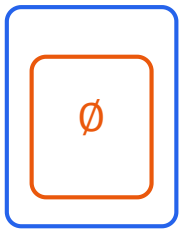
(1) เปิดของตั้งต้นก่อน ของตั้งต้นคือ ∅ มี 0 สมาชิก จึงมีตัวเลือกสับเซต 1 ชุด

① ของตั้งต้น



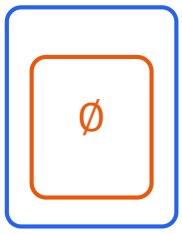
สร้างทุกสับเซตแล้วใส่กรอบนอก {∅}

② เลือกสับเซต → ③ เพาเวอร์เซตที่ได้



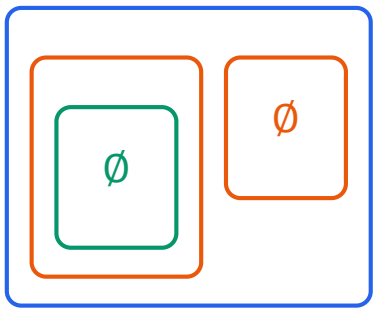
(2) เปิดของตั้งต้นก่อน ของตั้งต้นคือ {∅} มี 1 สมาชิก จึงมีตัวเลือกสับเซต 2 ชุด

① ของตั้งต้น



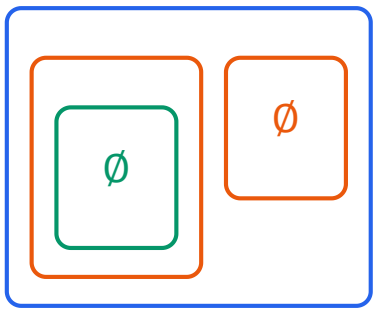
สร้างทุกสับเซตแล้วใส่กรอบนอก {∅, {∅}}

② เลือกสับเซต → ③ เพาเวอร์เซตที่ได้



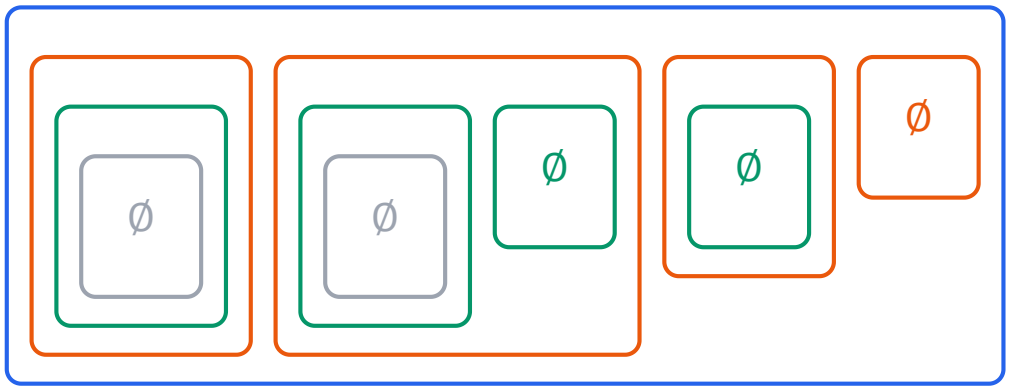
(3) เปิดของตั้งต้นก่อน ของตั้งต้นคือ {∅, {∅}} มี 2 สมาชิก จึงมีตัวเลือกสับเซต 4 ชุด

① ของตั้งต้น



สร้างทุกสับเซตแล้วใส่กรอบนอก {∅, {∅, {∅}}, {∅}, {{∅}}}

② เลือกสับเซต → ③ เพาเวอร์เซตที่ได้

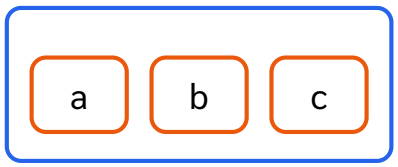


เช็กกลับ: คำตอบตามลำดับคือ {∅}, {∅,{∅}}, {∅,{∅},{{∅}},{∅,{∅}}} ขนาดตามลำดับเป็น 1,2,4 ห้ามลืมกรอบนอกเมื่อยกทั้งเซตเป็นสมาชิก

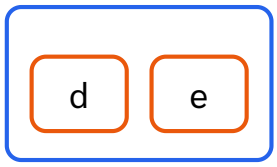
ข้อ 1.4 · ทำทีละเครื่องหมาย

A={a, b, c}, B={d, e}

① A ของตั้งต้น

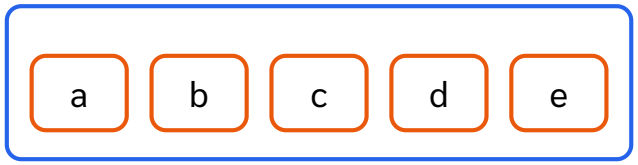


① B ของตั้งต้น



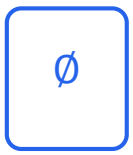
② **A ∪ B** หยิบจากทั้งสองฝั่งแล้วตัดตัวซ้ำ → {a, b, c, d, e}

③ A ∪ B = {a, b, c, d, e}



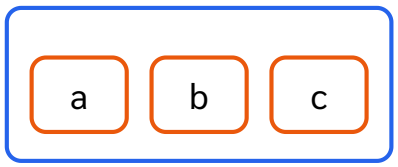
② **A∩B** เก็บเฉพาะชิ้นที่เหมือนกันทั้งชิ้น → ∅

③ A∩B = ∅



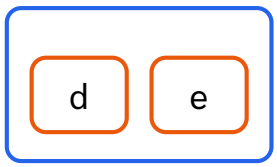
② **A−B** เริ่มจากฝั่งซ้าย แล้วตัดชิ้นที่มีในขวา → {a, b, c}

③ A−B = {a, b, c}



② **B−A** เริ่มจาก B แล้วตัดสมาชิกของ A → {d, e}

③ B−A

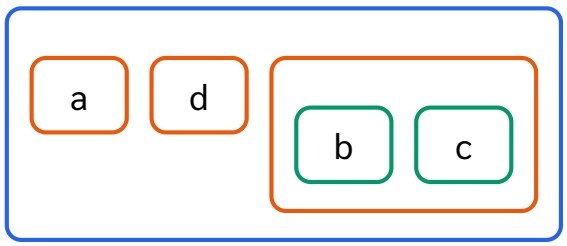


เช็กกลับ: เป็น disjoint เพราะส่วนร่วมว่าง; คำว่า disjoint หมายถึงไม่มีสมาชิกซ้ำกันเลย ไม่ใช่แค่สองเซตไม่เท่ากัน

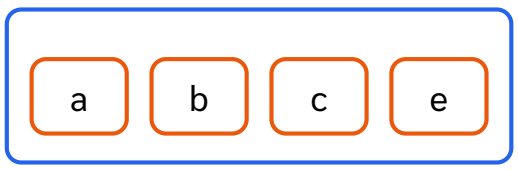
ข้อ 1.5 · ทำทีละเครื่องหมาย

X={a, d, {b, c}}, Y={a, b, c, e}

① X ของตั้งต้น

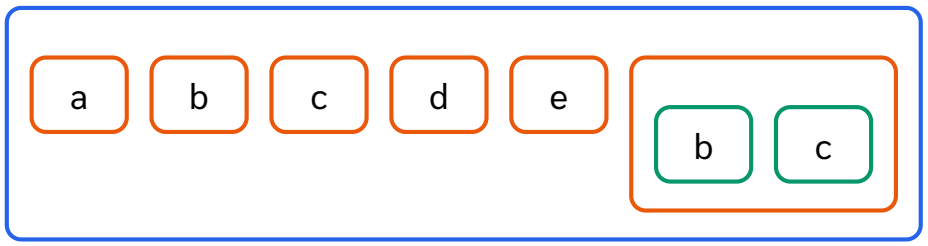


① Y ของตั้งต้น



② **X ∪ Y** หยิบจากทั้งสองฝั่งแล้วตัดตัวซ้ำ → {a, b, c, d, e, {b, c}}

③ X ∪ Y = {a, b, c, d, e, {b, c}}



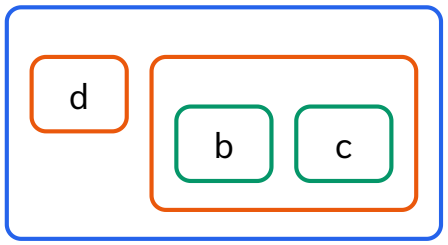
② **X∩Y** เก็บเฉพาะชิ้นที่เหมือนกันทั้งชิ้น → {a}

③ X∩Y = {a}



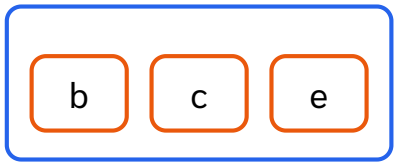
② **X−Y** เริ่มจากฝั่งซ้าย แล้วตัดชิ้นที่มีในขวา → {d, {b, c}}

③ X−Y = {d, {b, c}}



② **Y−X** เริ่มจาก Y แล้วตัดสมาชิกของ X → {b, c, e}

③ Y−X



เช็กกลับ: ไม่เป็น disjoint เพราะมี a อยู่ร่วมกัน; คำว่า disjoint หมายถึงไม่มีสมาชิกซ้ำกันเลย ไม่ใช่แค่สองเซตไม่เท่ากัน

ข้อ 1.6 · ตัดสินค่าความจริงโดยไม่เดาข้อมูลที่ขาด

(1) ถ้าวันนี้เป็นวันอังคาร แล้วฝนตก โจทย์ไม่ได้บอกวันและสภาพอากาศ จึงระบุ T/F ค่าเดียวไม่ได้ ให้ตอบตามกรณี

① วันอังคาร?	② ฝนตก?	③ ถ้า...แล้ว...
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

(2) 7<10 ก็ต่อเมื่อ (4<2 และ 6 ไม่น้อยกว่า 6) ซ้ายจริง ขวาเป็น F∧T=F จากนั้น T↔F เป็นเท็จ

① ส่วนที่คำนวณ	② ค่า	③ ผล
7<10	จริง	T
4<2	เท็จ	F
6≥6	จริง	T
วงเล็บ	F∧T	F
ก็ต่อเมื่อ	T↔F	F

(3) ผู้เรียนชอบวิชานี้ และ 1+1=2 ส่วนเลขเป็นจริง แต่โจทย์ไม่ได้บอกว่าผู้เรียนชอบวิชานี้หรือไม่ ดังนั้นผลเท่ากับข้อความ “ผู้เรียนชอบวิชานี้” และยังฟันธง T/F ไม่ได้

① ชอบวิชา?	② 1+1=2	③ ผลของ และ
T	T	T
F	T	F

เช็กกลับ: การไม่ทราบค่าไม่แปลว่าเท็จ ต้องแยก “ข้อมูลไม่พอ” ออกจาก F

ข้อ 1.7 · พิสูจน์สมมูลสองวิธี

ต้องแสดง $(p \land q) \to \neg r \equiv \neg p \lor \neg q \lor \neg r$

วิธีตาราง: แยกวงเล็บก่อน คอลัมน์ L คือซ้ายของ ≡ และ R คือขวา ตรวจ L กับ R ทุกแถว

p	q	r	p∧q	¬r	L	R
T	T	T	T	F	F	F
T	T	F	T	T	T	T
T	F	T	F	F	T	T
T	F	F	F	T	T	T
F	T	T	F	F	T	T
F	T	F	F	T	T	T
F	F	T	F	F	T	T
F	F	F	F	T	T	T

ผล: L และ R เท่ากันครบแปดแถว จึงสมมูล

วิธีกฎ บรรทัด 1 · เปลี่ยน A→B เป็น ¬A∨B $(p \land q) \to \neg r \to \neg(p \land q) \lor \neg r$

① เงื่อนไข/ขั้น	② ค่าหรือข้อความ	③ ได้อะไร
① ก่อน	(p∧ q)→¬ r	ตั้งต้น
② กฎ	1	เปลี่ยนก้อนที่ระบุ
③ หลัง	¬(p∧ q)∨¬ r	ค่าเดิมทุกแถว

วิธีกฎ บรรทัด 2 · กระจายปฏิเสธด้วย De Morgan $\neg(p \wedge q) \vee \neg r \rightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee \neg r$

① เงื่อนไข/ขั้น	② ค่าหรือข้อความ	③ ได้อะไร
① ก่อน	¬(p∧ q)∨¬ r	ตั้งต้น
② กฎ	2	เปลี่ยนก้อนที่ระบุ
③ หลัง	(¬ p∨¬ q)∨¬ r	ค่าเดิมทุกแถว

วิธีกฎ บรรทัด 3 · ถอดวงเล็บด้วยการเปลี่ยนหมู่ของ ∨ $(\neg p \vee \neg q) \vee \neg r \rightarrow \neg p \vee \neg q \vee \neg r$

① เงื่อนไข/ขั้น	② ค่าหรือข้อความ	③ ได้อะไร
① ก่อน	(¬ p∨¬ q)∨¬ r	ตั้งต้น
② กฎ	3	เปลี่ยนก้อนที่ระบุ
③ หลัง	¬ p∨¬ q∨¬ r	ค่าเดิมทุกแถว

เช็กกลับ: ถ้า p=q=r=T ทั้งสองฝั่งเท็จ กรณีอื่นมีอย่างน้อยหนึ่งตัวเท็จ ทำให้ปฏิเสธตัวนั้นเป็นจริงทั้งสองฝั่ง

ข้อ 1.8 · ตัดลูกศรให้เหลือ ¬, ∧, ∨

ตั้งต้น $(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow \neg(\neg Q \wedge R)$

① ครอบต้นลูกศรทั้งก้อน ใช้ A→B≡¬A∨B โดย A=(¬P∨¬Q) และ B=¬(¬Q∧R)

① เงื่อนไข/ขั้น	② ค่าหรือข้อความ	③ ได้อะไร
ต้นลูกศร	¬P∨¬Q	ทั้งก้อน A
ปลายลูกศร	¬(¬Q∧R)	ทั้งก้อน B
② เปลี่ยน	¬A∨B	ไม่มีลูกศรแล้ว

ตอบได้ทันที: $\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee \neg(\neg Q \wedge R)$ เพราะเหลือเฉพาะเครื่องหมายที่โจทย์อนุญาต

③ ถ้าต้องการย่ออีก De Morgan สองก้อนและปฏิเสธซ้อน ให้ $(P \wedge Q) \vee (Q \vee \neg R)$ แล้วใช้ absorption ได้ $Q \vee \neg R$

P	Q	R	ก่อน	หลัง
T	T	T	T	T
T	T	F	T	T
T	F	T	F	F
T	F	F	T	T
F	T	T	T	T
F	T	F	T	T
F	F	T	F	F
F	F	F	T	T

เช็กกลับ: โจทย์ไม่ได้บังคับให้สั้นที่สุด รูปที่ตัดลูกศรในขั้นแรกก็เป็นคำตอบถูก ห้ามปฏิเสธแค่ P ตัวเดียวแทนการปฏิเสธต้นลูกศรทั้งก้อน

In-Class Week 2

ข้อ 2.1 · แทน x แล้วจึงตัดสินจริงเท็จ

P(x): “x หารด้วย 4 ลงตัว” และ D={2,4,6,8,10}

(i) เป็น propositional function หรือไม่ เป็น เพราะแทนสมาชิก D แต่ละตัวแล้วได้ประโยคที่มีค่าความจริงแน่นอน ดังตาราง

① x	② หาร 4 เหลือเศษ	③ P(x)
2	2	F
4	0	T
6	2	F
8	0	T
10	2	F

(ii) P(6) 6=4×1+2 เหลือเศษ 2 จึงเป็น F

① 6 ชิ้น → ② จัดกลุ่มละ 4 → ③ เหลือ 2

1 | 2 | 3 | 4 | เศษ 2

(iii) เลือกทุก x ที่ผ่าน 4=4×1 และ 8=4×2 ลงตัวทั้งคู่ ได้ {4,8}

① ไล่ D → ② เศษศูนย์ → ③ เก็บ

4 | 8

เช็กกลับ: ลอง 2,6,10 แล้วเหลือเศษ 2 หมด จึงไม่มีสมาชิกอื่นที่ตกหล่น

ข้อ 2.2 · ทุกจำนวนเต็มกับมีบางจำนวนเต็ม

(i) $\forall x\ (x^2 > 0)$ · **F** เลือก x=0 ซึ่งเป็นจำนวนเต็ม จะได้ 0>0 เท็จ

① เงื่อนไข/ขั้น	② ค่าหรือข้อความ	③ ได้อะไร
① กรณีค้าน	x=0	จำนวนเต็ม
② ยกกำลัง	$0^2=0$	เท่าศูนย์
③ ตรวจ >	0>0	F

(ii) $\exists x\ (x^2 = -1)$ · **F** กำลังสองจำนวนเต็มไม่ติดลบ จึงไม่มี x ที่ให้ −1

① เงื่อนไข/ขั้น	② ค่าหรือข้อความ	③ ได้อะไร
① x≥0	$x^2\geq 0$	ไม่ติดลบ
② x<0	x·x เป็นบวก	ไม่ติดลบ
③ เทียบ −1	$x^2\neq -1$	หาไม่ได้

(iii) $\forall x\ (x > 2 \to x^2 > 4)$ · **T** ถ้า x≤2 ต้นลูกศรเท็จ ถ้า x>2 จะมี x−2>0 และ x+2>0 จึง $x^2-4=(x-2)(x+2)>0$

① เงื่อนไข/ขั้น	② ค่าหรือข้อความ	③ ได้อะไร
① x≤2	ต้น F	ลูกศร T
② x>2	(x−2)(x+2)>0	$x^2-4>0$
③ ย้ายข้าง	$x^2>4$	ปลาย T

(iv) $\exists x\ (x^2+4x+4=0)$ · **T** แยกตัวประกอบเป็น (x+2)²=0 เลือก x=−2 ได้ 4−8+4=0

① เงื่อนไข/ขั้น	② ค่าหรือข้อความ	③ ได้อะไร
① แยกตัวประกอบ	(x+2)²=0	x+2=0
② เลือก	x=−2	จำนวนเต็ม
③ แทนกลับ	4−8+4=0	T

เช็กกลับ: ข้อ ∀ ที่จริงต้องมีเหตุผลครอบคลุมทั้งหมด ข้อ ∃ ที่เท็จต้องอธิบายว่าไม่มีค่าใดผ่าน ไม่ใช่ลองแค่สองค่า

ข้อ 2.3 · ปฏิเสธทั้งประโยค

(i) ตั้งต้น $\forall x\in\mathbb{R},\ x^2+1>0$ สลับ ∀ เป็น ∃ และปฏิเสธ > เป็น ≤

① เงื่อนไข/ขั้น	② ค่าหรือข้อความ	③ ได้อะไร
① ตัวบ่งปริมาณ	∀ → ∃	สลับ
② ส่วนข้างใน	> → ≤	ปฏิเสธ
③ ทั้งประโยค	มีกรณีที่ไม่ผ่าน	อ่านตาม ∃

ตอบ: $\exists x\in\mathbb{R},\ x^2+1\le 0$

(ii) ตั้งต้น $\exists x\in\mathbb{Z},\ (E(x)\wedge P(x))$ E(x)=x เป็นจำนวนคู่; P(x)=x เป็นจำนวนเฉพาะ เปลี่ยน “มีทั้งคู่” เป็น “ทุกตัวไม่คู่หรือไม่เฉพาะ”

① เงื่อนไข/ขั้น	② ค่าหรือข้อความ	③ ได้อะไร
① ∃x∈ℤ	สลับเป็น ∀x∈ℤ	คง x ทุกตัว
② ∀x∈ℤ	x คี่ → ¬E(x)	พลาดเงื่อนไขคู่
③ ∀x∈ℤ	x คู่ไม่เฉพาะ → ¬P(x)	พลาดเงื่อนไขเฉพาะ
④ ∀x∈ℤ	¬E(x) ∨ ¬P(x)	ทุก x พลาดอย่างน้อยหนึ่งเงื่อนไข

ตอบ: $\forall x \in \mathbb{Z},\ (\neg E(x) \vee \neg P(x))$

(iii) ตั้งต้น นักเรียนทุกคนในชั้นสอบผ่าน ปฏิเสธ “ทุกคนผ่าน” ด้วยการมีคนไม่ผ่าน ไม่ใช่บอกว่าไม่มีใครผ่าน

① เงื่อนไข/ขั้น	② ค่าหรือข้อความ	③ ได้อะไร
① ตัวบ่งปริมาณ	∀ → ∃	สลับ
② ส่วนข้างใน	ผ่าน → ไม่ผ่าน	ปฏิเสธ
③ ทั้งประโยค	มีกรณีที่ไม่ผ่าน	อ่านตาม ∃

ตอบ: มีนักเรียนในชั้นอย่างน้อยหนึ่งคนสอบไม่ผ่าน

เช็กกลับ: ในข้อ (ii) ใช้คำว่า “หรือ” แบบรวมได้ทุกกรณี จำนวนคี่ทุกตัวผ่าน ¬E แม้บางตัวจะเป็นจำนวนเฉพาะ

ข้อ 2.4 · ลำดับการเลือก x กับ y

(i) $\forall x \exists y,\ x + y = 0$ · **T** รับ x ใดก็ได้ แล้วเลือก y=−x ได้ x+(−x)=0

① เงื่อนไข/ขั้น	② ค่าหรือข้อความ	③ ได้อะไร
① รับ x	ค่าใดก็ได้	รู้ x ก่อน
② เลือก y	−x	เปลี่ยนตาม x ได้
③ ตรวจ	x+(−x)=0	T

① x ตัวอย่าง	② เลือก y=−x	③ x+y
-2	2	0
0	0	0
3	-3	0

(ii) $\exists x \forall y,\ x + y = y$ · **T** เลือก x=0 คงไว้ไม่ว่า y เท่าไร 0+y=y

① เงื่อนไข/ขั้น	② ค่าหรือข้อความ	③ ได้อะไร
① เลือก x	0	คงค่าเดิม
② ทุก y	ค่าใดก็ได้	ไม่ต้องเลือกพิเศษ
③ ตรวจ	0+y=y	T

① x คงเดิม	② y เปลี่ยน	③ x+y=y
0	-2	T
0	0	T
0	3	T

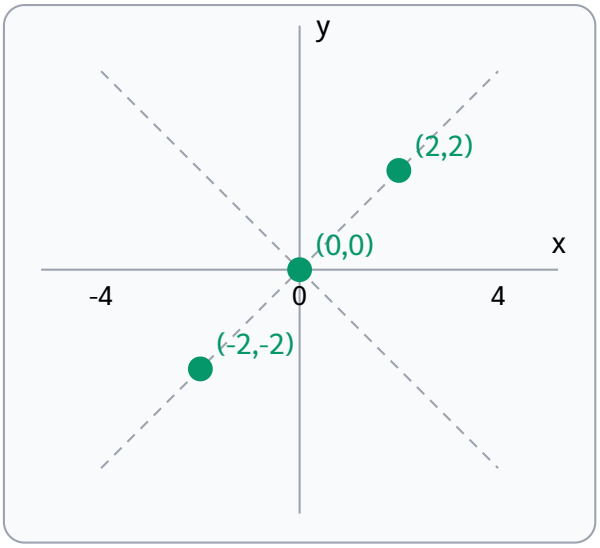
(iii) $\exists x \forall y,\ x + y = x$ · **F** ไม่ว่าเสนอ x ใด คู่แข่งเลือก y=1 จะได้ x+1≠x เสมอ จึงไม่มี x ที่ผ่านทุก y

① เงื่อนไข/ขั้น	② ค่าหรือข้อความ	③ ได้อะไร
① เสนอ x	ค่าใดก็ตาม	คง x
② เลือก y ค้าน	1	เลือกได้ใน $\mathbb{R}$
③ ตรวจ	x+1≠x	F

① x ตัวอย่าง	② y=1	③ x+y≠x
-2	1	T
0	1	T
3	1	T

(iv) $\forall x \exists y,\ (x^2 < y^2 \to x < y)$ • **T** รับ x ใดก็ได้ แล้วเลือก y=x ต้นลูกศร x^2

① เงื่อนไข/ขั้น	② ค่าหรือข้อความ	③ ได้อะไร
① รับ x	ค่าใดก็ได้	คง x
② เลือก y	y=x	$x^2<x^2$ เป็น F
③ ลูกศร	F→F	T



① เส้นประ: y=x และ y=−x

② ตรวจ x<y ก่อน

③ แล้วเทียบ x^2 กับ y^2

จุดเป็นตัวอย่างของคู่ (x,y)
คำพิสูจน์ทุกค่าอ่านทีละขั้นด้านบน

เช็กกลับ: ตารางคู่ตัวอย่างช่วยให้เห็นการเลือก แต่คำพิสูจน์ทั่วไปคือสมการและการแบ่งกรณีด้านบน ข้อ (iv) เป็นลูกศร ไม่ใช่การบังคับ x^2

ภาคผนวก ข — เฉลย In-Class Week 3–4

ใช้วิธีจากบทที่ 3 ทุกบรรทัดด้านล่างแยกสิ่งที่โจทย์ให้ สิ่งที่สมมติ และสิ่งที่ต้องแสดง โดยไม่รับเป้าหมายเข้ามาเป็นเหตุเสียก่อน

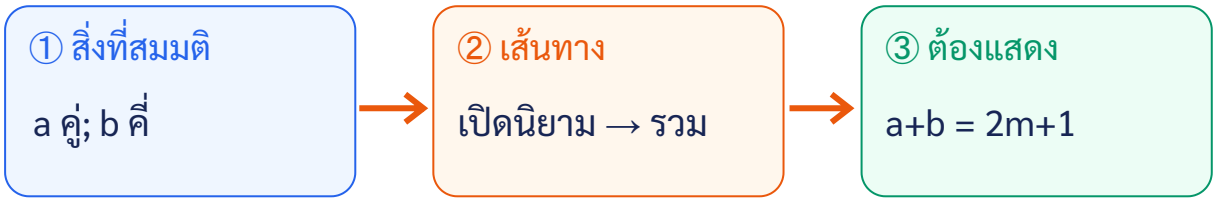


ทุกเฉลยเริ่มซ้าย เดินทีละบรรทัด และหยุดเมื่อสูตรปัจจุบันตรงกรอบเส้นประ

Week 3 · ข้อ 2.1 จำนวนคู่บวกจำนวนคี่

โจทย์: พิสูจน์ด้วยวิธีตรงว่า ผลบวกของจำนวนเต็มคู่กับจำนวนเต็มคี่เป็นจำนวนเต็มคี่ วิธีอยู่ที่ บทที่ 3 §3.2–3.3

เช่น 4+7=11 คู่เดิมไม่เหลือเศษ แต่กลุ่มคี่เหลือหนึ่งลูก เมื่อรวมกันยังเหลือหนึ่งลูก เราต้องเขียนเหตุผลนี้สำหรับสองจำนวนใด ๆ



บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. รับข้อมูล	ให้ a เป็นจำนวนเต็มคู่ และ b เป็นจำนวนเต็มคี่ใด ๆ
2. แทนจำนวนคู่	a=2r สำหรับจำนวนเต็ม r
3. แทนจำนวนคี่	b=2s+1 สำหรับจำนวนเต็ม s
4. เริ่มสิ่งที่จะพิสูจน์	a+b=2r+(2s+1)
5. ถอดวงเล็บ	=2r+2s+1
6. ดึงตัวประกอบ	=2(r+s)+1
7. ตรวจนิยาม	r+s เป็นจำนวนเต็ม จึง a+b เป็นจำนวนคี่
8. เช็กกลับ	4=2(2),7=2(3)+1 ให้ 4+7=2(2+3)+1=11 สอดคล้อง แต่เหตุผลทั่วไปคือ r,s ที่เลือกได้อิสระ



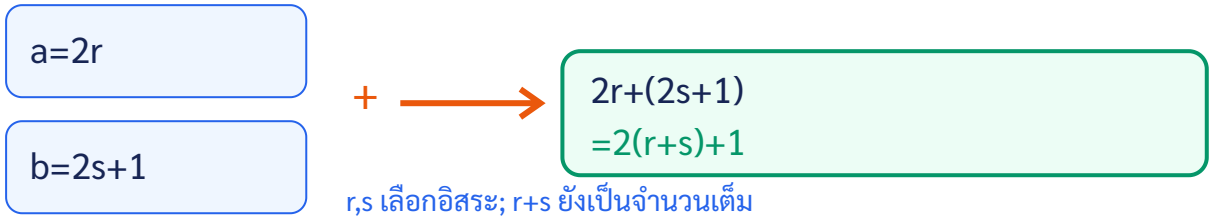
③ จำนวนคู่ทั้งหมด r+s คู่ และเหลือ 1

เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

ใช้ a=2k และ b=2k+1 ด้วย k ตัวเดียว จะบังคับให้ b=a+1 ทั้งที่โจทย์ไม่ได้บอก เช่น a=4,b=7 ไม่เข้าเงื่อนไขนั้น ต้องใช้ r,s คนละตัว

เช็กลิสต์ก่อนหยุด

ได้รูป 2(จำนวนเต็ม)+1 และไม่ได้บังคับสองจำนวนให้สัมพันธ์กันเกินโจทย์ จึงจบวิธีตรง



Week 3 · ข้อ 2.2(a)–(b) แย้งสลับที่ของ 5n+3

โจทย์: ให้ n เป็นจำนวนเต็ม ถ้า 5n+3 เป็นคู่ แล้ว n เป็นคี่ (a) เขียนข้อความแย้งสลับที่ (b) ใช้ข้อความนั้นพิสูจน์โจทย์เดิม วิธีอยู่ที่ บทที่ 3 §3.7

(a) คำตอบ: ถ้า n เป็นคู่ แล้ว 5n+3 เป็นคี่ เพราะ “ไม่คี่” คือคู่ และ “ไม่คู่” คือคี่ในโดเมนจำนวนเต็ม

① เดิม: (5n+3 คู่) → (n คี่)

↓ ปฏิเสธ + สลับ

② ใหม่: (n คู่) → (5n+3 คี่)

③ เริ่ม n=2k; ต้องไปถึง 2m+1

(b) พิสูจน์: เราเริ่มจาก ¬q คือ n คู่ ไม่สมมติ 5n+3 คู่เพิ่ม เพราะข้อนี้ใช้แย้งสลับที่

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. ASSUME	ให้ n เป็นคู่ เขียน n=2k โดย k เป็นจำนวนเต็ม
2. PROVE	ต้องแสดง 5n+3 เป็นคี่
3. แทน n	5n+3=5(2k)+3
4. คูณ	=10k+3
5. เปิด 3 เพื่อเหลือ 1	=10k+2+1
6. ดึง 2	=2(5k+1)+1
7. ตรวจจำนวนเต็ม	5k+1 เป็นจำนวนเต็ม จึง 5n+3 คี่
8. กลับข้อความเดิม	พิสูจน์ ¬q→¬p แล้ว จึง p→q จริง
9. เช็กกลับ	ถ้า n=2 จะได้ 5n+3=13 คี่ ตรวจเส้นทางแย้งสลับที่ได้; ถ้า n=3 ได้ 18 คู่และ n คี่ตามข้อความเดิม

① n=2k → 5n+3=10k+3

↓

② 10k+3 = 10k+2+1

↓

③ 2(5k+1)+1 → คี่

เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

เขียน “ถ้า n คี่ แล้ว 5n+3 คู่” เป็นบทกลับ ไม่ใช่ข้อความแย้งสลับที่ แม้ข้อนี้บทกลับจะจริงด้วย แต่จะยังไม่ตอบวิธีที่โจทย์สั่ง

เช็กลิสต์ก่อนหยุด

ปฏิเสธครบทั้ง p,q สลับทิศ แล้วเริ่มจาก n คู่และจบ 5n+3 คี่ พร้อมอ้างสมมูลกลับ

เดิม: [5n+3 คู่] ——————→ [n คี่]

แย้งสลับที่: [n คู่] ————→ [5n+3 คี่] ✓ เส้นทางที่ใช้

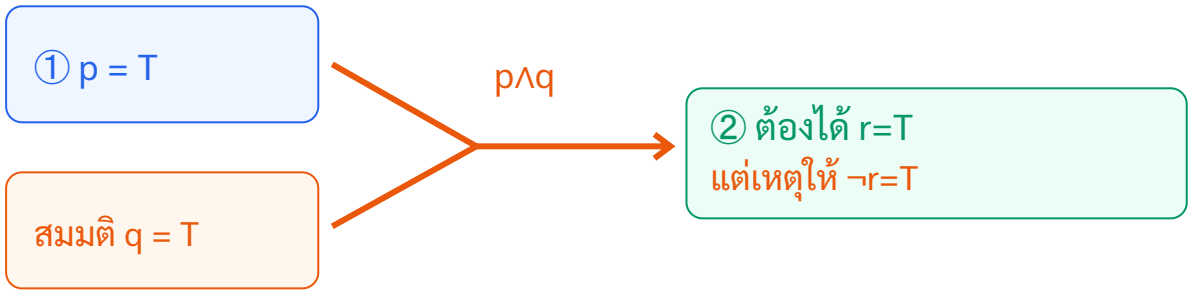
บทกลับ: [n คี่] ——————→ [5n+3 คู่] ✗ ไม่ใช่ทางที่โจทย์สั่ง

Week 3 · ข้อ 2.3(a)–(b) ระบบที่เข้าใช้งานไม่ได้

กำหนด p: เซิร์ฟเวอร์ทำงาน, q: ฐานข้อมูลออนไลน์, r: ผู้ใช้เข้าระบบได้ โจทย์ให้ “ถ้าเซิร์ฟเวอร์ทำงานและฐานข้อมูลออนไลน์ ผู้ใช้เข้าระบบได้”, “ผู้ใช้เข้าระบบไม่ได้”, “เซิร์ฟเวอร์ทำงาน” แล้วสรุป “ฐานข้อมูลไม่ออนไลน์”

(a) แปลเป็นสัญลักษณ์: เหตุคือ (p∧q)→r, ¬r, p ข้อสรุปคือ ¬q เขียนเป็น $(p \wedge q) \rightarrow r,\ \neg r,\ p\ \therefore \neg q$

(b) สมเหตุสมผล (valid) วิธีตรวจอยู่ที่ บทที่ 3 §3.13 ถ้าข้อสรุป ¬q เท็จจะมี q จริง เมื่อรวมกับ p จริงจะบังคับ r จริง ซึ่งชนเหตุ ¬r



③ q=T อยู่ไม่ได้ → q=F → ¬q=T

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. รับเหตุแรก	(p∧q)→r จริง
2. รับอีกสองเหตุ	¬r จริง และ p จริง จึง r=F,p=T
3. แทน p ในส่วนหน้า	p∧q=T∧q=q
4. อ่านเหตุแรกหลังแทน	q→F ต้องเป็นจริง
5. ตัดกรณีผิด	ถ้า q=T จะได้ T→F ซึ่งเท็จ จึง q เป็น T ไม่ได้
6. สรุป	q=F จึง ¬q=T
7. เช็กกลับ	ค่าที่เหตุทั้งหมดจริงมีเพียง p=T,q=F,r=F และทำให้ ¬q=T จึงไม่มีแถวเหตุจริงแต่ผลเท็จ

① (p∧q)→r; p=T; r=F

↓

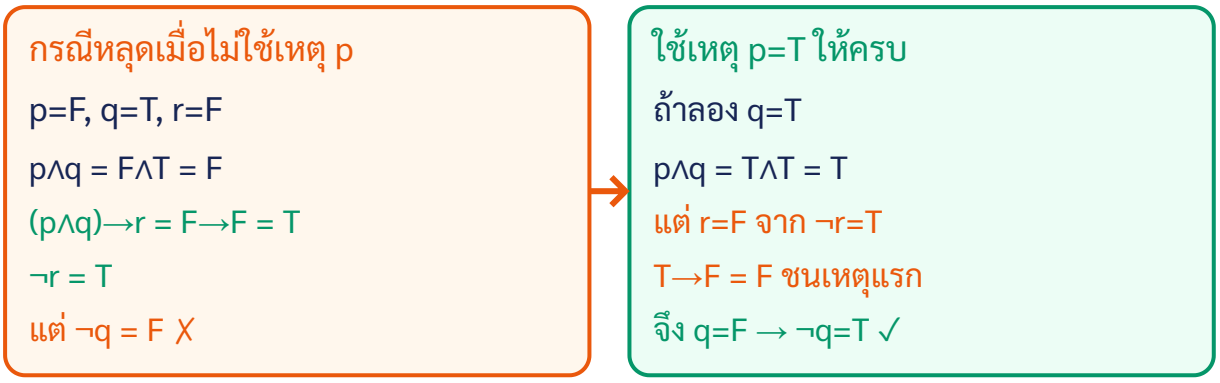
② (T∧q)→F ≡ q→F

↓

③ q=F → ¬q=T

เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

จาก ¬r เพียงข้อเดียวสรุป ¬q ไม่ได้ เพราะระบบอาจเข้าไม่ได้จาก p เท็จด้วย เราต้องใช้เหตุ p จริงเพื่อตัดทางนั้นออก



แถวซ้ายทำให้เหตุสองข้อจริงและข้อสรุปเท็จ; เหตุ p=T ทางขวาคือตัวที่ปิดแถวหลุด

เช็กลิสต์ก่อนหยุด

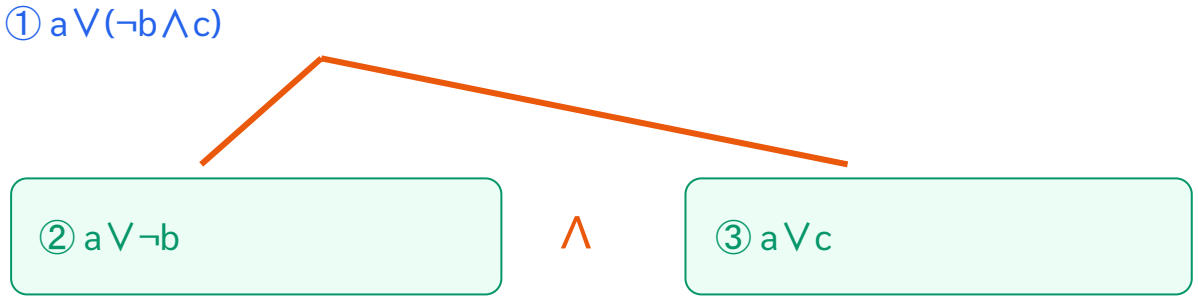
แปล “และ” ให้อยู่ในส่วนหน้าของลูกศร ใช้เหตุครบทั้งสาม และยืนยันว่าเมื่อเหตุจริง ข้อสรุปไม่มีทางเท็จ

Week 4 · ข้อ 4.1(a)–(b) เปิดวงเล็บให้เป็นคลอส

โจทย์: เหตุ (i) a∨(¬b∧c), (ii) ¬c∨d, (iii) ¬a ข้อสรุป d วิธีอยู่ที่ บทที่ 3 §3.17

(a) เปลี่ยนเหตุ (i) เป็น “และของคลอส” ต้องแจกแจง a ไปอยู่กับทั้ง ¬b และ c

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. เริ่มเหตุ (i)	a∨(¬b∧c)
2. ใช้การแจกแจง	a∨(X∧Y) ≡ (a∨X)∧(a∨Y)
3. แทน X=¬b,Y=c	a∨(¬b∧c) ≡ (a∨¬b)∧(a∨c)
4. เช็กกลับ	ถ้า a เท็จ ต้องมีทั้ง ¬b และ c จริงทั้งก่อนและหลัง ถ้า a จริง ทั้งสองรูปจริงทันที



(b) แยกส่วนที่เชื่อมด้วย ∧ เป็นเหตุคนละบรรทัด แล้วเก็บเหตุ (ii),(iii) ไว้ครบ

เลขคลอส	ข้อความ	ที่มา
(1)	a∨¬b	ส่วนแรกของเหตุ (i)
(2)	a∨c	ส่วนที่สองของเหตุ (i)
(3)	¬c∨d	เหตุ (ii)
(4)	¬a	เหตุ (iii), คลอสตัวเดียว

① ก่อน: [a∨(¬b∧c)] ∧ [¬c∨d] ∧ [¬a]

↓

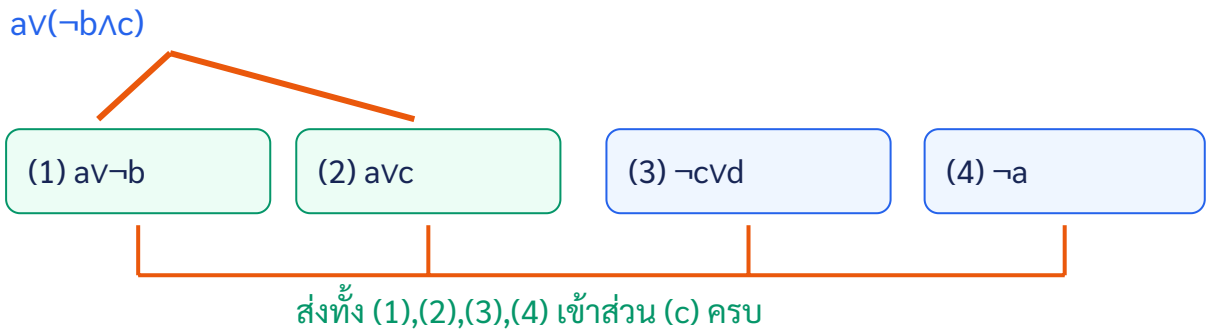
② หลัง: [a∨¬b] ∧ [a∨c] ∧ [¬c∨d] ∧ [¬a]

เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

แยก a∨c เป็นสองเหตุ a กับ c ไม่ได้ เพราะ “หรือ” ขอเพียงอย่างน้อยหนึ่งตัวจริง เราแยกเหตุได้ตรง “และ” เท่านั้น

เช็กลิสต์ก่อนหยุด

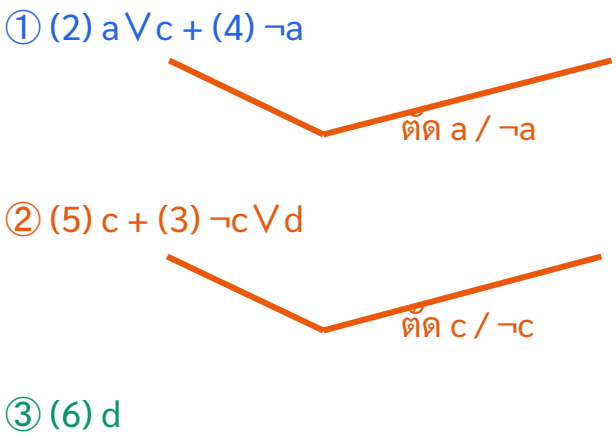
ได้คลอส (1)–(4) ครบ แต่ละคลอสมีเฉพาะตัวอักษร/ปฏิเสธตัวอักษรเชื่อมด้วย ∨ ก่อนเข้าส่วน (c)



Week 4 · ข้อ 4.1(c) เดินเรโซลูชันให้ถึง d

ตอนนี้ของที่ใช้ได้คือ (1) a∨¬b, (2) a∨c, (3) ¬c∨d, (4) ¬a เป้าหมายคือ d เราเลือกทางผ่าน c เพราะ c ต่อกับ ¬c∨d ได้ตรง ๆ

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. เลือกคลอสแรก	(2) a∨c กับ (4) ¬a
2. วงคู่ตรงข้าม	a กับ ¬a เป็นตัวอักษรเดียวกันคนละเครื่องหมาย
3. ทำเรโซลูชันครั้งที่ 1	ลบคู่ดังกล่าวแล้วได้ (5) c
4. เลือกคลอสถัดไป	(5) c กับ (3) ¬c∨d
5. วงคู่ตรงข้าม	c กับ ¬c
6. ทำเรโซลูชันครั้งที่ 2	ได้ (6) d
7. เช็กกลับ	(6) ตรงข้อสรุป ดังนั้น argument valid; คลอส (1) ไม่จำเป็นต่อเส้นทางนี้ แต่ยังอยู่ในรายการเหตุ



เช็กด้วยค่าความจริงอีกทาง: ¬a จริงทำให้ a=F เหตุ (i) จึงบังคับ ¬b=T และ c=T จาก c=T เหตุ ¬c∨d จะจริงได้ก็ต่อเมื่อ d=T จึงได้ข้อสรุปแน่นอน

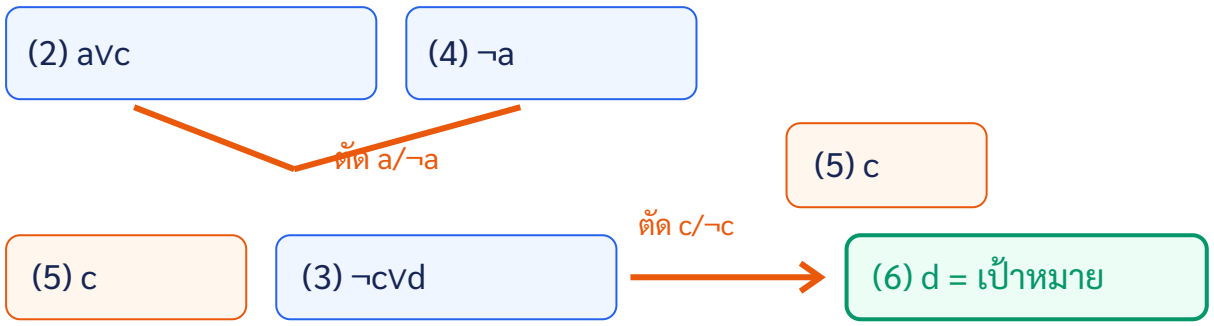


เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

ถ้าใช้ (1),(4) ก่อนจะได้ ¬b ซึ่งถูกแต่ยังไม่ถึง d การเดินถูกหนึ่งก้าวยังไม่ใช่ข้อพิสูจน์จบ ต้องหา c ด้วย (2),(4) แล้วไป d

เช็กลิสต์ก่อนหยุด

ทุกก้าวบอกเลขคลอสต้นทาง คู่ที่ตัด และเลขคลอสผลลัพธ์ จบเมื่อได้ d ไม่ใช่เมื่อได้ข้อความจริงอะไรก็ได้

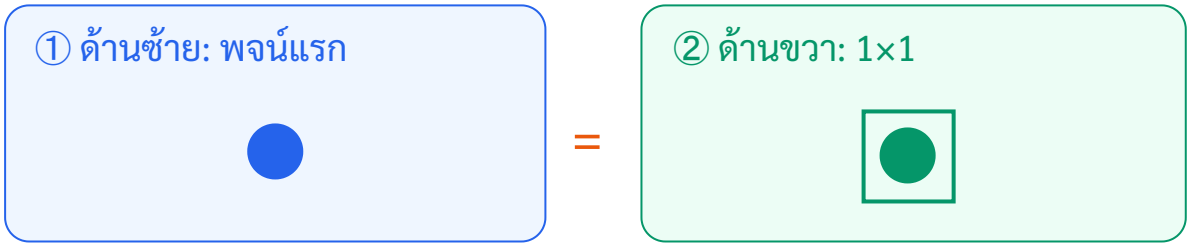


Week 4 · ข้อ 4.2(a) ฐานของผลบวกจำนวนคี่

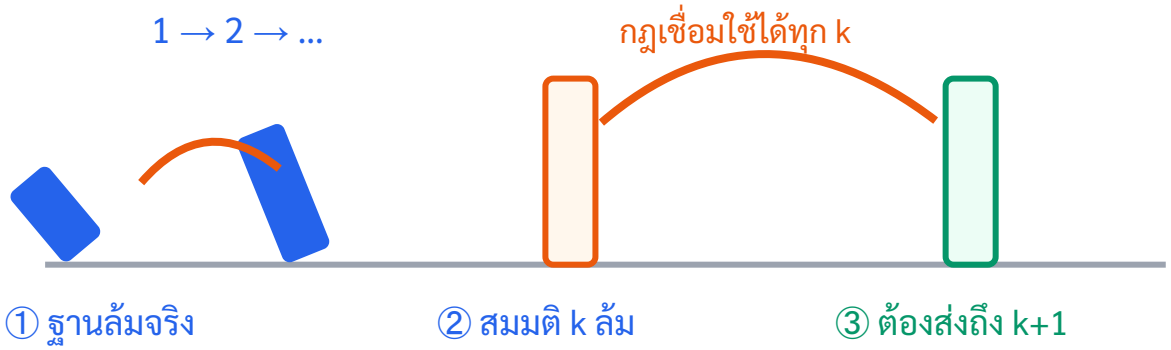
โจทย์: ใช้อุปนัยพิสูจน์ $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ สำหรับจำนวนเต็ม n≥1 (a) แสดง S(1) จริง (b) ระบุ IH ระบุสิ่งที่ต้องพิสูจน์ แล้วทำขั้นอุปนัยให้ครบ วิธีอยู่ที่ บทที่ 3 §3.19

สูตรเริ่มที่หนึ่งพจน์ จึงตรวจ n=1 ไม่ใช่นับว่าต้องมี 1+3+5 ปรากฏครบก่อน จุดสามจุดในโจทย์หมายถึงแถวที่หยุดตามค่า n

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. ตั้ง S(n)	S(n): ผลบวก n จำนวนคี่แรกเท่ากับ n^2
2. แทน n=1 ในพจน์สุดท้าย	2(1)−1=1 จึงด้านซ้ายมีเพียง 1
3. คำนวณด้านขวา	$1^2=1$
4. เปรียบเทียบ	ซ้าย=1=ขวา จึง S(1) จริง
5. เช็กกลับ	ฐานตรงกับขอบเขต n≥1 และยังไม่ได้ใช้ IH ในขั้นนี้



③ $1 = 1^2$ → ฐาน S(1) ผ่าน

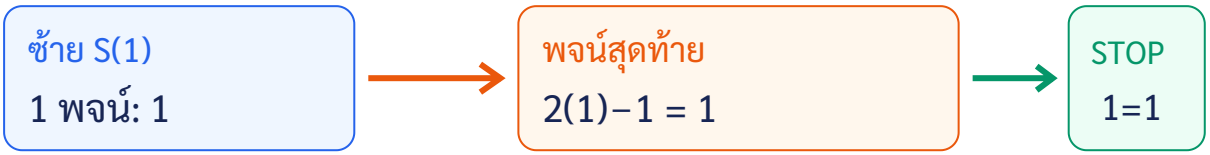


เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

เขียนฐานเป็น $1+3+5=1^2$ จะผิด เพราะด้านซ้ายมีสามพจน์แต่ด้านขวาแทน n=1 ต้องแทน n ให้ตรงทุกตำแหน่งและหยุดผลบวกที่ 2n−1

เช็กลิสต์ก่อนหยุด

ตอบส่วน (a) ด้วยการคำนวณทั้งสองข้าง ไม่ใช่เขียน “obvious” แล้วข้าม ตอนนี้เราได้ตัวเริ่มแล้ว แต่ยังต้องสร้างสะพานในส่วน (b)



ฐานไม่มีพจน์ 3 หรือ 5 เพราะ n=1 ทำให้แถวหยุดที่พจน์แรกทันที

Week 4 · ข้อ 4.2(b) ตั้ง IH และเป้าหมายคนละกรอบ

ถ้ารู้ว่า 1+3+5=9 การจะต่ออีกหนึ่งพจน์ต้องเติม 7 ไม่ใช่ 4 เพราะลำดับที่บวกเป็นจำนวนคี่ เมื่อเปลี่ยนจุดเก่าจาก 3 เป็น k เราต้องหาพจน์ถัดไปจากกฎ 2n−1

IH / สิทธิ์: $[1+3+\cdots+(2k-1)] = k^2$

CURRENT เริ่มจากซ้ายของเป้าหมาย

$[1+3+\cdots+(2k-1)]$ $+(2k+1)$ คงไว้

TARGET ยังปิด

$1+3+\cdots+(2k-1)+(2k+1) = (k+1)^2$

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. เลือก k ใด ๆ	ให้ k เป็นจำนวนเต็มคงที่ใด ๆ ที่ $k \geq 1$
2. ASSUME / IH	สมมติ S(k): $1+3+\cdots+(2k-1)=k^2$
3. แทน n=k+1 ในพจน์สุดท้าย	$2(k+1)-1=2k+2-1=2k+1$
4. แทน n=k+1 ในขวา	n^2 กลายเป็น $(k+1)^2$
5. PROVE	ต้องแสดง $1+3+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2$
6. ตรวจสิทธิ์	ใช้สมการ IH ถึง 2k−1 ได้ แต่สมการเป้าหมายยังใช้เป็นเหตุไม่ได้

① ASSUME / IH: ของเก่าที่ให้ยืม

$1+3+\cdots+(2k-1) = k^2$

↓ ② ใช้เหตุผล

③ PROVE: เป้าหมาย ยังใช้เป็นเหตุไม่ได้

$1+3+\cdots+(2k-1)+(2k+1) = (k+1)^2$

① พจน์เก่า: $2k-1$

↓ แทนตำแหน่ง $k \to k+1$

② พจน์ใหม่: $2(k+1)-1$

③ ยุบ: $2k+2-1 = 2k+1$

เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

สมมติว่า $1+3+\cdots+(2k+1)=(k+1)^2$ แล้วสรุปว่าจริง คือเอาเป้าหมายมาเป็น IH ผิดหนึ่งพจน์ เรายืมได้แค่ผลรวมถึง $2k-1$ ส่วน $2k+1$ ต้องคำนวณเพิ่มเอง

เช็กลิสต์ก่อนหยุด

เขียนคำว่า Assume กับ Prove คนละบรรทัด อ่านพจน์ท้ายต่างกันหนึ่งลำดับ และตรวจว่า k ตัวเดิมใช้ตลอดงาน

Week 4 · ข้อ 4.2(b) ใช้ IH เพียงก้อนเก่าแล้วปิดอุปนัย

เริ่มจากด้านซ้ายของเป้าหมาย แยกพจน์สุดท้าย 2k+1 เป็นของใหม่ แล้วแทนก้อนเก่าด้วย k^2 ตาม IH เส้นกรอบฟ้าในภาพคือขอบเขตที่ IH อนุญาต

IH: $[1+3+\cdots+(2k-1)] = k^2$

CURRENT

$[1+3+\cdots+(2k-1)]$ $+(2k+1)$

$= k^2$ $+(2k+1)$

$= k^2+2k+1 = (k+1)^2$ พจน์ใหม่ไม่เคยหาย

TARGET ถึงแล้ว: $(k+1)^2$

① ก่อน: แยกก้อนเก่าออกจากพจน์ใหม่

$1+3+\cdots+(2k-1)$ $+ (2k+1)$

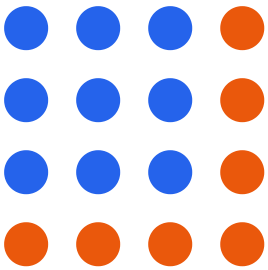
IH แทนเฉพาะก้อนฟ้า

k^2 $+ (2k+1)$

③ หลัง: พจน์ใหม่ยังอยู่ครบ ไม่ได้ถูก IH กินไป

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. เริ่ม LHS ใหม่	$1+3+\cdots+(2k-1)+(2k+1)$
2. วงก้อนเก่า	$=[1+3+\cdots+(2k-1)]+(2k+1)$
3. ใช้ IH ในวงเล็บ	$=k^2+(2k+1)$
4. ถอดวงเล็บ	$=k^2+2k+1$
5. แยก 2k เพื่อเห็นผลคูณ	$=k^2+k+k+1$
6. จัดกลุ่ม	$=k(k+1)+1(k+1)$
7. ดึงตัวร่วม	$= (k+1)(k+1)$
8. เขียนเป็นกำลังสอง	$= (k+1)^2$ ตรงเป้าหมาย S(k+1)

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
9. ปิดอุปนัย	S(1) จริงจาก (a) และ S(k)→S(k+1) สำหรับทุก k≥1 จึง S(n) จริงทุกจำนวนเต็ม n≥1
10. เช็กกลับ	n=4: 1+3+5+7=16=4² การแทนค่านี้ยืนยันตัวอย่าง ไม่แทนข้อพิสูจน์ทุก n



① k=3: ก้อนเก่า 9 จุด

② เติม 2k+1=7 จุด

③ ได้ (k+1)²=16 จุด

ทั่วไป: $k^2 + k + k + 1 = (k+1)^2$

เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

IH ไม่ได้บอกว่า $k^2+2k+1=(k+1)^2$ สมการช่วงท้ายมาจากพีชคณิต ส่วน IH ถูกใช้ตรงแทนผลบวกเก่าด้วย k^2 เท่านั้น การติดป้ายเหตุผลให้ตรงช่วยไม่ให้สับสนว่าเราสมมติอะไรไปแล้ว

เช็กลิสต์ก่อนหยุด

ครบส่วน (b): มี IH, มีเป้าหมาย, มีบรรทัดใช้ IH, มีการจัดรูป และมีประโยคจบที่อ้างฐานกับสะพาน

Week 4 · ข้อ 4.3 จำนวน 6^n-1 หารด้วย 5 ลงตัว

โจทย์: ใช้อุปนัยพิสูจน์ว่า 6^n-1 หารด้วย 5 ลงตัวทุกจำนวนเต็ม $n\geq 1$ เช่น $6^1-1=5$ และ $6^2-1=35$ ต่างเขียนเป็น 5 คูณจำนวนเต็มได้ วิธีอยู่ที่ บทที่ 3 §3.26–3.27

เป้าหมายของข้อนี้ไม่ใช่หาผลหารเป็นเลขค่าหนึ่ง แต่คือสร้างตัวคูณที่เป็นจำนวนเต็มให้เห็น

IH / สิทธิ์: $[6^k-1] = 5m,\ m\in\mathbb{Z}$

CURRENT เริ่มจากซ้ายของเป้าหมาย

$6^{k+1}-1 = 6\cdot 6^k-1$

TARGET ยังปิด: $6^{k+1}-1 = 5t$, ต้องสร้าง $t\in\mathbb{Z}$

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. ตั้งข้อความ	S(n): มีจำนวนเต็ม m ซึ่ง $6^n-1=5m$
2. ฐาน n=1	$6^1-1=5=5(1)$ จึงหารด้วย 5 ลงตัว
3. เลือก k	ให้ $k\geq 1$ เป็นจำนวนเต็มใด ๆ
4. ASSUME / IH	สมมติ $6^k-1=5m$ สำหรับจำนวนเต็ม m บางตัว
5. PROVE	ต้องแสดง $6^{k+1}-1=5t$ สำหรับจำนวนเต็ม t บางตัว
6. วางทาง	เราต้องจัดรูปให้ก้อน 6^k-1 ปรากฏ ก่อนใช้ IH

① ASSUME / IH: ของเก่าที่ให้ยืม

$6^k-1 = 5m$, m เป็นจำนวนเต็ม

② ใช้เหตุผล

③ PROVE: เป้าหมาย ยังใช้เป็นเหตุไม่ได้

$6^{k+1}-1 = 5t$, ต้องสร้าง t เป็นจำนวนเต็ม

① $n=1$

$6-1=5=5(1)$

② $n=2$

$36-1=35=5(7)$

③ ตัวคูณเปลี่ยนได้ แต่ต้องเป็นจำนวนเต็มเสมอ

เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

สมมติ $6^k-1=5$ อย่างเดียวจะแรงเกินไป เช่น $k=2$ ให้ 35 ไม่ใช่ 5 คำว่าหารลงตัวจึงต้องเขียน $5m$ ไม่ใช่เลข 5 ตัวเดียว

เช็กลิสต์ก่อนหยุด

ฐานเริ่ม 1, IH จบกำลัง k, เป้าหมายกำลัง k+1 และตัวคูณใหม่ t ยังต้องสร้างจาก m

Week 4 · ข้อ 4.3

สร้างตัวคูณใหม่จากตัวคูณเก่า

คูณก้อนเก่า 6^k-1 ด้วย 6 จะได้ $6^{k+1}-6$ แต่เป้าหมายคือ $6^{k+1}-1$ จึงต้องเติม 5 กลับ ความต่าง 5 นี้เองจะรวมกับก้อนที่หารด้วย 5 ลงตัวแล้วได้พอดี

IH / สิทธิ์: $[6^k-1] = 5m$

CURRENT · ทุกบรรทัดรักษาค่าเดิม

$6^{k+1}-1 = 6\cdot 6^k-1$

$= 6\cdot 6^k-6+5$

$= 6[6^k-1]+5$ ← +5 ยังอยู่

$= 6(5m)+5 = 5(6m+1)$

TARGET ถึงแล้ว: $t=6m+1\in\mathbb{Z}$ และ $6^{k+1}-1=5t$

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. เริ่มนิพจน์เป้าหมาย	$6^{k+1}-1$
2. เปิดกำลัง	$=6\cdot 6^k-1$
3. เขียน −1 เป็น −6+5	$=6\cdot 6^k-6+5$
4. ดึง 6	$=6(6^k-1)+5$
5. ใช้ IH เฉพาะก้อนเก่า	$=6(5m)+5$
6. คูณ	$=30m+5$
7. ดึง 5	$=5(6m+1)$
8. สร้าง t	กำหนด $t=6m+1$ ซึ่งเป็นจำนวนเต็มเพราะ m เป็นจำนวนเต็ม
9. อ่านผล	$6^{k+1}-1=5t$ จึงหารด้วย 5 ลงตัว ได้ S(k+1)
10. ปิดอุปนัย	ฐาน S(1) จริง และสะพานทุก $k\geq 1$ จริง จึง S(n) จริงทุก $n\geq 1$
11. เช็กกลับ	เมื่อ k=2 มี m=7 ได้ $t=6(7)+1=43$ และ $6^3-1=215=5(43)$

① ก่อน: $6(6^k-1)+5$

6^k-1 ×6 แล้ว +5

↓ IH: แทนก้อนฟ้า

5m ×6 แล้ว +5

② $6(5m)+5 = 30m+5$

③ $5(6m+1) \rightarrow t=6m+1$ เป็นจำนวนเต็ม

① ตัวอย่าง: $m=7 \rightarrow 6m+1=43$

↓

② ของเก่า: $6^2-1=35=5(7)$

↓

③ ของใหม่: $6^3-1=215=5(43)$

เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

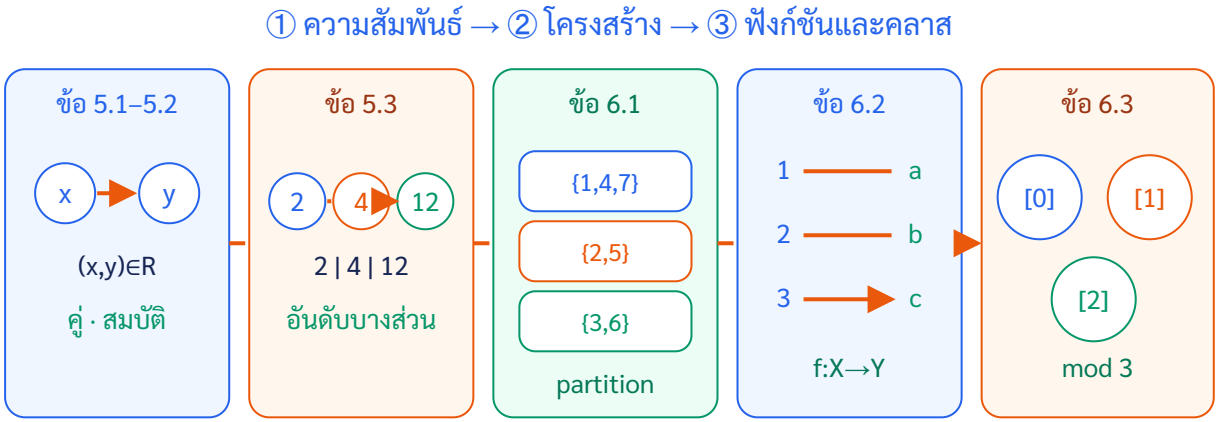
ลืม +5 แล้วใช้ $6^{k+1}-1=6(6^k-1)$ จะผิด ที่ $k=1$ ซ้าย=35 แต่ขวา=30 ตรวจการกระจายวงเล็บก่อนใช้ IH ทุกครั้ง

เช็กลิสต์ก่อนหยุด

จุดใช้ IH ต้องชี้ก้อน 6^k-1, ผลสุดท้ายต้องมีตัวประกอบ 5, ก้อนที่เหลือเป็นจำนวนเต็ม และต้องปิดทั้งฐานกับขั้นอุปนัย

ภาคผนวก ค — เฉลย In-Class Week 5–6

เฉลยนี้คงชุดสมาชิกและกติกาจากต้นฉบับทุกข้อ อ่านวิธีพื้นฐานเรื่องความสัมพันธ์ในบทที่ 4 และเรื่องฟังก์ชันกับความสัมพันธ์สมมูลในบทที่ 5 แล้วใช้บรรทัดที่ติดป้ายด้านล่างตรวจงานของตนเอง

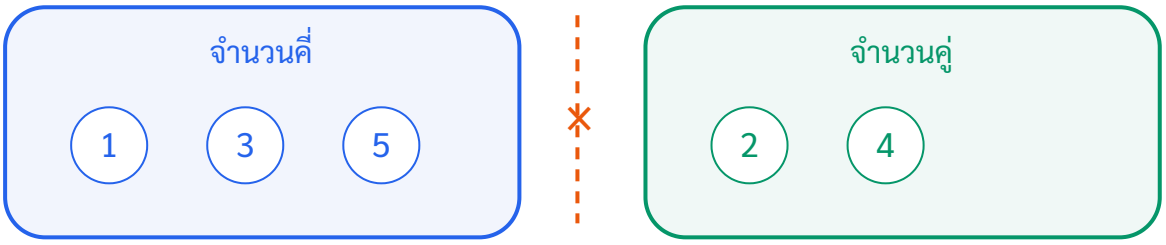


Week 5 — 5.1(a–b) แจกแจงคู่และอ่านขอบเขต

โจทย์ 5.1 ให้ $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $xRy \iff x + y$ เป็นจำนวนคู่ ข้อ (a) เขียน R เป็นเซตของคู่อันดับ ข้อ (b) หา domain และ range วิธีอ่านคู่และตารางอยู่บทที่ 4 หัวข้อ 4.1–4.2

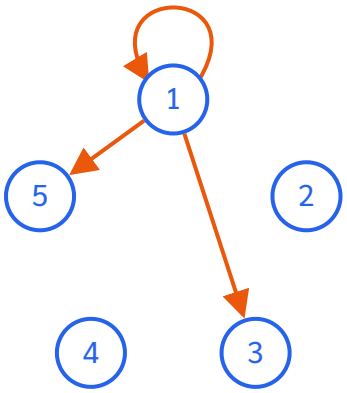
ข้อ (a) บรรทัด 1 — แยกตามเศษ คี่+คี่เป็นคู่ และคู่+คู่เป็นคู่ แต่คี่+คู่เป็นคี่ จึงจับสมาชิกในกลุ่ม $\{1, 3, 5\}$ กับกลุ่มเดียวกัน และกลุ่ม $\{2, 4\}$ กับกลุ่มเดียวกัน

① คี่กับคี่ → ② คู่กับคู่ → ③ ไม่ข้ามกลุ่ม



ข้อ (a) บรรทัด 2 — ตัวหน้า 1 ตรวจตัวหลังทั้งห้าตัวแล้วรับ 1, 3, 5 ได้ $(1,1), (1,3), (1,5)$

① เพิ่มคู่จาก 1



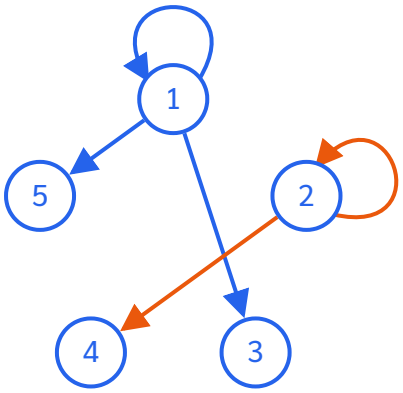
② แถว → คอลัมน์

	1	2	3	4	5
1	1	0	1	0	1
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

ข้อ (a) บรรทัด 3 — ตัวหน้า 2 ตรวจตัวหลังทั้งห้าตัวแล้วรับ 2, 4 ได้ $(2,2), (2,4)$

① เพิ่มคู่จาก 2



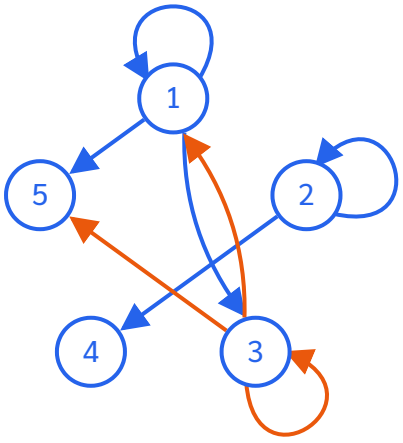
② แถว → คอลัมน์

	1	2	3	4	5
1	1	0	1	0	1
2	0	1	0	1	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

ข้อ (a) บรรทัด 4 — ตัวหน้า 3 ตรวจตัวหลังทั้งห้าตัวแล้วรับ $1, 3, 5$ ได้ $(3, 1), (3, 3), (3, 5)$

① เพิ่มคู่จาก 3



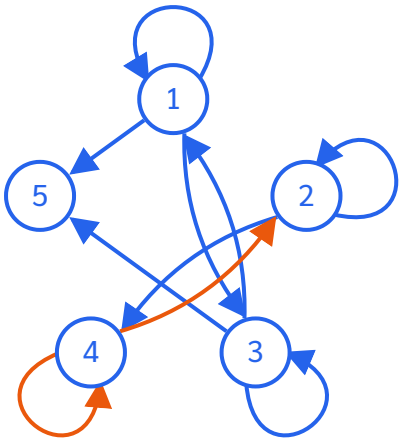
② แถว → คอลัมน์

	1	2	3	4	5
1	1	0	1	0	1
2	0	1	0	1	0
3	1	0	1	0	1
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

ข้อ (a) บรรทัด 5 — ตัวหน้า 4 ตรวจตัวหลังทั้งห้าตัวแล้วรับ $2, 4$ ได้ $(4, 2), (4, 4)$

① เพิ่มคู่จาก 4



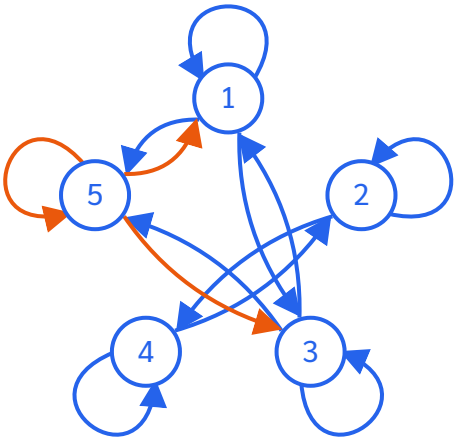
② แถว → คอลัมน์

	1	2	3	4	5
1	1	0	1	0	1
2	0	1	0	1	0
3	1	0	1	0	1
4	0	1	0	1	0
5	0	0	0	0	0

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

ข้อ (a) บรรทัด 6 — ตัวหน้า 5 ตรวจตัวหลังทั้งห้าตัวแล้วรับ 1, 3, 5 ได้ $(5,1), (5,3), (5,5)$

① เพิ่มคู่จาก 5



② แถว → คอลัมน์

	1	2	3	4	5
1	1	0	1	0	1
2	0	1	0	1	0
3	1	0	1	0	1
4	0	1	0	1	0
5	1	0	1	0	1

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

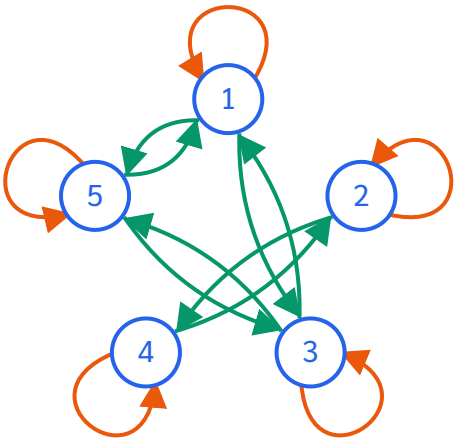
ข้อ (a) บรรทัด 7 — รวมคำตอบ $R =$
$\{(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),(3,5),(4,2),(4,4),(5,1),(5,3),(5,5)\}$

เช็กกลับข้อ (a) มี $3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13$ คู่ ทุกคู่ให้ผลรวมคู่จริง และไม่มีคู่ข้ามกลุ่มคี่–คู่

ข้อ (b) บรรทัด 1 — อ่านแถว ทุกแถวมี 1 อย่างน้อยที่คู่ (x,x) จึง $\mathrm{Dom}(R) = \{1,2,3,4,5\}$

ข้อ (b) บรรทัด 2 — อ่านคอลัมน์ ทุกคอลัมน์มี 1 อย่างน้อยบนแนวทแยงเช่นกัน จึง $\mathrm{Ran}(R) =$
$\{1,2,3,4,5\}$

① domain และ range ครบ



② แถว → คอลัมน์

	1	2	3	4	5
1	1	0	1	0	1
2	0	1	0	1	0
3	1	0	1	0	1
4	0	1	0	1	0
5	1	0	1	0	1

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

เช็กกลับข้อ (b) ตัวหน้าและตัวหลังของคู่ที่เขียนในข้อ (a) ปรากฏครบทุกค่าของ X ไม่มีสมาชิกนอก X

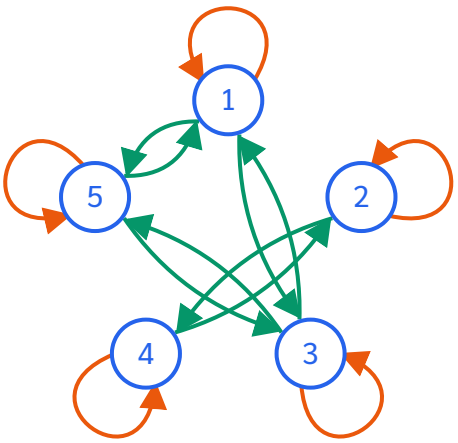
ผลรวมคู่ไม่ได้แปลว่าต้องเป็นเลขคู่ทั้งสองตัว เช่น (1,3) ใช้ได้เพราะ 1+3=4 เป็นคู่ ถ้ารับเฉพาะเลขคู่จะทำเก้าคู่ในกลุ่มคี่หายไป

Week 5 — 5.1(c) ตรวจสมบัติของผลรวมคู่

โจทย์ 5.1(c) ตรวจ R จากข้อก่อนว่าสะท้อน สมมาตร ปฏิสมมาตร และถ่ายทอดหรือไม่ พร้อมเหตุผล วิธีตรวจสี่สมบัติอยู่บทที่ 4 หัวข้อ 4.4–4.7

บรรทัด 1 — สะท้อน: จริง สำหรับ x ทุกตัว $x + x = 2x$ เป็นคู่ จึงมี (x,x) ครบ 1 ถึง 5

① วงวนครบ



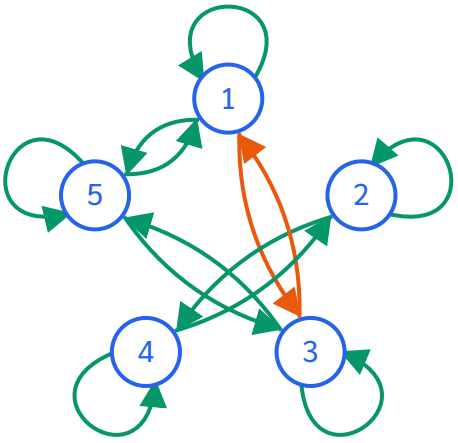
② แถว → คอลัมน์

	1	2	3	4	5
1	1	0	1	0	1
2	0	1	0	1	0
3	1	0	1	0	1
4	0	1	0	1	0
5	1	0	1	0	1

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 2 — สมมาตร: จริง ถ้า $(x, y) \in R$ แปลว่า x+y เป็นคู่ เนื่องจาก $y + x = x + y$ จึง y+x เป็นคู่ด้วยและมี (y,x)

① ตัวอย่างคู่กลับ 1 กับ 3



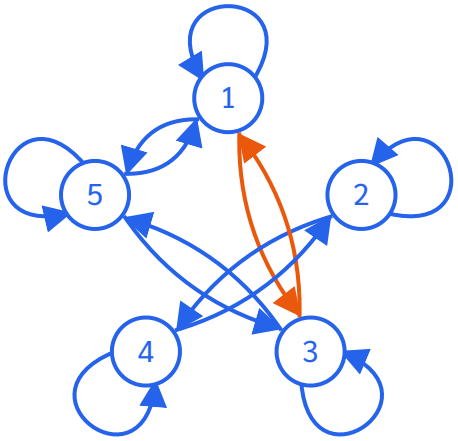
② แถว → คอลัมน์

	1	2	3	4	5
1	1	0	1	0	1
2	0	1	0	1	0
3	1	0	1	0	1
4	0	1	0	1	0
5	1	0	1	0	1

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 3 — ปฏิสมมาตร: เท็จ มี (1,3) และ (3,1) เพราะผลรวมเป็น 4 ทั้งสองทิศ แต่ $1 \neq 3$ เป็นคู่ต่างจุดที่ละเมิดปฏิสมมาตร

① คู่ที่ละเมิด



② แถว → คอลัมน์

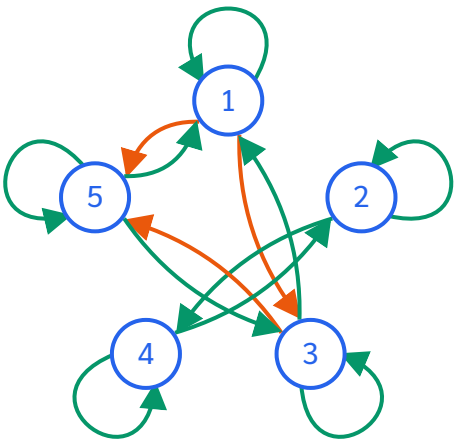
	1	2	3	4	5
1	1	0	1	0	1
2	0	1	0	1	0
3	1	0	1	0	1
4	0	1	0	1	0
5	1	0	1	0	1

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 4 — ตั้งสมมติฐานถ่ายทอด สมมติ $(x,y),(y,z) \in R$ จึง x+y และ y+z เป็นคู่

บรรทัด 5 — คำนวณผลรวมปลาย $x+z=(x+y)+(y+z)-2y$ ด้านขวาเป็นคู่+คู่−คู่ จึงเป็นคู่ ดังนั้น (x,z) อยู่ใน R และ R ถ่ายทอด

① 1 → 3 → 5 มีทางตรง



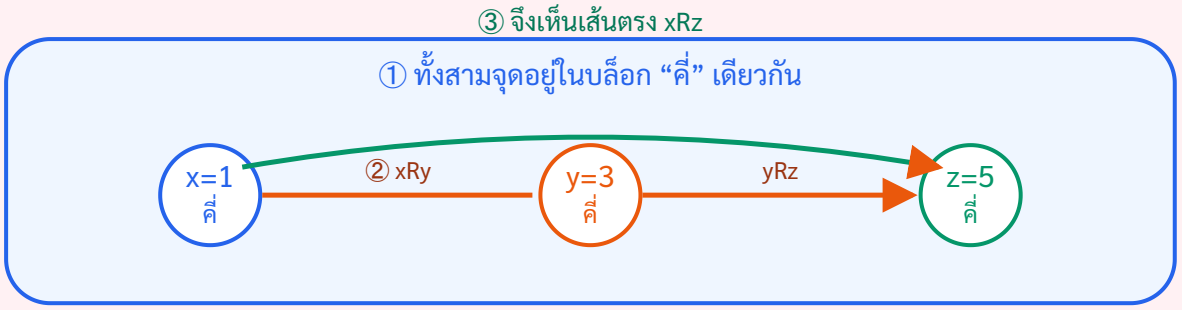
② แถว → คอลัมน์

	1	2	3	4	5
1	1	0	1	0	1
2	0	1	0	1	0
3	1	0	1	0	1
4	0	1	0	1	0
5	1	0	1	0	1

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

เช็กกลับ ในกลุ่มคี่ทุกคู่มีครบ ในกลุ่มคู่ทุกคู่มีครบ เส้นทางสองช่วงไม่ออกข้ามกลุ่ม จึงมีทางตรงครบ สรุปเรียงตามคำถาม: จริง, จริง, เท็จ, จริง

ตัวอย่างเห็นเส้นทาง แต่เหตุผลทั่วไปยังต้องใช้ x,y,z



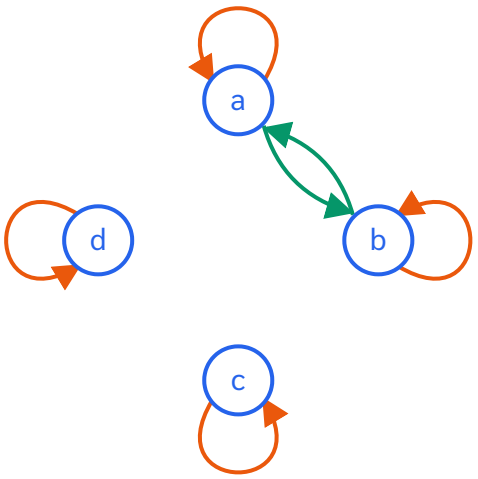
ใช้เส้นทางสองช่วงเพียงตัวอย่างเดียวพิสูจน์ว่า “ถ่ายทอดทุกกรณี” ไม่พอ บรรทัด 4–5 ใช้ x,y,z ใด ๆ จึงครอบคลุม ส่วนภาพมีหน้าที่ให้เห็นรูปแบบของเหตุผล

Week 5 — 5.2 ตรวจรายการคู่ที่ให้มาโดยตรง

โจทย์ 5.2 $X = \{a, b, c, d\}$, $S = \{(a,a), (a,b), (b,a), (b,b), (c,c), (d,d)\}$ ตรวจสมบัติทั้งสี่พร้อมเหตุผล วิธีนี้อยู่บทที่ 4

บรรทัด 1 — สะท้อน: จริง มี (a,a),(b,b),(c,c),(d,d) ครบทุกสมาชิกของ X

① ตรวจแนวทแยง



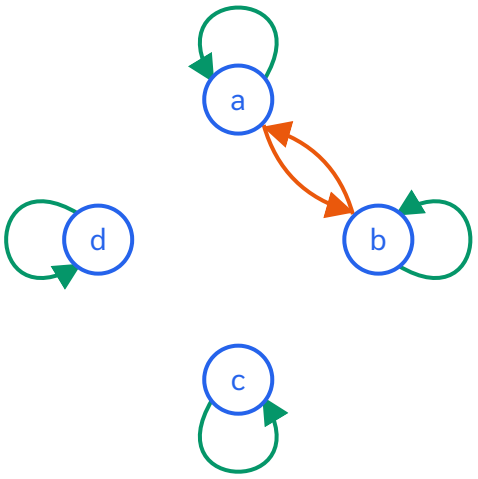
② แถว → คอลัมน์

	a	b	c	d
a	1	1	0	0
b	1	1	0	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 2 — สมมาตร: จริง วงวนกลับเป็นตัวเอง คู่ต่างจุดมีเพียง (a,b) และ (b,a) ซึ่งเป็นคู่กลับกันครบ

① คู่กลับครบ



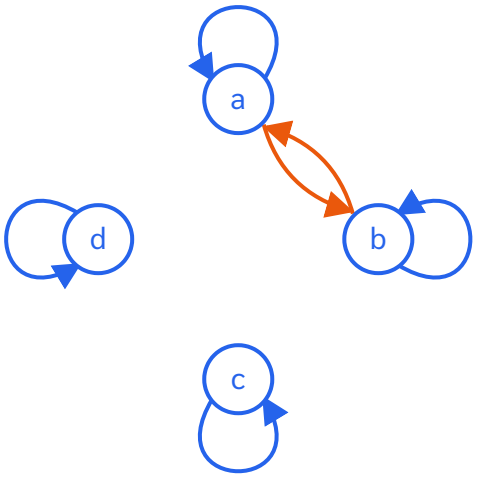
② แถว → คอลัมน์

	a	b	c	d
a	1	1	0	0
b	1	1	0	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 3 — ปฏิสมมาตร: เท็จ มี (a,b) และ (b,a) โดย $a \neq b$ จึงผิดข้อกำหนดที่ห้ามสองทิศระหว่างคนละจุด

① สองทิศต่างจุด



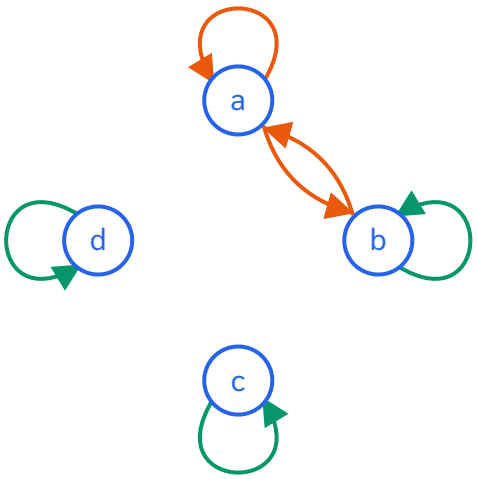
② แถว → คอลัมน์

	a	b	c	d
a	1	1	0	0
b	1	1	0	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 4 — ถ่ายทอดในกลุ่ม a,b ภายใน $\{a, b\}$ มีทุกคู่ ได้แก่ (a,a),(a,b),(b,a),(b,b) จึงเส้นทางสองช่วงใด ๆ ที่อยู่ในกลุ่มนี้มีคู่ต้น–ปลายครบ

① a → b → a มีวงวน



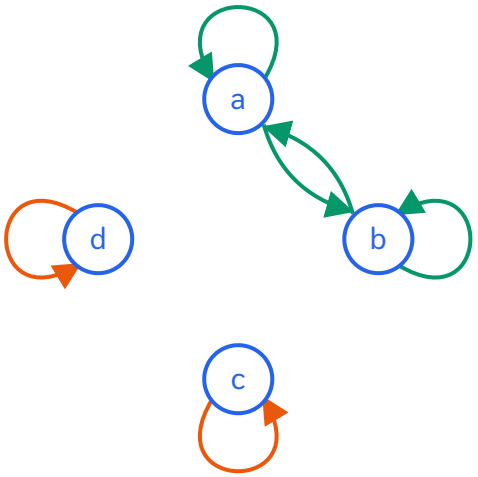
② แถว → คอลัมน์

	a	b	c	d
a	1	1	0	0
b	1	1	0	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 5 — ถ่ายทอดที่ c,d จาก c มีเพียง c→c→c และมี (c,c); จาก d มีเพียง d→d→d และมี (d,d) ไม่มีทางเชื่อมข้ามกลุ่ม จึงตรวจเส้นทางที่เหลือครบและ S ถ่ายทอด

① วงวนเดี่ยวต่อได้ครบ



② แถว → คอลัมน์

	a	b	c	d
a	1	1	0	0
b	1	1	0	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

เช็กกลับ เส้นทางสองช่วงทั้งหมดแบ่งตามกลุ่มต้นทางได้ครบ ไม่มีกรณีหลุด สรุป: สะท้อนจริง สมมาตรจริง ปฏิสมมาตรเท็จ ถ่ายทอดจริง

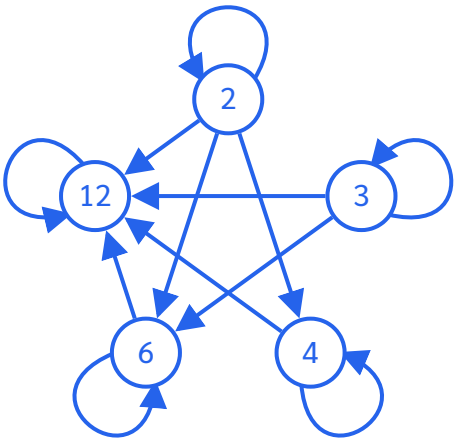
อย่าอ่าน (c,c) ในภาพต้นฉบับเป็น (e,c) ชุดสมาชิกคือ a,b,c,d และภาพโจทย์ระบุวงวนที่ c การถอดคู่ผิดจะเปลี่ยนคำตอบหลายสมบัติพร้อมกัน

Week 5 — 5.3(a) อันดับบางส่วนจากการหารลงตัว

โจทย์ 5.3(a) ให้ $X = \{2, 3, 4, 6, 12\}$, $xDy \iff x \mid y$ แสดงว่า D เป็นอันดับบางส่วนบน X วิธีและเหตุผลทั่วไปอยู่บทที่ 4 หัวข้อ 4.9–4.10

บรรทัด 1 — เตรียมคู่ที่ผ่าน แถว 2 ไป 2,4,6,12; แถว 3 ไป 3,6,12; แถว 4 ไป 4,12; แถว 6 ไป 6,12; แถว 12 ไป 12 ได้ $4 + 3 + 2 + 2 + 1 = 12$ คู่

① ความสัมพันธ์หารลงตัว



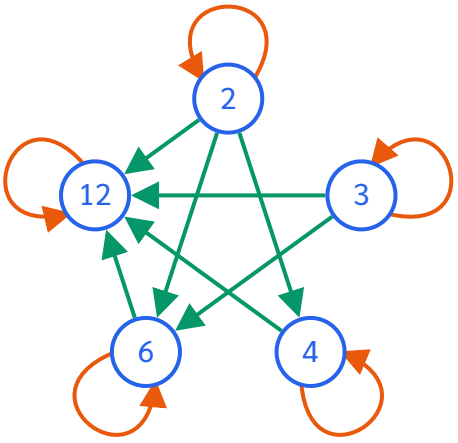
② แถว → คอลัมน์

	2	3	4	6	12
2	1	0	1	1	1
3	0	1	0	1	1
4	0	0	1	0	1
6	0	0	0	1	1
12	0	0	0	0	1

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 2 — สะท้อน ทุก $x \in X$ มี $x = x \cdot 1$ จึง $x \mid x$ มีวงวนครบทั้งห้าตัว

① วงวนครบห้าตัว



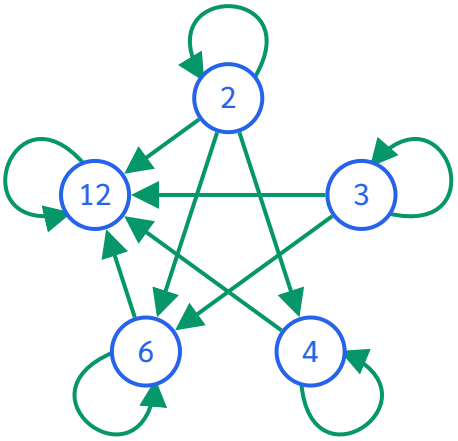
② แถว → คอลัมน์

	2	3	4	6	12
2	1	0	1	1	1
3	0	1	0	1	1
4	0	0	1	0	1
6	0	0	0	1	1
12	0	0	0	0	1

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 3 — ปฏิสมมาตร ถ้า $x \mid y$ และ $y \mid x$ เขียน $y = xm$, $x = yn$ โดย m,n เป็นจำนวนเต็มบวก แทนกันได้ $x = xmn$ จึง $mn = 1$ และ $m = n = 1$ ดังนั้น $x = y$

① ไม่มีสองทิศต่างจุด



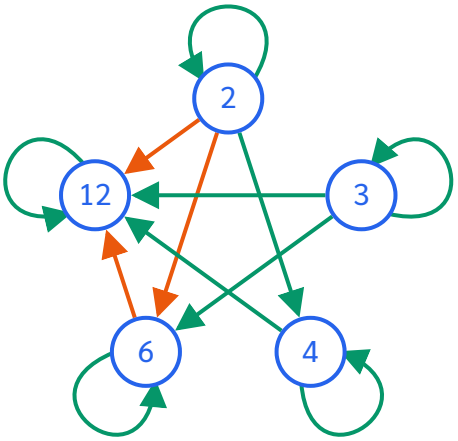
② แถว → คอลัมน์

	2	3	4	6	12
2	1	0	1	1	1
3	0	1	0	1	1
4	0	0	1	0	1
6	0	0	0	1	1
12	0	0	0	0	1

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 4 — ถ่ายทอด ถ้า $x \mid y$ และ $y \mid z$ เขียน $y = xm$, $z = yn$ ได้ $z = x(mn)$ จึง $x \mid z$

① 2 → 6 → 12 มี 2 → 12



② แถว → คอลัมน์

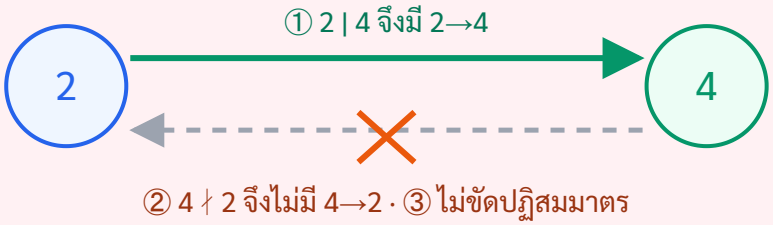
	2	3	4	6	12
2	1	0	1	1	1
3	0	1	0	1	1
4	0	0	1	0	1
6	0	0	0	1	1
12	0	0	0	0	1

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 5 — สรุป D ผ่านสะท้อน ปฏิสมมาตร และถ่ายทอด จึงเป็น partial order บน X

เช็กกลับ ทุกเหตุผลใช้สมาชิกใด ๆ ของ X ซึ่งล้วนเป็นจำนวนเต็มบวก ภาพแสดงเส้นทางตัวอย่าง ส่วนการไล่ตารางทั้ง 25 ช่องยืนยันคู่ที่เตรียมไว้ครบ

ลูกศรกลับขาดได้ และยังผ่านปฏิสมมาตร



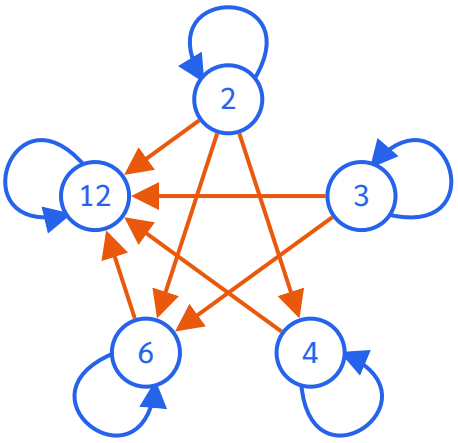
คำว่า partial order ไม่ต้องการสมมาตร แม้ D มี 2→4 แต่ไม่มี 4→2 ก็ยังผ่านอันดับบางส่วน เพราะเงื่อนไขที่ใช้คือปฏิสมมาตร

Week 5 — 5.3(b–d) คู่ที่เทียบได้และเทียบไม่ได้

โจทย์ 5.3(b–d) ใช้ D เดิม: (b) แจกแจงคู่ที่เปรียบเทียบได้โดยสมาชิกต่างกัน (c) มีสมาชิกที่เปรียบเทียบไม่ได้หรือไม่ (d) เป็น total order หรือไม่ วิธีนี้อยู่บทที่ 4 หัวข้อ 4.11 และ 4.13

ข้อ (b) บรรทัด 1 — ลบกรณีตัวเองออกจากการนับ เงื่อนไข $x \neq y$ ไม่รับคู่บนแนวทแยง เหลือคู่ใน D ที่ต่างสมาชิกเจ็ดคู่

① คู่ต่างจุดที่มีลูกศร



② แถว → คอลัมน์

	2	3	4	6	12
2	1	0	1	1	1
3	0	1	0	1	1
4	0	0	1	0	1
6	0	0	0	1	1
12	0	0	0	0	1

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

ข้อ (b) บรรทัด 2 — แจกแจงทิศหารลงตัว $(2,4), (2,6), (2,12), (3,6), (3,12), (4,12), (6,12)$ เป็นคู่ตามทิศ x หาร y ลงตัว

ข้อ (b) บรรทัด 3 — แยกความหมายของคำว่า comparable คู่สมาชิกที่เปรียบเทียบได้โดยไม่นับลำดับมีเจ็ดคู่: $\{2,4\}, \{2,6\}, \{2,12\}, \{3,6\}, \{3,12\}, \{4,12\}, \{6,12\}$

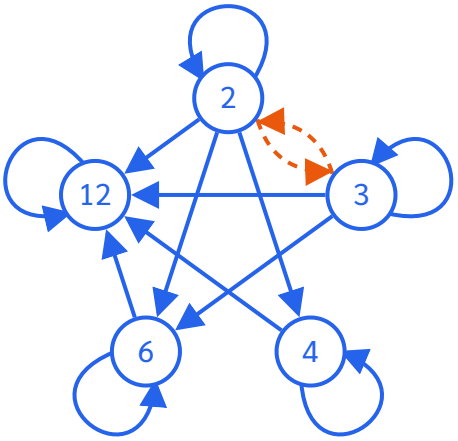
ข้อ (b) บรรทัด 4 — ถ้าแจกแจงเป็น (x,y) ตามตัวอักษรโจทย์ เงื่อนไข “x และ y เปรียบเทียบกันได้” รับทั้งลำดับไปและกลับ จึงได้ 14 คู่:
$(2,4), (4,2), (2,6), (6,2), (2,12), (12,2), (3,6), (6,3), (3,12), (12,3), (4,12), (12,4), (6,12), (1$

การใส่ (4,2) ในรายการ comparable ไม่ได้อ้างว่า $4 \mid 2$ แต่บอกว่า 4 กับ 2 เปรียบเทียบกันได้เพราะ $2 \mid 4$ ถ้าเขียนเพียงเจ็ดคู่ ให้ระบุว่าเขียนคู่สมาชิกโดยไม่นับสลับลำดับ หรือเขียนตามทิศที่หารลงตัว

เช็กกลับข้อ (b) สมาชิกต่างกันมี 10 คู่แบบไม่เรียงลำดับ คู่ที่เปรียบเทียบไม่ได้มีเพียง 3 คู่ จึงที่เปรียบเทียบได้มี 7 คู่ หรือ 14 คู่เมื่อนับทั้งสองลำดับ

ข้อ (c) บรรทัด 1 — ตรวจตัวอย่างสองทิศ เลือก 2 กับ 3: 3/2 และ 2/3 ต่างไม่เป็นจำนวนเต็ม จึงไม่มีทั้ง (2,3) และ (3,2) ใน D ดังนั้นมีสมาชิกที่เปรียบเทียบไม่ได้

① 2 กับ 3 ไม่มีทั้งสองทิศ



② แถว → คอลัมน์

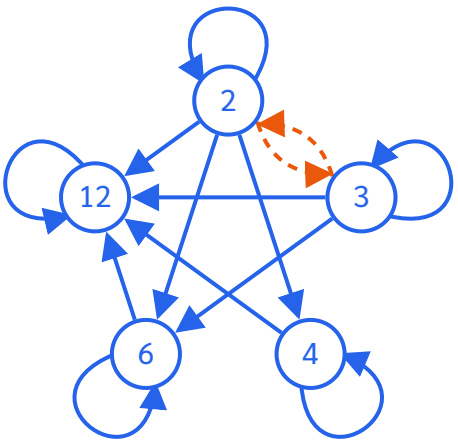
	2	3	4	6	12
2	1	0	1	1	1
3	0	1	0	1	1
4	0	0	1	0	1
6	0	0	0	1	1
12	0	0	0	0	1

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0 · เส้นประคือช่องที่ขาด

ข้อ (c) บรรทัด 2 — ระบุครบถ้าต้องการ คู่ที่เปรียบเทียบไม่ได้ทั้งหมดคือ $\{2,3\}, \{3,4\}, \{4,6\}$ ตัวอย่างเพียงหนึ่งคู่ก็เพียงพอตามคำถาม

ข้อ (d) บรรทัด 1 — ใช้คู่แย้งเดิม total order ต้องให้สมาชิกทุกคู่เปรียบเทียบกันได้ แต่ 2 กับ 3 ไม่ผ่าน ดังนั้น D ไม่เป็น total order

① คู่แย้งต่อ total order



② แถว → คอลัมน์

	2	3	4	6	12
2	1	0	1	1	1
3	0	1	0	1	1
4	0	0	1	0	1
6	0	0	0	1	1
12	0	0	0	0	1

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0 · เส้นประคือช่องที่ขาด

เช็กกลับข้อ (c–d) แม้ D เป็น partial order จากข้อ (a) เงื่อนไขที่เพิ่มสำหรับ total order ยังพังได้ ไม่ขัดกัน

Week 6 — 6.1(a) ตรวจการแบ่งส่วนให้ครบสามเงื่อนไข

โจทย์ 6.1(a) $X = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $S = \{\{1,4,7\},\{2,5\},\{3,6\}\}$ ตรวจว่า S เป็นการแบ่งส่วนของ X วิธีตรวจ partition อยู่บทที่ 5

บรรทัด 1 — ตั้งชื่อแต่ละกลุ่ม ให้ $A = \{1,4,7\}$, $B = \{2,5\}$, $C = \{3,6\}$ ทั้งสามเป็นเซตย่อยของ X และไม่มีเซตใดว่าง

① A ไม่ว่าง · ② B ไม่ว่าง · ③ C ไม่ว่าง



บรรทัด 2 — ตรวจไม่ทับซ้อนเป็นคู่ $A \cap B = \varnothing$, $A \cap C = \varnothing$, $B \cap C = \varnothing$ เพราะไม่มีเลขใดถูกเขียนในสองกลุ่ม

① ไม่ซ้ำกับ B,C · ② ไม่ซ้ำกับ A,C · ③ ไม่ซ้ำกับ A,B



บรรทัด 3 — ตรวจครอบคลุม $A \cup B \cup C = \{1,2,3,4,5,6,7\} = X$ ทุกสมาชิกของ X อยู่ในหนึ่งกลุ่มพอดี

บรรทัด 4 — สรุป ทั้งไม่ว่าง ไม่ทับซ้อนกันเป็นคู่ และรวมแล้วได้ X จึง S เป็น partition ของ X



เช็กกลับ จำนวนสมาชิกรวม $3+2+2=7$ ตรงกับ X และตรวจรายชื่อแล้วครบ 1 ถึง 7 จริง การนับตรงกันอย่างเดียวจะไม่พอถ้ารายชื่อซ้ำหรือมีตัวนอก X

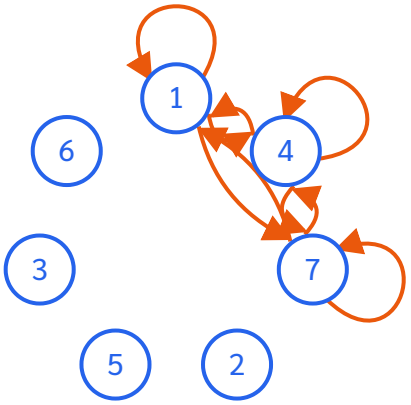
อย่าลืมเงื่อนไขทุกกลุ่มไม่ว่าง และอย่าใช้แค่ $A \cap B \cap C = \varnothing$ แทนการตรวจทุกคู่ เพราะส่วนร่วมสามกลุ่มอาจว่างทั้งที่สองกลุ่มยังซ้อนกัน

Week 6 — 6.1(b) จับทุกตัวภายในกลุ่มเดียวกัน

โจทย์ 6.1(b) นิยาม xRy เมื่อมี $A \in S$ ที่ x,y อยู่ใน A เดียวกัน ให้เขียน R เป็นเซตคู่อันดับ วิธีสร้างความสัมพันธ์จาก partition อยู่บทที่ 5

บรรทัด 1 — ใช้กลุ่มแรกจับตัวเอง ใน $\{1, 4, 7\}$ ทุกตัวจับกับทุกตัวในกลุ่ม ได้ $(1,1), (1,4), (1,7), (4,1), (4,4), (4,7), (7,1), (7,4), (7,7)$

① คู่จากกลุ่ม 1,4,7



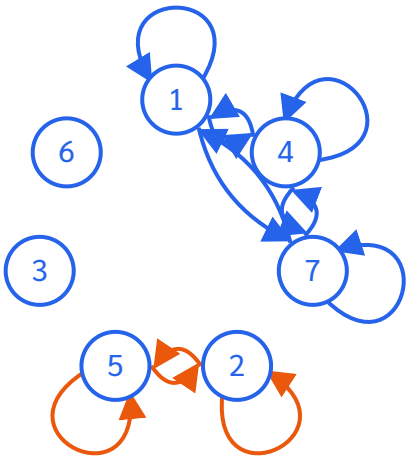
② แถว → คอลัมน์

	1	4	7	2	5	3	6
1	1	1	1	0	0	0	0
4	1	1	1	0	0	0	0
7	1	1	1	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 2 — ใช้กลุ่มที่สอง ใน $\{2, 5\}$ ได้ $(2,2), (2,5), (5,2), (5,5)$

① เพิ่มกลุ่ม 2,5



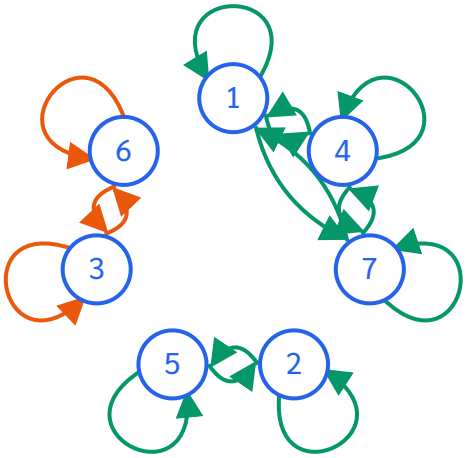
② แถว → คอลัมน์

	1	4	7	2	5	3	6
1	1	1	1	0	0	0	0
4	1	1	1	0	0	0	0
7	1	1	1	0	0	0	0
2	0	0	0	1	1	0	0
5	0	0	0	1	1	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 3 — ใช้กลุ่มที่สาม ใน $\{3,6\}$ ได้ $(3,3),(3,6),(6,3),(6,6)$

① เพิ่มกลุ่ม 3,6



② แถว → คอลัมน์

	1	4	7	2	5	3	6
1	1	1	1	0	0	0	0
4	1	1	1	0	0	0	0
7	1	1	1	0	0	0	0
2	0	0	0	1	1	0	0
5	0	0	0	1	1	0	0
3	0	0	0	0	0	1	1
6	0	0	0	0	0	1	1

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 4 — รวมเป็น R $R = \{(1,1),(1,4),(1,7),(4,1),(4,4),(4,7),(7,1),(7,4),(7,7),(2,2),(2,5),(5,2),(5,5),(3,3),(3,6),(6,3),(6,6)\}$

ภาพเรียงหัวแถวและคอลัมน์เป็น 1,4,7,2,5,3,6 เพื่อให้เห็นบล็อกของแต่ละกลุ่ม การเปลี่ยนลำดับหัวตารางไม่ได้เปลี่ยนสมาชิกของ X หรือคู่ใน R

เช็กกลับ มี $3^2 + 2^2 + 2^2 = 9 + 4 + 4 = 17$ คู่ ทุกคู่มีปลายทั้งสองอยู่กลุ่มเดียวกัน ไม่มีลูกศรข้ามกลุ่ม และทุกการจับคู่ภายในแต่ละกลุ่มถูกเก็บครบ

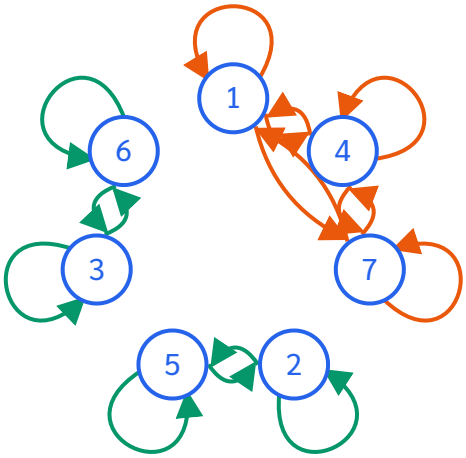
อย่าเก็บเฉพาะคู่ติดกัน เช่น (1,4),(4,7) แล้วลืม (1,7) นิยามถามอยู่กลุ่มเดียวกัน ไม่ได้ถามว่าอยู่ติดกันในรายชื่อ

Week 6 — 6.1(c) ตัวแทนต่างกันอาจได้ชั้นเดียวกัน

โจทย์ 6.1(c) แจกแจงชั้นสมมูลทั้งหมดของ R จากข้อ (b) วิธีอ่านชั้นสมมูลอยู่บทที่ 5

บรรทัด 1 — อ่านกลุ่มของ 1 สมาชิกที่สัมพันธ์กับ 1 คือ 1,4,7 จึง $[1] = \{1, 4, 7\}$ เลือก 4 หรือ 7 เป็นตัวแทนก็ได้กลุ่มเดิม: $[1] = [4] = [7]$

① ชั้นของ 1,4,7



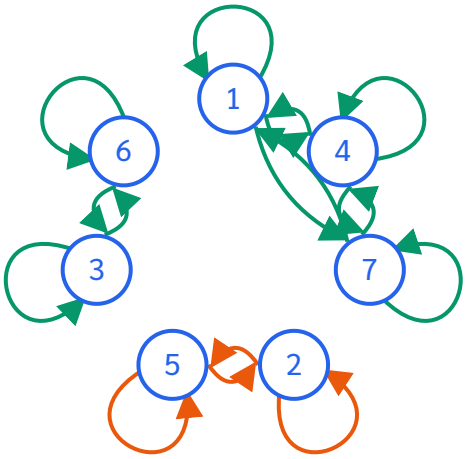
② แถว → คอลัมน์

	1	4	7	2	5	3	6
1	1	1	1	0	0	0	0
4	1	1	1	0	0	0	0
7	1	1	1	0	0	0	0
2	0	0	0	1	1	0	0
5	0	0	0	1	1	0	0
3	0	0	0	0	0	1	1
6	0	0	0	0	0	1	1

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 2 — อ่านกลุ่มของ 2 $[2] = \{2, 5\}$ และ $[5] = \{2, 5\}$ จึง $[2] = [5]$

① ชั้นของ 2,5



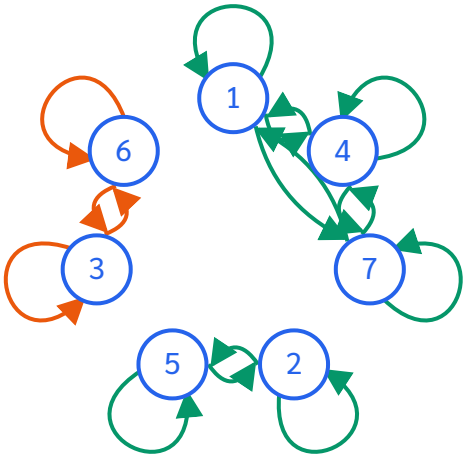
② แถว → คอลัมน์

	1	4	7	2	5	3	6
1	1	1	1	0	0	0	0
4	1	1	1	0	0	0	0
7	1	1	1	0	0	0	0
2	0	0	0	1	1	0	0
5	0	0	0	1	1	0	0
3	0	0	0	0	0	1	1
6	0	0	0	0	0	1	1

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 3 — อ่านกลุ่มของ 3 $[3] = \{3, 6\}$ และ $[6] = \{3, 6\}$ จึง $[3] = [6]$

① ชั้นของ 3,6



② แถว → คอลัมน์

	1	4	7	2	5	3	6
1	1	1	1	0	0	0	0
4	1	1	1	0	0	0	0
7	1	1	1	0	0	0	0
2	0	0	0	1	1	0	0
5	0	0	0	1	1	0	0
3	0	0	0	0	0	1	1
6	0	0	0	0	0	1	1

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 4 — เก็บเฉพาะชั้นต่างกัน ชั้นสมมูลที่ต่างกันทั้งหมดคือ $\{1, 4, 7\}, \{2, 5\}, \{3, 6\}$ ถ้าเขียนเป็นเซตของชั้นจะได้ $X/R = \{\{1, 4, 7\}, \{2, 5\}, \{3, 6\}\}$

① [1]=[4]=[7] · ② [2]=[5] · ③ [3]=[6]



เช็กกลับ เจ็ดสมาชิกมีชั้นกำกับครบ แต่ชั้นที่ต่างกันมีเพียงสามชั้น รวมกันได้ X และไม่ทับซ้อน ตรงกับ partition ต้นทาง

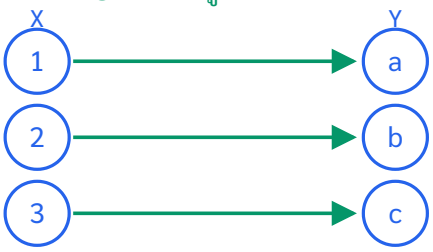
การมีเจ็ดสัญลักษณ์ [1] ถึง [7] ไม่ได้แปลว่ามีเจ็ดชั้นต่างกัน ต้องเทียบสมาชิกข้างในแล้วลบชั้นที่ซ้ำกัน

Week 6 — 6.2(a) แถวละหนึ่งภาพครบทุกตัว

โจทย์ 6.2(a) $X = \{1,2,3\}, Y = \{a,b,c\}, Z = \{p,q,r\}$ และ $f_1 = \{(1,a),(2,b),(3,c)\}$, $f_2 = \{(1,a),(2,a),(3,b)\}$, $f_3 = \{(1,a),(2,b)\}$ ข้อใดเป็นฟังก์ชันจาก X ไป Y? วิธีตรวจอยู่บทที่ 5

บรรทัด 1 — ตรวจ f_1 ตัวหน้า 1,2,3 แต่ละตัวมีปลายทางเพียงตัวเดียวคือ a,b,c ตามลำดับ ไม่มีตัวขาด จึง f_1 เป็นฟังก์ชันจาก X ไป Y

① f₁: หนึ่งลูกศรต่อแถว



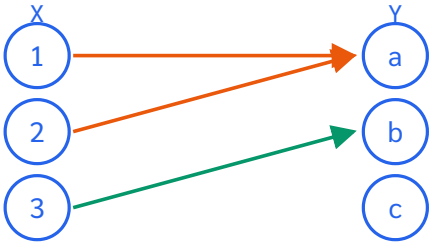
② แถว → คอลัมน์

	a	b	c
1	1	0	0
2	0	1	0
3	0	0	1

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 2 — ตรวจ f_2 1 ไป a, 2 ไป a, 3 ไป b ตัวหน้าทุกตัวมีลูกศรออกหนึ่งเส้น จึง f_2 เป็นฟังก์ชัน แม้สองตัวหน้าจะไปปลายทางเดียวกัน

① f₂: ชนปลายทางได้



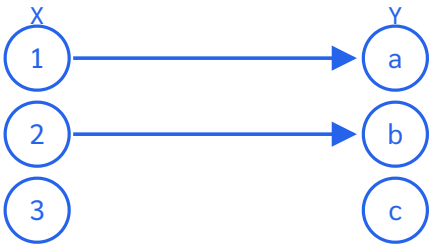
② แถว → คอลัมน์

	a	b	c
1	1	0	0
2	1	0	0
3	0	1	0

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 3 — ตรวจ f_3 1 ไป a และ 2 ไป b แต่ 3 ไม่มีปลายทาง แถว 3 เป็นศูนย์ทั้งแถว จึง f_3 ไม่เป็นฟังก์ชันจาก X ไป Y

① f_3: แถว 3 ไม่มีภาพ



② แถว → คอลัมน์

	a	b	c
1	1	0	0
2	0	1	0
3	0	0	0

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

เช็กกลับ จำนวน 1 ต่อแถวของ f_1 คือ 1,1,1; ของ f_2 คือ 1,1,1; ของ f_3 คือ 1,1,0 คำตอบคือ f_1, f_2 เท่านั้น

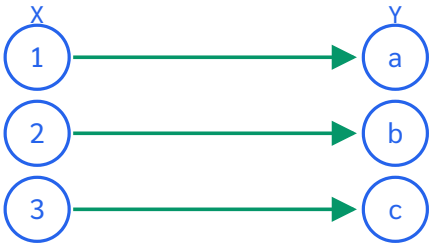
อย่าตัดสินจากจำนวนลูกศรเข้าปลายทาง เพราะฟังก์ชันบังคับหนึ่งลูกศรออกจากต้นทางทุกตัว ส่วนความไม่ชนกันเป็นเงื่อนไข injective ที่ข้อ (b) จะตรวจเพิ่ม

Week 6 — 6.2(b) ไม่ชนกัน กับไปถึงครบ

โจทย์ 6.2(b) สำหรับฟังก์ชันที่ผ่านข้อ (a) ตรวจ injective, surjective และ bijective พร้อมเหตุผล ข้อนี้ตรวจเฉพาะ f_1, f_2 เพราะ f_3 ไม่เป็นฟังก์ชันจาก X ไป Y

บรรทัด 1 — f_1 เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง ค่า $f_1(1) = a, f_1(2) = b, f_1(3) = c$ ต่างกันทั้งหมด ไม่มีสองต้นทางชนปลายทางเดียว จึง injective

① f_1: ไม่ชนกัน



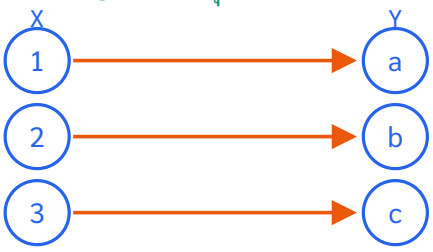
② แถว → คอลัมน์

	a	b	c
1	1	0	0
2	0	1	0
3	0	0	1

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 2 — f_1 ทั่วถึง สมาชิก Y ทุกตัว a,b,c มีต้นทาง 1,2,3 ตามลำดับ จึง $f_1(X) = Y$ และ surjective

① f_1: ครบทุกปลายทาง



② แถว → คอลัมน์

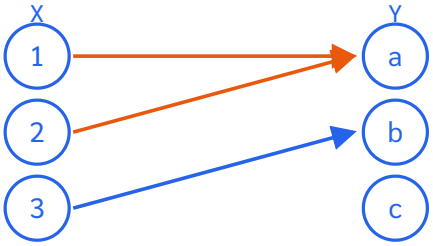
	a	b	c
1	1	0	0
2	0	1	0
3	0	0	1

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 3 — f_1 สองเงื่อนไขครบ เมื่อทั้ง injective และ surjective จึง f_1 เป็น bijective

บรรทัด 4 — f_2 ไม่เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง $1 \neq 2$ แต่ $f_2(1) = f_2(2) = a$ เป็นตัวแย้ง จึงไม่ injective

① f₂: 1 กับ 2 ชน a



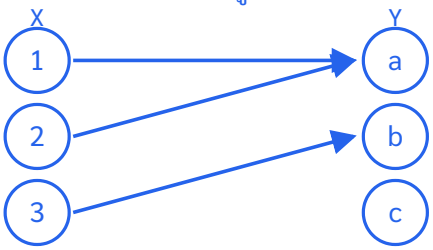
② แถว → คอลัมน์

	a	b	c
1	1	0	0
2	1	0	0
3	0	1	0

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 5 — f_2 ไม่ทั่วถึง $f_2(X) = \{a, b\}$ สมาชิก c ของ Y ไม่มีต้นทาง จึงไม่ surjective

① f₂: c ไม่มีลูกศรเข้า



② แถว → คอลัมน์

	a	b	c
1	1	0	0
2	1	0	0
3	0	1	0

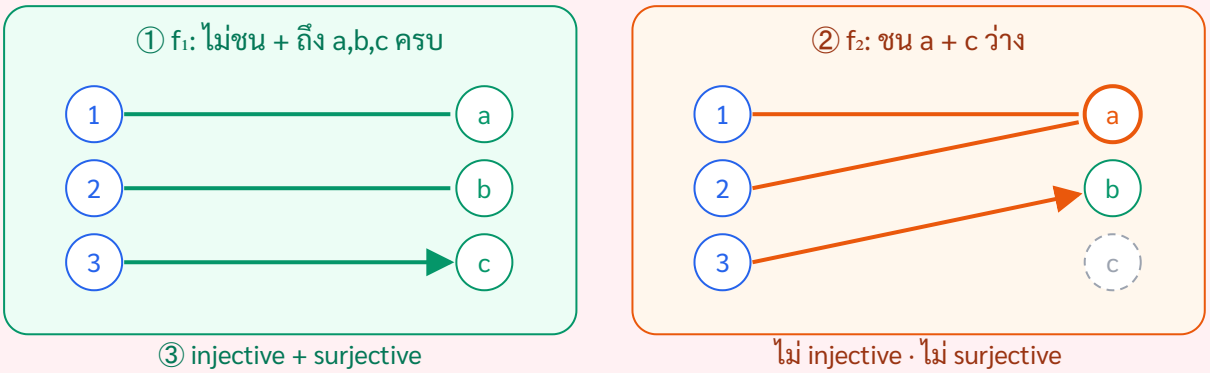
③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 6 — f_2 ไม่ bijective เพราะไม่ผ่านเงื่อนไขทั้งสอง จึงไม่เป็น bijective

ฟังก์ชัน	Injective	Surjective	Bijective
f_1	ใช่	ใช่	ใช่
f_2	ไม่ใช่	ไม่ใช่	ไม่ใช่

เช็กกลับ ตาราง f_1 มี 1 คอลัมน์ละหนึ่งพอดี ส่วน f_2 มีจำนวน 1 ต่อคอลัมน์เป็น 2,1,0 จึงเห็นทั้งการชนที่ a และช่องว่างที่ c

ตรวจปลายลูกศร ไม่ใช่แค่ตรวจว่าต้นมีเส้น



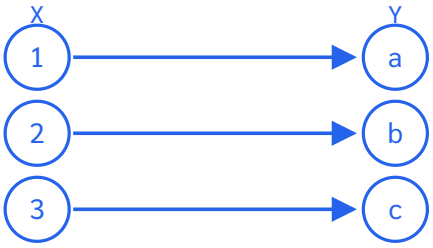
เหตุผล “แต่ละ x มี y เดียว” พิสูจน์เพียงว่าเป็นฟังก์ชัน ไม่ได้พิสูจน์ injective ต้องเพิ่มว่า x ต่างกันไม่ให้ภาพซ้ำกัน และ surjective ต้องตรวจสมาชิก Y ทั้งหมด

Week 6 — 6.2(c) ต่อทางแล้วกลับทาง

โจทย์ 6.2(c) ให้ $g : X \to Y, g = \{(1,a),(2,b),(3,c)\}$ และ $h : Y \to Z, h = \{(a,p),(b,q),(c,r)\}$ หา $h \circ g$ และ $(h \circ g)^{-1}$ วิธีประกอบและฟังก์ชันผกผันอยู่บทที่ 5

บรรทัด 1 — วางสองช่วง อ่าน $h \circ g$ โดยทำ g ก่อนแล้ว h ใช้ปลายทางของ g เป็นต้นทางของ h

① ช่วงแรก g

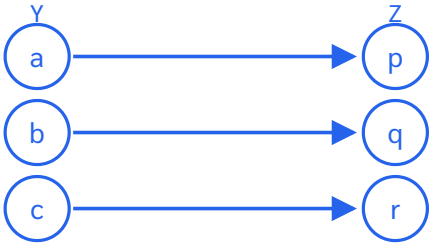


② แถว → คอลัมน์

	a	b	c
1	1	0	0
2	0	1	0
3	0	0	1

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

① ช่วงสอง h



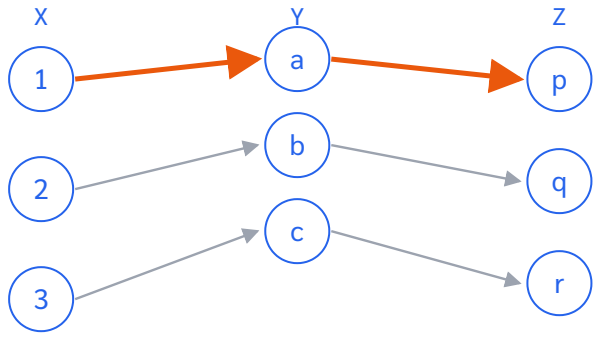
② แถว → คอลัมน์

	p	q	r
a	1	0	0
b	0	1	0
c	0	0	1

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 2 — เริ่มที่ 1 $g(1) = a$ แล้ว $h(a) = p$ จึง $(h \circ g)(1) = p$ เก็บคู่ $(1,p)$

① ตาม 1 → a → p



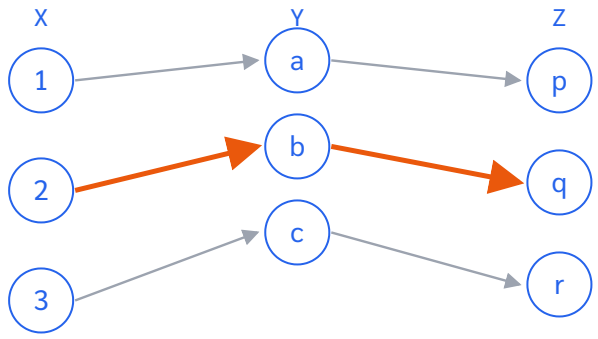
② ผล h ∘ g

	p	q	r
1	1	0	0
2	0	0	0
3	0	0	0

③ เดิน g ก่อน h · เก็บเฉพาะต้นกับปลาย

บรรทัด 3 — เริ่มที่ 2 $g(2) = b$ แล้ว $h(b) = q$ จึง $(h \circ g)(2) = q$ เก็บคู่ $(2, q)$

① ตาม 2 → b → q

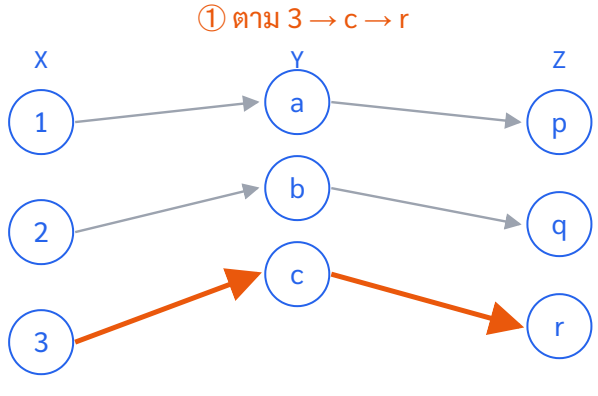


② ผล h ∘ g

	p	q	r
1	1	0	0
2	0	1	0
3	0	0	0

③ เดิน g ก่อน h · เก็บเฉพาะต้นกับปลาย

บรรทัด 4 — เริ่มที่ 3 $g(3) = c$ แล้ว $h(c) = r$ จึง $(h \circ g)(3) = r$ เก็บคู่ $(3, r)$

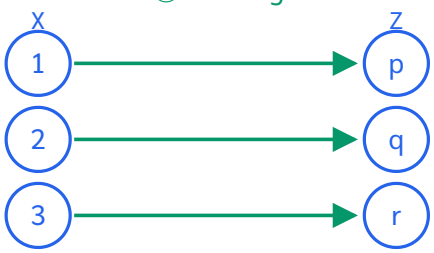


② ผล h ∘ g

	p	q	r
1	1	0	0
2	0	1	0
3	0	0	1

③ เดิน g ก่อน h · เก็บเฉพาะต้นกับปลาย

บรรทัด 5 — รวมผลประกอบ $h \circ g = \{(1,p),(2,q),(3,r)\}$



② แถว → คอลัมน์

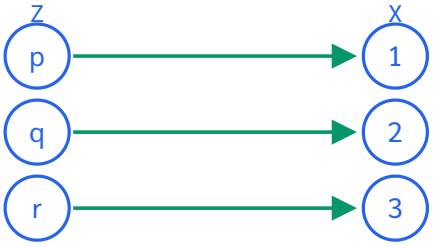
	p	q	r
1	1	0	0
2	0	1	0
3	0	0	1

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 6 — ตรวจว่ากลับเป็นฟังก์ชันได้ ผลประกอบจับ X ไป Z แบบไม่ชนและครบทุกตัวของ Z จึงเป็น bijective กลับแล้วสมาชิก p,q,r แต่ละตัวมีภาพเดียว

บรรทัด 7 — กลับคู่ (1,p) กลับเป็น (p,1); (2,q) กลับเป็น (q,2); (3,r) กลับเป็น (r,3) ได้ $(h \circ g)^{-1} = \{(p,1),(q,2),(r,3)\}$

① กลับจาก Z ไป X



② แถว → คอลัมน์

	1	2	3
p	1	0	0
q	0	1	0
r	0	0	1

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

เช็กกลับ เดินไปแล้วกลับ: $1 \to p \to 1$, $2 \to q \to 2$, $3 \to r \to 3$ ทุกตัวกลับจุดเดิม และเริ่ม p,q,r เดินกลับก่อนแล้วไปใหม่ก็กลับจุดเดิมเช่นกัน

$(h \circ g)^{-1}$ จาก Z ไป X ต้องเขียนตัวอักษร p,q,r เป็นตัวหน้า ถ้าเขียน (1,p) อีกครั้งยังเป็นทิศไป ไม่ใช่ผกผัน

Week 6 — 6.3(a) ใช้ผลต่างพิสูจน์ความสมมูล

โจทย์ 6.3(a) ให้ $X = \{2,3,4,5,6,7,8\}$, $xRy \iff x \equiv y \pmod 3$ กล่าวคือ x−y หารด้วย 3 ลงตัว แสดงว่า R เป็นความสัมพันธ์สมมูล วิธีตรวจอยู่บทที่ 5

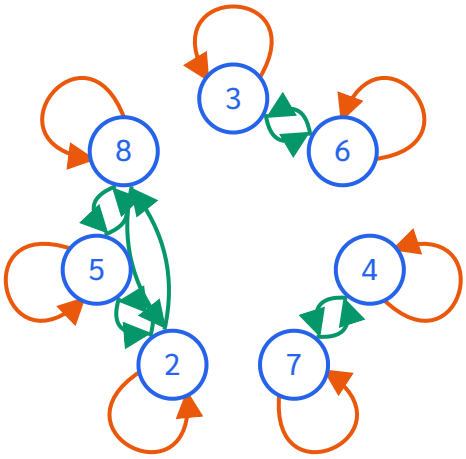
บรรทัด 1 — แยกตามเศษเพื่ออ่านภาพ เศษ 0 คือ $\{3,6\}$; เศษ 1 คือ $\{4,7\}$; เศษ 2 คือ $\{2,5,8\}$ สองตัวสัมพันธ์กันเมื่ออยู่กลุ่มเศษเดียวกัน

① เศษ 0 · ② เศษ 1 · ③ เศษ 2



บรรทัด 2 — สะท้อน ให้ x ใด ๆ ใน X จะมี $x - x = 0 = 3 \cdot 0$ จึง xRx ทุกตัว

① ผลต่างตัวเองเป็นศูนย์



② แถว → คอลัมน์

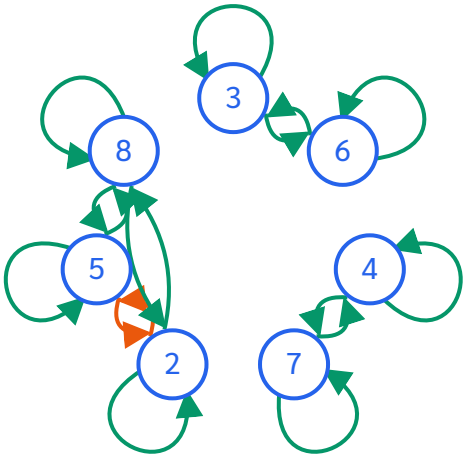
	3	6	4	7	2	5	8
3	1	1	0	0	0	0	0
6	1	1	0	0	0	0	0
4	0	0	1	1	0	0	0
7	0	0	1	1	0	0	0
2	0	0	0	0	1	1	1
5	0	0	0	0	1	1	1
8	0	0	0	0	1	1	1

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 3 — ตั้งสมมติฐานสมมาตร สมมติ xRy จึง $x - y = 3k$ สำหรับจำนวนเต็ม k

บรรทัด 4 — กลับผลต่าง $y - x = -(x - y) = -3k = 3(-k)$ โดย −k ยังเป็นจำนวนเต็ม จึง yRx และ R สมมาตร

① 2 กับ 5 กลับคู่ได้



② แถว → คอลัมน์

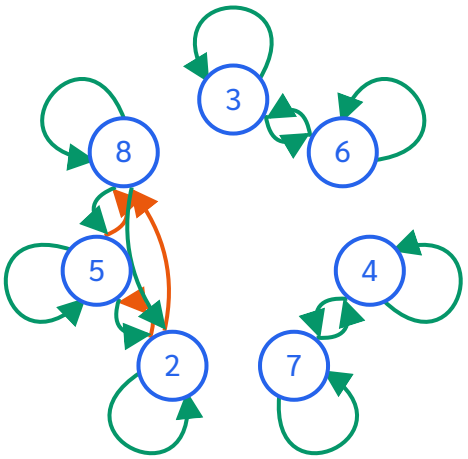
	3	6	4	7	2	5	8
3	1	1	0	0	0	0	0
6	1	1	0	0	0	0	0
4	0	0	1	1	0	0	0
7	0	0	1	1	0	0	0
2	0	0	0	0	1	1	1
5	0	0	0	0	1	1	1
8	0	0	0	0	1	1	1

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 5 — ตั้งสมมติฐานถ่ายทอด สมมติ xRy และ yRz เขียน $x - y = 3m, y - z = 3n$ โดย m,n เป็นจำนวนเต็ม

บรรทัด 6 — บวกเพื่อตัดตัวกลาง $x - z = (x - y) + (y - z) = 3m + 3n = 3(m + n)$ เนื่องจาก m+n เป็นจำนวนเต็ม จึง xRz และ R ถ่ายทอด

① 2 → 5 → 8 มี 2 → 8



② แถว → คอลัมน์

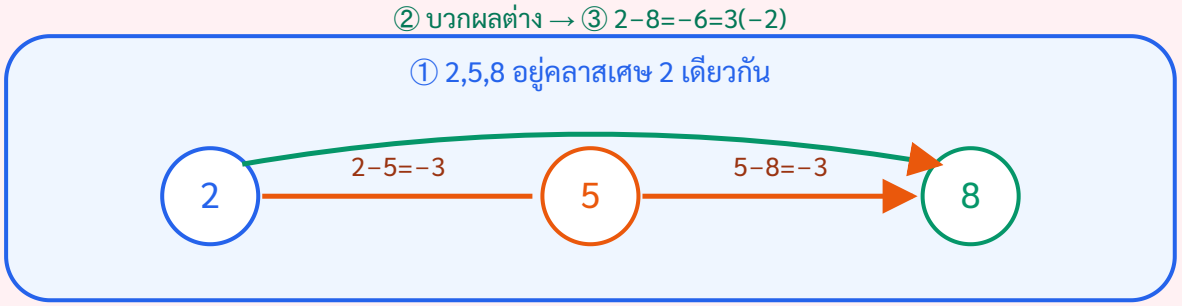
	3	6	4	7	2	5	8
3	1	1	0	0	0	0	0
6	1	1	0	0	0	0	0
4	0	0	1	1	0	0	0
7	0	0	1	1	0	0	0
2	0	0	0	0	1	1	1
5	0	0	0	0	1	1	1
8	0	0	0	0	1	1	1

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 7 — สรุปครบสามเงื่อนไข สะท้อน สมมาตร ถ่ายทอด ผ่านทั้งหมด จึง R เป็นความสัมพันธ์สมมูล

เช็กกลับ ตัวอย่าง $2-5=-3$, $5-8=-3$, $2-8=-6$ ล้วนเป็นจำนวนเท่าของ 3 จึงรองรับเส้นทางที่วงไว้ แต่ข้อพิสูจน์ข้างบนใช้ x,y,z ใด ๆ จึงครอบคลุมทั้ง X

เส้นทางในคลาสเศษ 2



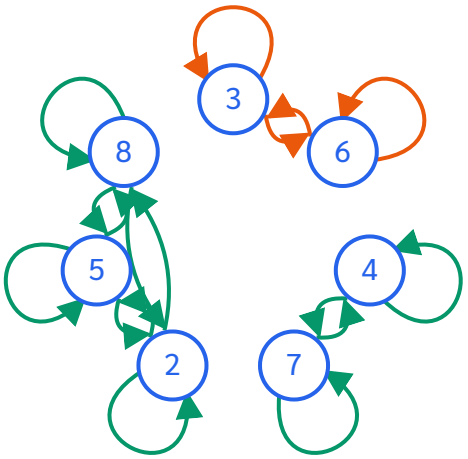
จำนวนที่หารลงตัวอาจติดลบได้ เช่น $-3=3(-1)$ ยังผ่าน อย่าบังคับให้ x,y ต่างต้องหารด้วย 3 ลงตัวเอง: 4 กับ 7 อยู่ใน R เพราะ $4-7=-3$ แม้ทั้งคู่เหลือเศษ 1

Week 6 — 6.3(b) ชั้นสมมูลต้องอยู่ภายใน X

โจทย์ 6.3(b) หาชั้นสมมูลทั้งหมดของ R ในข้อก่อน วิธีอ่านชั้นจากเศษเหลืออยู่บทที่ 5

บรรทัด 1 — ชั้นเศษ 0 สมาชิกของ X ที่มีเศษเท่ากับ 3 คือ 3 และ 6 จึง $[3] = [6] = \{3, 6\}$

① ชั้นเศษ 0



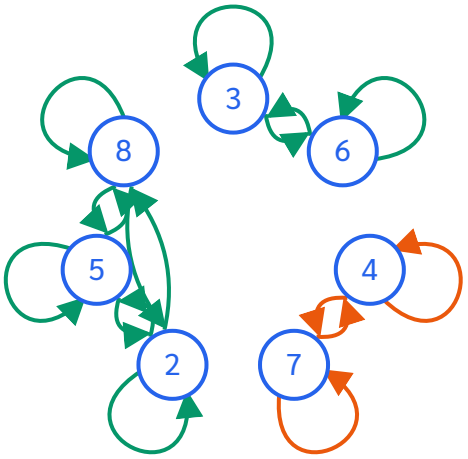
② แถว → คอลัมน์

	3	6	4	7	2	5	8
3	1	1	0	0	0	0	0
6	1	1	0	0	0	0	0
4	0	0	1	1	0	0	0
7	0	0	1	1	0	0	0
2	0	0	0	0	1	1	1
5	0	0	0	0	1	1	1
8	0	0	0	0	1	1	1

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 2 — ชั้นเศษ 1 สมาชิกที่มีเศษเท่ากับ 4 คือ 4 และ 7 จึง $[4] = [7] = \{4, 7\}$

① ชั้นเศษ 1



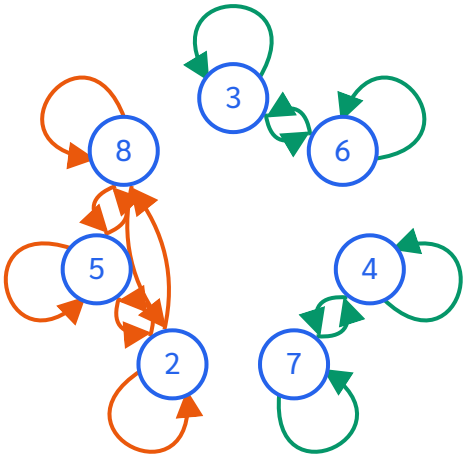
② แถว → คอลัมน์

	3	6	4	7	2	5	8
3	1	1	0	0	0	0	0
6	1	1	0	0	0	0	0
4	0	0	1	1	0	0	0
7	0	0	1	1	0	0	0
2	0	0	0	0	1	1	1
5	0	0	0	0	1	1	1
8	0	0	0	0	1	1	1

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 3 — ชั้นเศษ 2 สมาชิกที่มีเศษเท่ากับ 2 คือ 2,5,8 จึง $[2] = [5] = [8] = \{2, 5, 8\}$

① ชั้นเศษ 2



② แถว → คอลัมน์

	3	6	4	7	2	5	8
3	1	1	0	0	0	0	0
6	1	1	0	0	0	0	0
4	0	0	1	1	0	0	0
7	0	0	1	1	0	0	0
2	0	0	0	0	1	1	1
5	0	0	0	0	1	1	1
8	0	0	0	0	1	1	1

③ ลูกศรมี = 1 · ไม่มี = 0

บรรทัด 4 — เขียนเฉพาะชั้นต่างกัน $X/R = \{\{3,6\},\{4,7\},\{2,5,8\}\}$ มีสามชั้น

① [3]=[6] · ② [4]=[7] · ③ [2]=[5]=[8]



เช็กกลับ ชั้นทั้งสามไม่ทับกันและรวมเป็น $\{2,3,4,5,6,7,8\} = X$ จำนวนสมาชิก $2+2+3=7$ ทุกตัวได้หนึ่งชั้นพอดี

ต้องจำกัดอยู่ใน X อย่าเติม 0 หรือ 9 ลงในชั้นเศษ 0 แม้มีเศษถูกต้อง เพราะทั้งสองไม่อยู่ใน X ของโจทย์ และอย่าเพิ่ม 1 ลงในชั้นเศษ 1 ด้วยเหตุผลเดียวกัน

ภาคผนวก ง · เฉลยข้อสอบฝึก

เฉลย Topic 1–3 ของ Exercise-FirstHalf ครบตามขอบเขต Week 1–6 ส่วน Topic 4 ที่หน้าต้นฉบับ 15–16 เป็น Week 7 จึงไม่รวมในเล่มนี้

Topic 1 · เซตและตรรกศาสตร์

วิธีพื้นฐานอยู่บทที่ 1–2 ที่นี่ลงมือทำตามโจทย์ทีละขั้น สีฟ้าคือของตั้งต้น สีส้มคือขั้นที่กำลังทำ สีเขียวคือผลที่ได้

ข้อ 1 · หาเซตจากสมาชิกที่กำหนด

กำหนด U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, A = {1, 4, 7, 10}, B = {1, 2, 3, 4, 5}, C = {2, 4, 6, 8}

(a) A∪B

ขั้น 1 · เก็บสมาชิกจาก A หรือ B {1, 2, 3, 4, 5, 7, 10}



เช็กกลับ: ไล่สมาชิก 1–10 ตามวงกลมแถวล่าง ตัวสีเขียวต้องผ่านเงื่อนไข A∪B และตัวสีเทาต้องไม่ผ่าน

(b) B∩C

ขั้น 1 · เก็บเฉพาะตัวที่อยู่ใน C ด้วย {2, 4}



เช็กกลับ: ไล่สมาชิก 1–10 ตามวงกลมแถวล่าง ตัวสีเขียวต้องผ่านเงื่อนไข B∩C และตัวสีเทาต้องไม่ผ่าน

(c) A−B

ขั้น 1 · ตัดตัวที่อยู่ใน B {7, 10}



เช็กกลับ: ไล่สมาชิก 1–10 ตามวงกลมแถวล่าง ตัวสีเขียวต้องผ่านเงื่อนไข A−B และตัวสีเทาต้องไม่ผ่าน

(d) B−A

ขั้น 1 · ตัดตัวที่อยู่ใน A {2, 3, 5}



เช็กกลับ: ไล่สมาชิก 1–10 ตามวงกลมแถวล่าง ตัวสีเขียวต้องผ่านเงื่อนไข B−A และตัวสีเทาต้องไม่ผ่าน

(e) $\bar{A}$

ขั้น 1 · ตัดสมาชิก A ออกจาก U {2, 3, 5, 6, 8, 9}



เช็กกลับ: ไล่สมาชิก 1–10 ตามวงกลมแถวล่าง ตัวสีเขียวต้องผ่านเงื่อนไข $\bar{A}$ และตัวสีเทาต้องไม่ผ่าน

(f) U − C

ขั้น 1 · ตัดสมาชิก C {1, 3, 5, 7, 9, 10}



เช็กกลับ: ไล่สมาชิก 1–10 ตามวงกลมแถวล่าง ตัวสีเขียวต้องผ่านเงื่อนไข U − C และตัวสีเทาต้องไม่ผ่าน

(g) $\bar{U}$

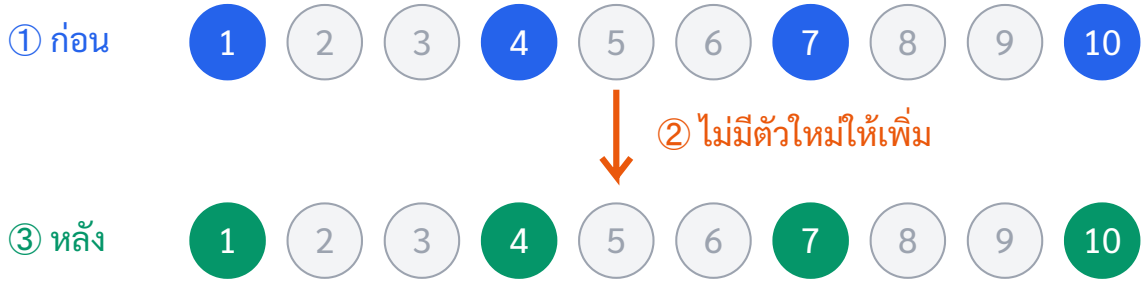
ขั้น 1 · ตัดสมาชิก U ทั้งหมด ∅



เช็กกลับ: ไล่สมาชิก 1–10 ตามวงกลมแถวล่าง ตัวสีเขียวต้องผ่านเงื่อนไข $\bar{U}$ และตัวสีเทาต้องไม่ผ่าน

(h) $A \cup \emptyset$

ขั้น 1 · ไม่มีตัวใหม่ให้เพิ่ม {1, 4, 7, 10}



เช็กกลับ: ไล่สมาชิก 1–10 ตามวงกลมแถวล่าง ตัวสีเขียวต้องผ่านเงื่อนไข $A \cup \emptyset$ และตัวสีเทาต้องไม่ผ่าน

(i) $B \cup \emptyset$

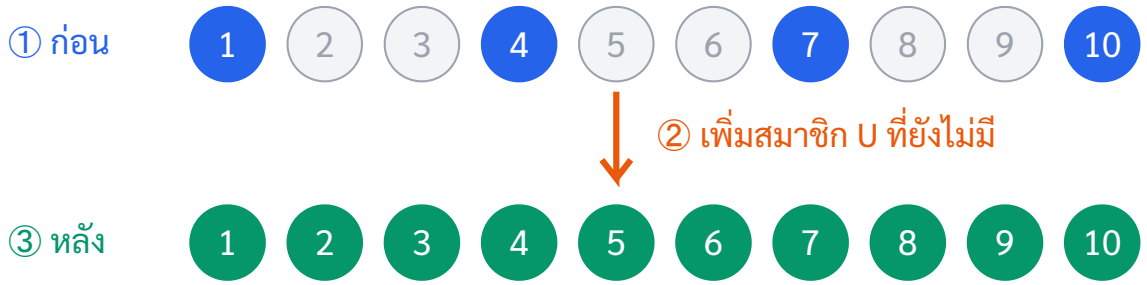
ขั้น 1 · ไม่มีตัวใหม่ให้เพิ่ม {1, 2, 3, 4, 5}



เช็กกลับ: ไล่สมาชิก 1–10 ตามวงกลมแถวล่าง ตัวสีเขียวต้องผ่านเงื่อนไข $B \cup \emptyset$ และตัวสีเทาต้องไม่ผ่าน

(j) A∪U

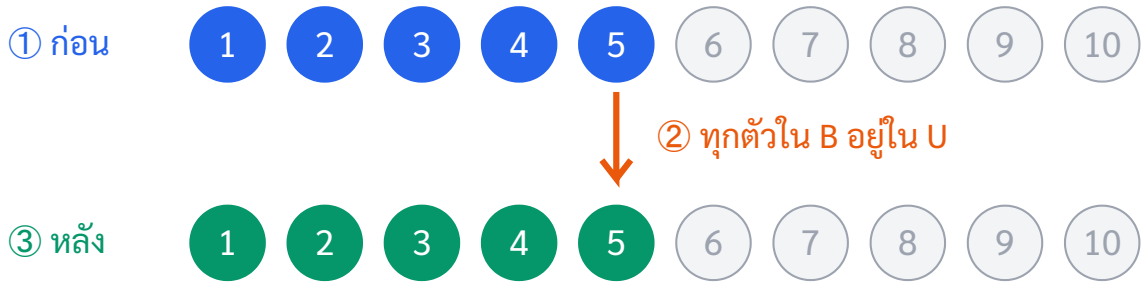
ขั้น 1 · เพิ่มสมาชิก U ที่ยังไม่มี {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}



เช็กกลับ: ไล่สมาชิก 1–10 ตามวงกลมแถวล่าง ตัวสีเขียวต้องผ่านเงื่อนไข A∪U และตัวสีเทาต้องไม่ผ่าน

(k) B∩U

ขั้น 1 · ทุกตัวใน B อยู่ใน U {1, 2, 3, 4, 5}



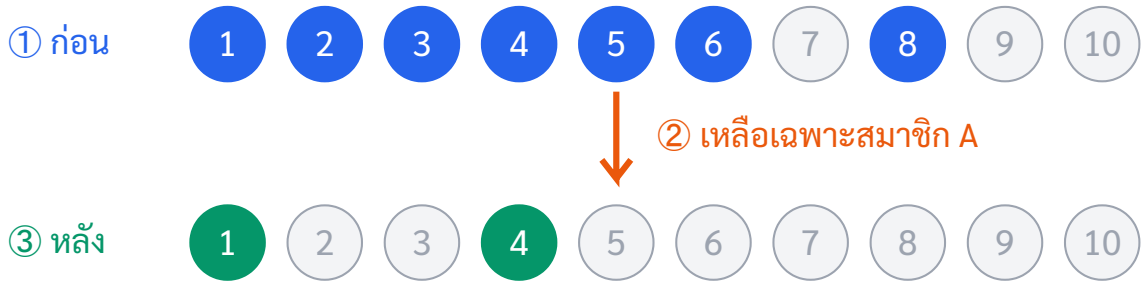
เช็กกลับ: ไล่สมาชิก 1–10 ตามวงกลมแถวล่าง ตัวสีเขียวต้องผ่านเงื่อนไข B∩U และตัวสีเทาต้องไม่ผ่าน

(l) A∩(B∪C)

ขั้น 1 · ทำวงเล็บ: รวม B กับ C {1, 2, 3, 4, 5, 6, 8}



ขั้น 2 · เหลือเฉพาะสมาชิก A {1, 4}



เช็กกลับ: ไล่สมาชิก 1–10 ตามวงกลมแถวล่าง ตัวสีเขียวต้องผ่านเงื่อนไข A∩(B∪C) และตัวสีเทาต้องไม่ผ่าน

(m) B̄∩(C−A)

ขั้น 1 · ทำวงเล็บ: ตัดสมาชิก A {2, 6, 8}



ขั้น 2 · ตัดสมาชิก B ด้วย {6, 8}



เช็กกลับ: ไล่สมาชิก 1–10 ตามวงกลมแถวล่าง ตัวสีเขียวต้องผ่านเงื่อนไข B̄∩(C−A) และตัวสีเทาต้องไม่ผ่าน

(n) (A∩B)−C

ขั้น 1 · เก็บตัวที่อยู่ B {1, 4}



ขั้น 2 · ตัดสมาชิก C {1}

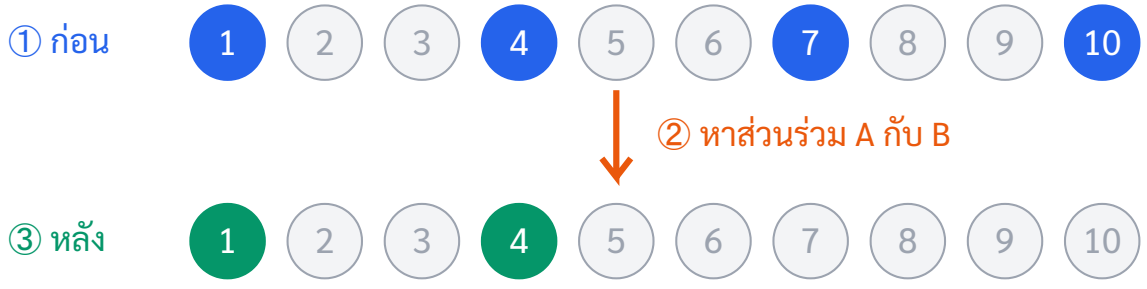


เช็กกลับ: ไล่สมาชิก 1–10 ตามวงกลมแถวล่าง ตัวสีเขียวต้องผ่านเงื่อนไข (A∩B)−C และตัวสีเทาต้องไม่ผ่าน

(o) $\overline{A \cap B} \cup C$

ขีดบนครอบ A∩B ตามภาพต้นฉบับ จึงหาส่วนเติมเต็มหลังหาส่วนร่วม แล้วค่อยรวม C

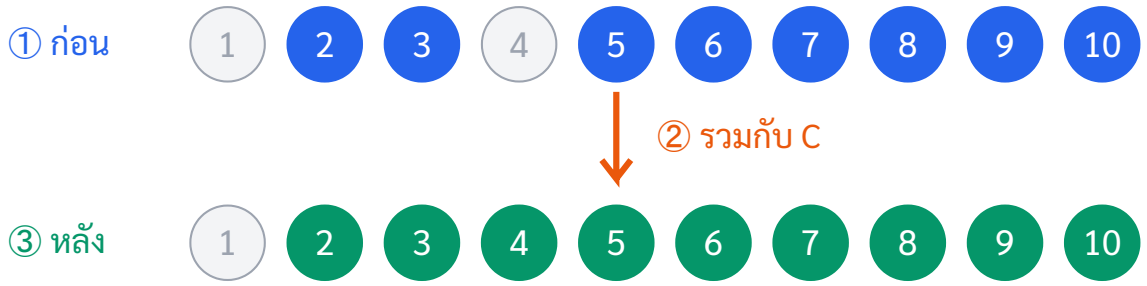
ขั้น 1 · หาส่วนร่วม A กับ B {1, 4}



ขั้น 2 · หาส่วนเติมเต็มของ A∩B {2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10}



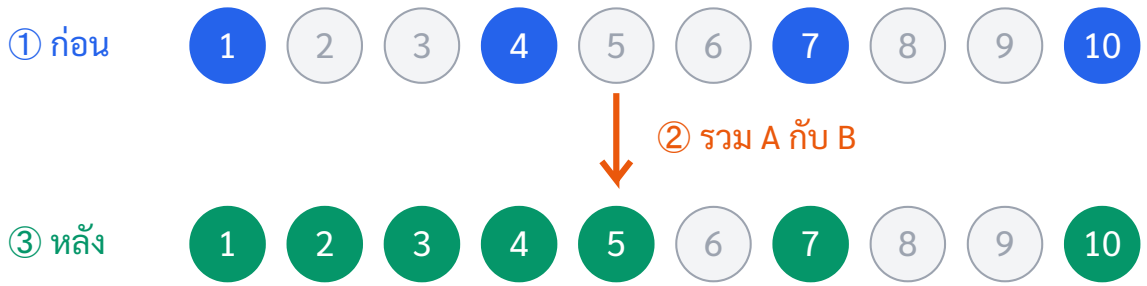
ขั้น 3 · รวมกับ C {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}



เช็กกลับ: ไล่สมาชิก 1–10 ตามวงกลมแถวล่าง ตัวสีเขียวต้องผ่านเงื่อนไข $\overline{A \cap B} \cup C$ และตัวสีเทาต้องไม่ผ่าน

(p) (A∪B)−(C−B)

ขั้น 1 · รวม A กับ B {1, 2, 3, 4, 5, 7, 10}



ขั้น 2 · แยกหา C−B {6, 8}



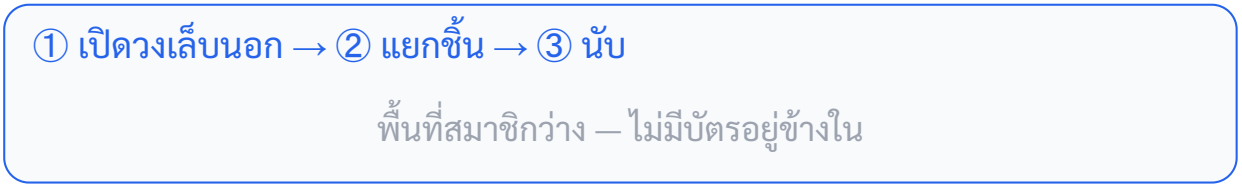
ขั้น 3 · ตัดเฉพาะตัวใน C−B {1, 2, 3, 4, 5, 7, 10}



เช็กกลับ: ไล่สมาชิก 1–10 ตามวงกลมแถวล่าง ตัวสีเขียวต้องผ่านเงื่อนไข (A∪B)−(C−B) และตัวสีเทาต้องไม่ผ่าน

ข้อ 2 · นับสมาชิก

แยกของทีละชิ้น ∅ ไม่มีสมาชิกอยู่ข้างใน จึงนับได้ 0



เช็กกลับ: แต่ละกรอบเป็นสมาชิกหนึ่งตัว ห้ามเปิดกรอบย่อยแล้วเอาของข้างในมานับรวม

ข้อ 3 · นับสมาชิก

แยกของทีละชิ้น {∅} มีสิ่งของหนึ่งชิ้นคือเซตว่าง จึงนับได้ 1

① เปิดวงเล็บนอก → ② แยกชิ้น → ③ นับ

∅

เช็กกลับ: แต่ละกรอบเป็นสมาชิกหนึ่งตัว ห้ามเปิดกรอบย่อยแล้วเอาของข้างในมานับรวม

ข้อ 4 · นับสมาชิก

แยกของทีละชิ้น ตัว a ที่เขียนซ้ำไม่นับเพิ่ม เหลือ a,b,c จึงนับได้ 3

① เปิดวงเล็บนอก → ② แยกชิ้น → ③ นับ

a	b	c

เช็กกลับ: แต่ละกรอบเป็นสมาชิกหนึ่งตัว ห้ามเปิดกรอบย่อยแล้วเอาของข้างในมานับรวม

ข้อ 5 · นับสมาชิก

แยกของทีละชิ้น นับสิ่งที่อยู่ระดับวงเล็บนอก {a} เป็นหนึ่งชิ้นที่ต่างจาก a จึงนับได้ 5

① เปิดวงเล็บนอก → ② แยกชิ้น → ③ นับ

{a}	{a,b}	{a,c}	a	b

เช็กกลับ: แต่ละกรอบเป็นสมาชิกหนึ่งตัว ห้ามเปิดกรอบย่อยแล้วเอาของข้างในมานับรวม

ข้อ 6 · สองเซตเท่ากันหรือไม่

(a) เท่ากัน ตัดเลข 2 ที่ซ้ำ เหลือ {1,2,3} ทั้งสองฝั่ง

① เงื่อนไข/ขั้น	② ค่าหรือข้อความ	③ ได้อะไร
① ซ้าย	{1,2,2,3}	ตั้งต้น
② ขวา	{1,2,3}	เปรียบเทียบ
③ คำตอบ	เท่ากัน	สมาชิกตรงกันทุกตัว?

(b) เท่ากัน ตัดตัวซ้ำแล้วเรียง เหลือ {1,3} ทั้งสองฝั่ง

① เงื่อนไข/ขั้น	② ค่าหรือข้อความ	③ ได้อะไร
① ซ้าย	{1,1,3}	ตั้งต้น
② ขวา	{3,3,1}	เปรียบเทียบ
③ คำตอบ	เท่ากัน	สมาชิกตรงกันทุกตัว?

(c) ไม่เท่ากัน ย้ายข้าง: $x^2+x-2=0$ → แยกตัวประกอบ: $(x+2)(x-1)=0$ → $x=-2$ หรือ 1

① เงื่อนไข/ขั้น	② ค่าหรือข้อความ	③ ได้อะไร
① ซ้าย	$x^2+x=2$	ตั้งต้น
② ขวา	{1,−1}	เปรียบเทียบ
③ คำตอบ	ไม่เท่ากัน	สมาชิกตรงกันทุกตัว?

(d) ไม่เท่ากัน เลือก $x=1/2$: อยู่ฝั่งซ้าย แต่ไม่มีอยู่ฝั่งขวา

① เงื่อนไข/ขั้น	② ค่าหรือข้อความ	③ ได้อะไร
① ซ้าย	$0<x\le 2,\ x\in\mathbb{R}$	ตั้งต้น
② ขวา	$\{1,2\}$	เปรียบเทียบ
③ คำตอบ	ไม่เท่ากัน	สมาชิกตรงกันทุกตัว?

เช็กกลับ: ข้อ (c) แทน -2 แล้วได้ $4-2=2$ แต่แทน -1 ได้ $1-1=0$ จึงใช้ -1 แทน -2 ไม่ได้ ข้อ (d) ต้องนับจำนวนจริงระหว่าง 0 กับ 2 ด้วย

ข้อ 7 · ไล่ทุกตัวเลือกตามตำแหน่ง

(a) ล็อกช่องซ้ายแล้วไล่ช่องขวา แต่ละช่องเลือกจากเซตของช่องนั้น เขียนตามลำดับ ห้ามสลับที่

① แถว	ช่อง 1	ช่อง 2	③ สมาชิกที่ได้
1	1	a	(1, a)
2	1	b	(1, b)
3	1	c	(1, c)
4	2	a	(2, a)
5	2	b	(2, b)
6	2	c	(2, c)

รวม: {(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)}

(b) ล็อกช่องซ้ายแล้วไล่ช่องขวา แต่ละช่องเลือกจากเซตของช่องนั้น เขียนตามลำดับ ห้ามสลับที่

① แถว	ช่อง 1	ช่อง 2	③ สมาชิกที่ได้
1	a	1	(a, 1)
2	a	2	(a, 2)
3	b	1	(b, 1)
4	b	2	(b, 2)
5	c	1	(c, 1)
6	c	2	(c, 2)

รวม: {(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)}

(c) ล็อกช่องซ้ายแล้วไล่ช่องขวา แต่ละช่องเลือกจากเซตของช่องนั้น เขียนตามลำดับ ห้ามสลับที่

① แถว	ช่อง 1	ช่อง 2	③ สมาชิกที่ได้
1	1	1	(1, 1)
2	1	2	(1, 2)
3	2	1	(2, 1)
4	2	2	(2, 2)

รวม: {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)}

(d) ล็อกช่องซ้ายแล้วไล่ช่องขวา แต่ละช่องเลือกจากเซตของช่องนั้น เขียนตามลำดับ ห้ามสลับที่

① แถว	ช่อง 1	ช่อง 2	③ สมาชิกที่ได้
1	a	a	(a, a)
2	a	b	(a, b)
3	a	c	(a, c)
4	b	a	(b, a)
5	b	b	(b, b)
6	b	c	(b, c)
7	c	a	(c, a)
8	c	b	(c, b)
9	c	c	(c, c)

รวม: {(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)}

เช็กกลับ: จำนวนแถวต้องเท่ากับผลคูณจำนวนตัวเลือกทุกช่อง ไม่มีแถวซ้ำและไม่มีแถวที่หยิบตัวผิดเซต

ข้อ 8 · ไล่ทุกตัวเลือกตามตำแหน่ง

(a) ล็อกช่องซ้ายแล้วไล่ช่องขวา แต่ละช่องเลือกจากเซตของช่องนั้น เขียนตามลำดับ ห้ามสลับที่

① แถว	ช่อง 1	ช่อง 2	ช่อง 3	③ สมาชิกที่ได้
1	1	a	α	(1, a, α)
2	1	a	β	(1, a, β)
3	2	a	α	(2, a, α)
4	2	a	β	(2, a, β)

รวม: {(1, a, α), (1, a, β), (2, a, α), (2, a, β)}

(b) ล็อกช่องซ้ายแล้วไล่ช่องขวา แต่ละช่องเลือกจากเซตของช่องนั้น เขียนตามลำดับ ห้ามสลับที่

① แถว	ช่อง 1	ช่อง 2	ช่อง 3	③ สมาชิกที่ได้
1	1	a	a	(1, a, a)
2	2	a	a	(2, a, a)

รวม: {(1, a, a), (2, a, a)}

(c) ล็อกช่องซ้ายแล้วไล่ช่องขวา แต่ละช่องเลือกจากเซตของช่องนั้น เขียนตามลำดับ ห้ามสลับที่

① แถว	ช่อง 1	ช่อง 2	ช่อง 3	③ สมาชิกที่ได้
1	1	1	1	(1, 1, 1)
2	1	1	2	(1, 1, 2)
3	1	2	1	(1, 2, 1)
4	1	2	2	(1, 2, 2)
5	2	1	1	(2, 1, 1)
6	2	1	2	(2, 1, 2)
7	2	2	1	(2, 2, 1)
8	2	2	2	(2, 2, 2)

รวม: {(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (1, 2, 2), (2, 1, 1), (2, 1, 2), (2, 2, 1), (2, 2, 2)}

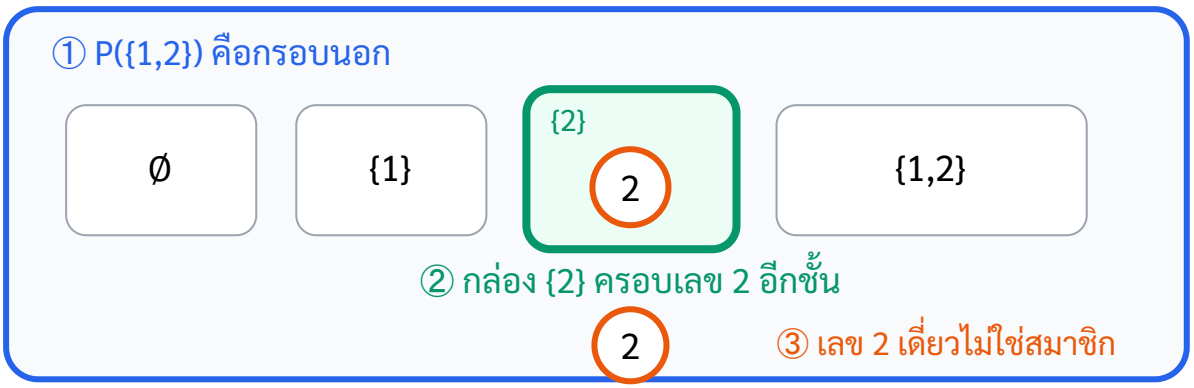
(d) ล็อกช่องซ้ายแล้วไล่ช่องขวา แต่ละช่องเลือกจากเซตของช่องนั้น เขียนตามลำดับ ห้ามสลับที่

① แถว	ช่อง 1	ช่อง 2	ช่อง 3	ช่อง 4	③ สมาชิกที่ได้
1	a	1	a	α	(a, 1, a, α)
2	a	1	a	β	(a, 1, a, β)
3	a	2	a	α	(a, 2, a, α)
4	a	2	a	β	(a, 2, a, β)

รวม: {(a, 1, a, α), (a, 1, a, β), (a, 2, a, α), (a, 2, a, β)}

เช็กกลับ: จำนวนแถวต้องเท่ากับผลคูณจำนวนตัวเลือกทุกช่อง ไม่มีแถวซ้ำและไม่มีแถวที่หยิบตัวผิดเซต

ข้อ 9 · แยก “เป็นสมาชิก” กับ “เป็นสับเซต”



จึง $\{2\}\in P(\{1,2\})$ แต่ $\{2\}\not\subset P(\{1,2\})$

(a) {x}⊆{x} เปิดกล่องซ้าย พบ x; กล่องขวามี x

① เงื่อนไข/ขั้น	② ค่าหรือข้อความ	③ ได้อะไร
① ตรวจ	{x}⊆{x}	ดูเครื่องหมาย
② สิ่งที่หา	ของในกล่อง	เทียบระดับ
③ ตัดสิน	T	ผ่าน/ไม่ผ่าน

(b) {x}∈{x} ขวามี x เป็นสมาชิก ไม่ได้มีทั้งกล่อง {x}

① เงื่อนไข/ขั้น	② ค่าหรือข้อความ	③ ได้อะไร
① ตรวจ	{x}∈{x}	ดูเครื่องหมาย
② สิ่งที่หา	ทั้งกล่อง	เทียบระดับ
③ ตัดสิน	F	ผ่าน/ไม่ผ่าน

(c) {x}∈{x,{x}} ขวามีทั้งกล่อง {x} อยู่หนึ่งชิ้น

① เงื่อนไข/ขั้น	② ค่าหรือข้อความ	③ ได้อะไร
① ตรวจ	{x}∈{x,{x}}	ดูเครื่องหมาย
② สิ่งที่หา	ทั้งกล่อง	เทียบระดับ
③ ตัดสิน	T	ผ่าน/ไม่ผ่าน

(d) {x}⊆{x,{x}} เปิดกล่องซ้าย พบ x ซึ่งมีอยู่ทางขวา

① เงื่อนไข/ขั้น	② ค่าหรือข้อความ	③ ได้อะไร
① ตรวจ	{x}⊆{x,{x}}	ดูเครื่องหมาย
② สิ่งที่หา	ของในกล่อง	เทียบระดับ
③ ตัดสิน	T	ผ่าน/ไม่ผ่าน

(e) {2}⊆P({1,2}) ต้องหาเลข 2 เป็นสมาชิกของเพาเวอร์เซต แต่ในนั้นมีแต่เซต

① เงื่อนไข/ขั้น	② ค่าหรือข้อความ	③ ได้อะไร
① ตรวจ	{2}⊆P({1,2})	ดูเครื่องหมาย
② สิ่งที่หา	ของในกล่อง	เทียบระดับ
③ ตัดสิน	F	ผ่าน/ไม่ผ่าน

(f) {2}∈P({1,2}) มีทั้งกล่อง {2} เป็นหนึ่งในสับเซต

① เงื่อนไข/ขั้น	② ค่าหรือข้อความ	③ ได้อะไร
① ตรวจ	{2}∈P({1,2})	ดูเครื่องหมาย
② สิ่งที่หา	ทั้งกล่อง	เทียบระดับ
③ ตัดสิน	T	ผ่าน/ไม่ผ่าน

เช็กกลับ: P({1,2})={∅,{1},{2},{1,2}} สังเกตว่าไม่มีเลข 2 โดด ๆ เป็นสมาชิก

ข้อ 10 · เขียนเพาเวอร์เซตและสับเซตแท้

เลือกไว้ 0 ตัว ไล่ชุดที่ไม่ซ้ำกันในกลุ่มนี้

① เลือก/ไม่เลือก → ② ชุดขนาดเดียวกัน → ③ เก็บ

∅

เลือกไว้ 1 ตัว ไล่ชุดที่ไม่ซ้ำกันในกลุ่มนี้

① เลือก/ไม่เลือก → ② ชุดขนาดเดียวกัน → ③ เก็บ

{a} {b}

เลือกไว้ 2 ตัว ไล่ชุดที่ไม่ซ้ำกันในกลุ่มนี้

① เลือก/ไม่เลือก → ② ชุดขนาดเดียวกัน → ③ เก็บ

{a, b}

สับเซตแท้: ทุกชุดข้างบนยกเว้น {a, b} เพราะคำว่าแท้ห้ามเท่ากับเซตตั้งต้น

เช็กกลับ: แต่ละสมาชิกเลือกเข้า/ไม่เข้าได้สองทาง จึงได้ 4 ชุด และสับเซตแท้ 3 ชุด

ข้อ 11 · เขียนเพาเวอร์เซตและสับเซตแท้

เลือกไว้ 0 ตัว ไล่ชุดที่ไม่ซ้ำกันในกลุ่มนี้

① เลือก/ไม่เลือก → ② ชุดขนาดเดียวกัน → ③ เก็บ

∅

เลือกไว้ 1 ตัว ไล่ชุดที่ไม่ซ้ำกันในกลุ่มนี้

① เลือก/ไม่เลือก → ② ชุดขนาดเดียวกัน → ③ เก็บ

{a} {b} {c} {d}

เลือกไว้ 2 ตัว ไล่ชุดที่ไม่ซ้ำกันในกลุ่มนี้

① เลือก/ไม่เลือก → ② ชุดขนาดเดียวกัน → ③ เก็บ

{a, b} {a, c} {a, d} {b, c} {b, d}

{c, d}

เลือกไว้ 3 ตัว ไล่ชุดที่ไม่ซ้ำกันในกลุ่มนี้

① เลือก/ไม่เลือก → ② ชุดขนาดเดียวกัน → ③ เก็บ

{a, b, c} {a, b, d} {a, c, d} {b, c, d}

เลือกไว้ 4 ตัว ไล่ชุดที่ไม่ซ้ำกันในกลุ่มนี้

① เลือก/ไม่เลือก → ② ชุดขนาดเดียวกัน → ③ เก็บ

{a, b, c, d}

สับเซตแท้: ทุกชุดข้างบนยกเว้น {a, b, c, d} เพราะคำว่าแท้ห้ามเท่ากับเซตตั้งต้น

เช็กกลับ: แต่ละสมาชิกเลือกเข้า/ไม่เข้าได้สองทาง จึงได้ 16 ชุด และสับเซตแท้ 15 ชุด

ข้อ 12 · เมื่อ X มี 10 สมาชิก

นับทางเลือก สมาชิกแต่ละตัวมีสองทางอิสระ คือเลือกหรือไม่เลือก จึงคูณสองสิบครั้ง

① ตำแหน่ง	② ทางเลือก	③ จำนวนชุดสะสม
1	เข้า / ไม่เข้า	2
2	เข้า / ไม่เข้า	4
3	เข้า / ไม่เข้า	8
4	เข้า / ไม่เข้า	16
5	เข้า / ไม่เข้า	32
6	เข้า / ไม่เข้า	64
7	เข้า / ไม่เข้า	128
8	เข้า / ไม่เข้า	256
9	เข้า / ไม่เข้า	512
10	เข้า / ไม่เข้า	1024

เช็กกลับ: P(X) มี 1024 สมาชิก ตัด X เองเพียงหนึ่งชุด เหลือสับเซตแท้ 1023 ชุด

ข้อ 13 · เมื่อ X มี n สมาชิก

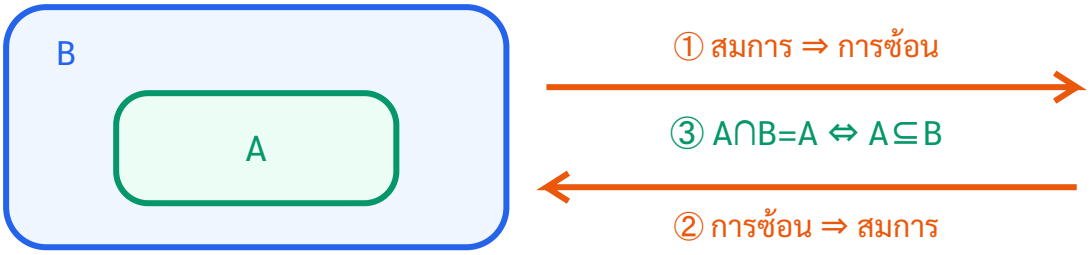
ขยายเหตุผลเดิม $2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^n$ แล้วตัดเซตเต็มหนึ่งชุด ได้ $2^n - 1$

① เงื่อนไข/ขั้น	② ค่าหรือข้อความ	③ ได้อะไร
① ทุกตำแหน่ง	เข้า / ไม่เข้า	2 ทาง
② ครบ n ตำแหน่ง	2^n	ทุกสับเซต
③ ตัดชุดเต็ม	$2^n - 1$	สับเซตแท้

เช็กกลับ: ถ้า n=0 จะมีเพาเวอร์เซต {Ø} แต่ไม่มีสับเซตแท้ สูตรได้ 1−1=0 ตรงกัน

ข้อ 14 · เงื่อนไขบอกความสัมพันธ์ระหว่างเซต

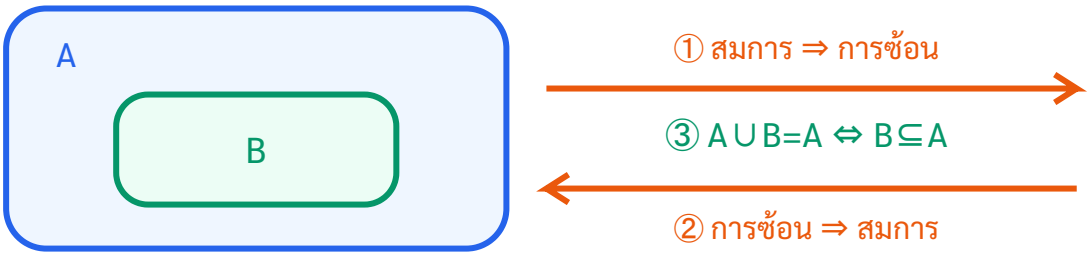
(a) $A \cap B = A$ ทุกตัวของ A ต้องผ่านการกรองด้วย B จึงต้องอยู่ใน B ทั้งหมด



ลูกศรทั้งสองทิศใช้สมาชิกเดียวกันตรวจกลับ

① เงื่อนไข/ขั้น	② ค่าหรือข้อความ	③ ได้อะไร
① ผลที่โจทย์ให้	$A \cap B = A$	ตั้งต้น
② เงื่อนไขที่จำเป็น	$A \subseteq B$	ห้ามมีตัวหลุด
③ ใส่เงื่อนไขกลับ	$A \cap B = A$	เพียงพอด้วย

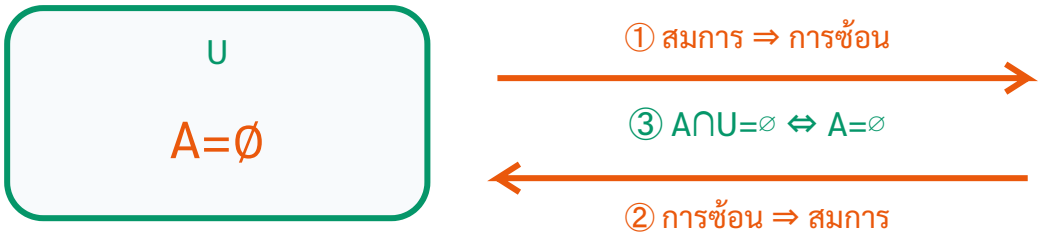
(b) $A \cup B = A$ รวม B แล้วไม่มีของใหม่ แปลว่าทุกตัวของ B อยู่ใน A แล้ว



ลูกศรทั้งสองทิศใช้สมาชิกเดียวกันตรวจกลับ

① เงื่อนไข/ขั้น	② ค่าหรือข้อความ	③ ได้อะไร
① ผลที่โจทย์ให้	$A \cup B = A$	ตั้งต้น
② เงื่อนไขที่จำเป็น	$B \subseteq A$	ห้ามมีตัวหลุด
③ ใส่เงื่อนไขกลับ	$A \cup B = A$	เพียงพอด้วย

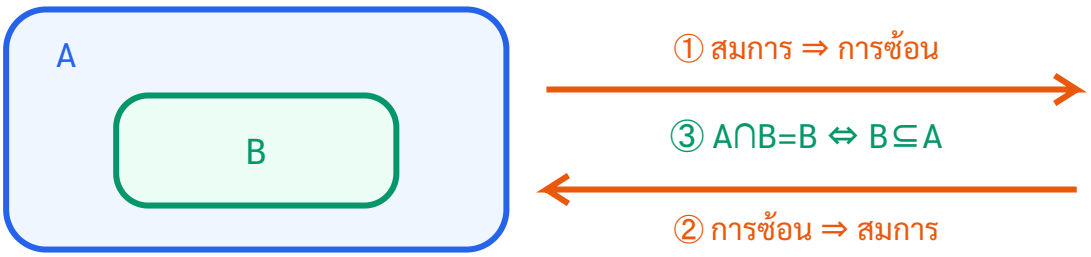
(c) A∩U=Ø A เป็นเซตย่อยของ U การกรองด้วย U ไม่ตัดอะไร จึงเหลือ A และต้องว่าง



ลูกศรทั้งสองทิศใช้สมาชิกเดียวกันตรวจกลับ

① เงื่อนไข/ขั้น	② ค่าหรือข้อความ	③ ได้อะไร
① ผลที่โจทย์ให้	A∩U=Ø	ตั้งต้น
② เงื่อนไขที่จำเป็น	A=Ø	ห้ามมีตัวหลุด
③ ใส่เงื่อนไขกลับ	A∩U=Ø	เพียงพอด้วย

(d) A∩B=B ทุกตัวของ B ต้องอยู่ใน A ด้วย ส่วนร่วมจึงเก็บ B ได้ครบ



ลูกศรทั้งสองทิศใช้สมาชิกเดียวกันตรวจกลับ

① เงื่อนไข/ขั้น	② ค่าหรือข้อความ	③ ได้อะไร
① ผลที่โจทย์ให้	A∩B=B	ตั้งต้น
② เงื่อนไขที่จำเป็น	B⊆A	ห้ามมีตัวหลุด
③ ใส่เงื่อนไขกลับ	A∩B=B	เพียงพอด้วย

เช็กกลับ: แต่ละข้อพิสูจน์สองทิศ: ผลเท่ากันบังคับเงื่อนไข และเงื่อนไขทำให้ผลเท่ากันจริง

ข้อ 15 · ผลต่างสมมาตร

ขั้น 1 รวมสองฝั่ง ได้ {1, 2, 3, 4, 5}



ขั้น 2 หาส่วนที่ซ้ำกัน ได้ {2, 3}



ขั้น 3 ตัดส่วนซ้ำออก ได้ {1, 4, 5}



เช็กกลับ: ได้ {1,4,5} ทุกตัวอยู่เพียงฝั่งเดียว ส่วน 2,3 อยู่ทั้งสองฝั่งจึงถูกตัด

Topic 1 · คำนวณตรรกะและตัวบ่งปริมาณ

ข้อ 16 · ให้ p=F, q=T, r=F

(a) $\neg p \vee \neg q$

แทนค่าจากวงเล็บในออกมา อ่านแถวจากบนลงล่าง แต่ละแถวใช้ค่าที่คำนวณแล้วในแถวก่อน

① ขั้น	② ค่าที่ใช้	③ ผล
¬p	¬F	T
¬q	¬T	F
∨	T∨F	T

ตอบ: T · **เช็กกลับ:** ตรวจเครื่องหมายปฏิเสธทีละชั้น และจำว่า p→q เท็จเฉพาะ T→F

(b) $\neg p \vee q$

แทนค่าจากวงเล็บในออกมา อ่านแถวจากบนลงล่าง แต่ละแถวใช้ค่าที่คำนวณแล้วในแถวก่อน

① ขั้น	② ค่าที่ใช้	③ ผล
¬p	¬F	T
∨	T∨T	T

ตอบ: T · **เช็กกลับ:** ตรวจเครื่องหมายปฏิเสธทีละชั้น และจำว่า p→q เท็จเฉพาะ T→F

(c) $\neg p \vee \neg(q \wedge r)$

แทนค่าจากวงเล็บในออกมา อ่านแถวจากบนลงล่าง แต่ละแถวใช้ค่าที่คำนวณแล้วในแถวก่อน

① ขั้น	② ค่าที่ใช้	③ ผล
q∧r	T∧F	F
¬(q∧r)	¬F	T
¬p	¬F	T
∨	T∨T	T

ตอบ: T · **เช็กกลับ:** ตรวจเครื่องหมายปฏิเสธทีละชั้น และจำว่า p→q เท็จเฉพาะ T→F

(d) $\neg(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)$

แทนค่าจากวงเล็บในออกมา อ่านแถวจากบนลงล่าง แต่ละแถวใช้ค่าที่คำนวณแล้วในแถวก่อน

① ขั้น	② ค่าที่ใช้	③ ผล
p∨q	F∨T	T
¬(p∨q)	¬T	F
¬p∨r	T∨F	T
∧	F∧T	F

ตอบ: F · **เช็กกลับ:** ตรวจเครื่องหมายปฏิเสธทีละชั้น และจำว่า p→q เท็จเฉพาะ T→F

(e) $(p \vee \neg r) \wedge \neg((q \vee r) \vee \neg(r \vee p))$

แทนค่าจากวงเล็บในออกมา อ่านแถวจากบนลงล่าง แต่ละแถวใช้ค่าที่คำนวณแล้วในแถวก่อน

① ขั้น	② ค่าที่ใช้	③ ผล
pV¬r	FvT	T
qVr	TvF	T
rVp	FvF	F
¬(rVp)	¬F	T
วงเล็บใหญ่	TvT	T
ปฏิเสธวงเล็บ	¬T	F
∧ สุดท้าย	T∧F	F

ตอบ: F · **เช็กกลับ:** ตรวจเครื่องหมายปฏิเสธทีละชั้น และจำว่า p→q เท็จเฉพาะ T→F

ข้อ 17 · ตารางค่าความจริงครบทุกแถว

(a) $p \wedge \neg q$ ① ไล่ T/F ทุกชุด → ② คำนวณคอลัมน์กลาง → ③ รวมที่คอลัมน์ผล

p	q	¬q	ผล
T	T	F	F
T	F	T	T
F	T	F	F
F	F	T	F

(b) $(\neg p \vee \neg q) \vee p$ ① ไล่ T/F ทุกชุด → ② คำนวณคอลัมน์กลาง → ③ รวมที่คอลัมน์ผล

p	q	¬p	¬q	¬p∨¬q	ผล
T	T	F	F	F	T
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

(c) $(p \vee q) \wedge \neg p$ ① ไล่ T/F ทุกชุด → ② คำนวณคอลัมน์กลาง → ③ รวมที่คอลัมน์ผล

p	q	p∨q	¬p	ผล
T	T	T	F	F
T	F	T	F	F
F	T	T	T	T
F	F	F	T	F

(d) $(p \wedge q) \wedge \neg p$ ① ไล่ T/F ทุกชุด → ② คำนวณคอลัมน์กลาง → ③ รวมที่คอลัมน์ผล

p	q	p∧q	¬p	ผล
T	T	T	F	F
T	F	F	F	F
F	T	F	T	F
F	F	F	T	F

(e) $(p \wedge q) \vee (\neg p \vee q)$ ① ไล่ T/F ทุกชุด → ② คำนวณคอลัมน์กลาง → ③ รวมที่คอลัมน์ผล

p	q	p∧q	¬p∨q	ผล
T	T	T	T	T
T	F	F	F	F
F	T	F	T	T
F	F	F	T	T

(f) $\neg(p \wedge q) \vee (r \wedge \neg p)$ ① ไล่ T/F ทุกชุด → ② คำนวณคอลัมน์กลาง → ③ รวมที่คอลัมน์ผล

p	q	r	¬(p∧q)	r∧¬p	ผล
T	T	T	F	F	F
T	T	F	F	F	F
T	F	T	T	F	T
T	F	F	T	F	T
F	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T
F	F	T	T	T	T
F	F	F	T	F	T

เช็กกลับ: ข้อ (b) เป็น T ทุกแถวเพราะมี p∨¬p ข้อ (d) เป็น F ทุกแถวเพราะต้องให้ p และ ¬p จริงพร้อมกัน

ข้อ 18 · ให้ p:5<9, q:9<7, r:5<7

(a) $p \wedge q$

แทนค่าจากวงเล็บในออกมา อ่านแถวจากบนลงล่าง แต่ละแถวใช้ค่าที่คำนวณแล้วในแถวก่อน

① ขั้น	② ค่าที่ใช้	③ ผล
p	5<9	T
q	9<7	F
∧	T∧F	F

ตอบ: F · **เช็กกลับ:** ตรวจเครื่องหมายปฏิเสธทีละชั้น และจำว่า p→q เท็จเฉพาะ T→F

(b) $\neg(p \wedge q)$

แทนค่าจากวงเล็บในออกมา อ่านแถวจากบนลงล่าง แต่ละแถวใช้ค่าที่คำนวณแล้วในแถวก่อน

① ขั้น	② ค่าที่ใช้	③ ผล
p∧q	T∧F	F
¬	¬F	T

ตอบ: T · **เช็กกลับ:** ตรวจเครื่องหมายปฏิเสธทีละชั้น และจำว่า p→q เท็จเฉพาะ T→F

(c) $p \vee \neg(q \wedge r)$

แทนค่าจากวงเล็บในออกมา อ่านแถวจากบนลงล่าง แต่ละแถวใช้ค่าที่คำนวณแล้วในแถวก่อน

① ขั้น	② ค่าที่ใช้	③ ผล
q∧r	F∧T	F
¬(q∧r)	¬F	T
∨	T∨T	T

ตอบ: T · **เช็กกลับ:** ตรวจเครื่องหมายปฏิเสธทีละชั้น และจำว่า p→q เท็จเฉพาะ T→F

ข้อ 19 · ให้ p=F, r=F, q=T, s=T

(a) $p \to q$

แทนค่าจากวงเล็บในออกมา อ่านแถวจากบนลงล่าง แต่ละแถวใช้ค่าที่คำนวณแล้วในแถวก่อน

① ขั้น	② ค่าที่ใช้	③ ผล
→	F→T	T

ตอบ: T · **เช็กกลับ:** ตรวจเครื่องหมายปฏิเสธทีละชั้น และจำว่า p→q เท็จเฉพาะ T→F

(b) $\neg p \to \neg q$

แทนค่าจากวงเล็บในออกมา อ่านแถวจากบนลงล่าง แต่ละแถวใช้ค่าที่คำนวณแล้วในแถวก่อน

① ขั้น	② ค่าที่ใช้	③ ผล
¬p	¬F	T
¬q	¬T	F
→	T→F	F

ตอบ: F · **เช็กกลับ:** ตรวจเครื่องหมายปฏิเสธทีละชั้น และจำว่า p→q เท็จเฉพาะ T→F

(c) $\neg(p \to q)$

แทนค่าจากวงเล็บในออกมา อ่านแถวจากบนลงล่าง แต่ละแถวใช้ค่าที่คำนวณแล้วในแถวก่อน

① ขั้น	② ค่าที่ใช้	③ ผล
p→q	F→T	T
¬	¬T	F

ตอบ: F · **เช็กกลับ:** ตรวจเครื่องหมายปฏิเสธทีละชั้น และจำว่า p→q เท็จเฉพาะ T→F

(d) $(p \to q) \wedge (q \to r)$

แทนค่าจากวงเล็บในออกมา อ่านแถวจากบนลงล่าง แต่ละแถวใช้ค่าที่คำนวณแล้วในแถวก่อน

① ขั้น	② ค่าที่ใช้	③ ผล
p→q	F→T	T
q→r	T→F	F
∧	T∧F	F

ตอบ: F · **เช็กกลับ:** ตรวจเครื่องหมายปฏิเสธทีละชั้น และจำว่า p→q เท็จเฉพาะ T→F

(e) $(p \to q) \to r$

แทนค่าจากวงเล็บในออกมา อ่านแถวจากบนลงล่าง แต่ละแถวใช้ค่าที่คำนวณแล้วในแถวก่อน

① ขั้น	② ค่าที่ใช้	③ ผล
p→q	F→T	T
→r	T→F	F

ตอบ: F · **เช็กกลับ:** ตรวจเครื่องหมายปฏิเสธทีละชั้น และจำว่า p→q เท็จเฉพาะ T→F

(f) $p \to (q \to r)$

แทนค่าจากวงเล็บในออกมา อ่านแถวจากบนลงล่าง แต่ละแถวใช้ค่าที่คำนวณแล้วในแถวก่อน

① ขั้น	② ค่าที่ใช้	③ ผล
q→r	T→F	F
p→วงเล็บ	F→F	T

ตอบ: T · **เช็กกลับ:** ตรวจเครื่องหมายปฏิเสธทีละชั้น และจำว่า p→q เท็จเฉพาะ T→F

(g) $(s \to (p \land \neg r)) \land ((p \to (r \lor q)) \land s)$

แทนค่าจากวงเล็บในออกมา อ่านแถวจากบนลงล่าง แต่ละแถวใช้ค่าที่คำนวณแล้วในแถวก่อน

① ขั้น	② ค่าที่ใช้	③ ผล
p∧¬r	F∧T	F
s→(p∧¬r)	T→F	F
r∨q	F∨T	T
p→(r∨q)	F→T	T
ส่วนขวา ∧s	T∧T	T
∧ สุดท้าย	F∧T	F

ตอบ: F · **เช็กกลับ:** ตรวจเครื่องหมายปฏิเสธทีละชั้น และจำว่า p→q เท็จเฉพาะ T→F

(h) $((p \land \neg q) \to (q \land r)) \to (s \lor \neg q)$

แทนค่าจากวงเล็บในออกมา อ่านแถวจากบนลงล่าง แต่ละแถวใช้ค่าที่คำนวณแล้วในแถวก่อน

① ขั้น	② ค่าที่ใช้	③ ผล
p∧¬q	F∧F	F
q∧r	T∧F	F
→ วงเล็บซ้าย	F→F	T
s∨¬q	T∨F	T
→ สุดท้าย	T→T	T

ตอบ: T · **เช็กกลับ:** ตรวจเครื่องหมายปฏิเสธทีละชั้น และจำว่า p→q เท็จเฉพาะ T→F

ข้อ 20 · ให้ p=q=r=T

(คำตอบ) $(p \vee q) \wedge \neg((\neg p \wedge r) \vee q)$

แทนค่าจากวงเล็บในออกมา อ่านแถวจากบนลงล่าง แต่ละแถวใช้ค่าที่คำนวณแล้วในแถวก่อน

① ขั้น	② ค่าที่ใช้	③ ผล
p∨q	T∨T	T
¬p∧r	F∧T	F
วงเล็บ ∨q	F∨T	T
¬ วงเล็บ	¬T	F
∧ สุดท้าย	T∧F	F

ตอบ: F · **เช็กกลับ:** ตรวจเครื่องหมายปฏิเสธทีละชั้น และจำว่า p→q เท็จเฉพาะ T→F

ข้อ 21 · ตารางของ $\neg(p \wedge q) \vee (p \vee \neg r)$

แยกวงเล็บสองฝั่ง คอลัมน์สุดท้ายเอาคอลัมน์ 4 กับ 5 มาเชื่อมด้วย ∨

p	q	r	¬(p∧q)	p∨¬r	ผล
T	T	T	F	T	T
T	T	F	F	T	T
T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T
F	T	T	T	F	T
F	T	F	T	T	T
F	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T

เช็กกลับ: ผลเป็น T ทั้งแปดแถว อีกทางหนึ่ง ¬(p∧q)=¬p∨¬q จึงมีคู่ ¬p∨p ทำให้จริงเสมอ

ข้อ 22 · แปล $p \wedge (\neg q \vee r)$ เป็นคำพูด

แทนทีละก้อน p = ฉันเรียนการจัดการโรงแรม; q = ฉันเรียนการดูแลกิจกรรมนันทนาการ; r = ฉันเรียนวัฒนธรรมสมัยนิยม

① เงื่อนไข/ขั้น	② ค่าหรือข้อความ	③ ได้อะไร
① ก้อนใน	¬q∨r	ไม่เรียน q หรือเรียน r
② ก้อนนอก	p∧(¬q∨r)	เรียน p และก้อนใน

ตอบ: ฉันเรียนการจัดการโรงแรม และ (ฉันไม่ได้เรียนการดูแลกิจกรรมนันทนาการ หรือฉันเรียนวัฒนธรรมสมัยนิยม)

เช็กกลับ: หรือในที่นี้ยอมให้ทั้งสองข้อความจริงพร้อมกันได้ วงเล็บทำให้ “และ” ผูก p กับทางเลือกทั้งก้อน

ข้อ 23 · แปลเงื่อนไขจำนวนจริง

จับคู่กับตัวอักษร p:a

① เงื่อนไข/ขั้น	② ค่าหรือข้อความ	③ ได้อะไร
① ส่วนแรก	a<b	p
② ส่วนวงเล็บ	b<c และ a≥c	q∧¬r
③ เชื่อมด้วยหรือ	p กับ (q∧¬r)	p∨(q∧¬r)

เช็กกลับ: คำตอบคือ $p \vee (q \wedge \neg r)$ ปฏิเสธ < เป็น ≥ เพราะโดเมนเป็นจำนวนจริง

ข้อ 24 · เงื่อนไขจำเป็นชี้ลูกศรทางไหน

เปลี่ยนชื่อบุคคลจากโจทย์เป็น “ผู้เรียน” เพื่อไม่ใส่ชื่อคนในหนังสือ ความหมายเดิมคือ การขยันเรียนเป็นเงื่อนไขจำเป็นของการได้ A

เริ่มจากสิ่งที่ต้องอาศัยเงื่อนไข ถ้าผู้เรียนได้ A ในวิชานี้ แล้วผู้เรียนขยันเรียน

① ได้ A	② ขยัน	③ ได้ A → ขยัน
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

เช็กกลับ: โจทย์ห้ามกรณีได้ A แต่ไม่ขยัน จึงต้องวาง “ได้ A” ที่ต้นลูกศร ไม่ได้บอกว่าขยันแล้วต้องได้ A เสมอ

ข้อ 25 · ให้ p=T, q=F, r=F

(คำตอบ) $(p \vee q) \rightarrow \neg r$

แทนค่าจากวงเล็บในออกมา อ่านแถวจากบนลงล่าง แต่ละแถวใช้ค่าที่คำนวณแล้วในแถวก่อน

① ขั้น	② ค่าที่ใช้	③ ผล
pvq	TvF	T
¬r	¬F	T
→	T→T	T

ตอบ: T · **เช็กกลับ:** ตรวจเครื่องหมายปฏิเสธทีละชั้น และจำว่า p→q เท็จเฉพาะ T→F

ข้อ 26 · แปล “ถ้า...แล้ว...” ตามข้อ 23

แยกต้นลูกศรกับปลายลูกศร a≥c คือ ¬r, b

① เงื่อนไข/ขั้น	② ค่าหรือข้อความ	③ ได้อะไร
① ต้นลูกศร	a≥c หรือ b<c	¬r∨q
② ปลายลูกศร	b≥c	¬q
③ ประกอบ	(¬r∨q) → ¬q	ตามทิศในโจทย์

เช็กกลับ: คำตอบคือ $(\neg r \vee q) \rightarrow \neg q$ วงเล็บต้องครอบทางเลือกสองอย่างที่อยู่หลังคำว่า “ถ้า”

ข้อ 27 · ตรวจสมมูลโดยเทียบทุกแถว

(a) P=p ; Q=$p \vee q$

p	q	P	Q	ตรงกัน
T	T	T	T	T
T	F	T	T	T
F	T	F	T	F
F	F	F	F	T

ตอบ: ไม่สมมูล แถวที่ไฮไลต์คือกรณีค้าน: p=F, q=T ทำให้ P=F, Q=T

(b) P=$p \wedge q$; Q=$\neg p \vee \neg q$

p	q	P	Q	ตรงกัน
T	T	T	F	F
T	F	F	T	F
F	T	F	T	F
F	F	F	T	F

ตอบ: ไม่สมมูล แถวที่ไฮไลต์คือกรณีค้าน: p=T, q=T ทำให้ P=T, Q=F

(c) P=$p \to q$; Q=$\neg p \vee q$

p	q	P	Q	ตรงกัน
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

ตอบ: สมมูล เพราะ P และ Q ตรงกันทุกแถว

(d) P=$p \wedge (\neg q \vee r)$; Q=$p \vee (q \wedge \neg r)$

p	q	r	P	Q	ตรงกัน
T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	F
T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	F	T
F	T	F	F	T	F
F	F	T	F	F	T
F	F	F	F	F	T

ตอบ: ไม่สมมูล แถวที่ไฮไลต์คือกรณีค้าน: p=T, q=T, r=F ทำให้ P=F, Q=T

(e) P=$p \wedge (q \vee r)$; Q=$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$

p	q	r	P	Q	ตรงกัน
T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T
T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F
F	T	F	F	F	T
F	F	T	F	F	T
F	F	F	F	F	T

ตอบ: ไม่สมมูล แถวที่ไฮไลต์คือกรณีค้าน: p=T, q=F, r=F ทำให้ P=F, Q=T

(f) P=$p \to q$; Q=$\neg q \to \neg p$

p	q	P	Q	ตรงกัน
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

ตอบ: สมมูล เพราะ P และ Q ตรงกันทุกแถว

(g) P=$p \to q$; Q=$p \leftrightarrow q$

p	q	P	Q	ตรงกัน
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

ตอบ: ไม่สมมูล แถวที่ไฮไลต์คือกรณีค้าน: p=F, q=T ทำให้ P=T, Q=F

(h) P=$(p \to q) \wedge (q \to r)$; Q=$p \to r$

p	q	r	P	Q	ตรงกัน
T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	F
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T
F	T	F	F	T	F
F	F	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T

ตอบ: ไม่สมมูล แถวที่ไฮไลต์คือกรณีค้าน: p=T, q=F, r=T ทำให้ P=F, Q=T

(i) P=$(p \to q) \to r$; Q=$p \to (q \to r)$

p	q	r	P	Q	ตรงกัน
T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	T
T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T
F	T	T	T	T	T
F	T	F	F	T	F
F	F	T	T	T	T
F	F	F	F	T	F

ตอบ: ไม่สมมูล แถวที่ไฮไลต์คือกรณีค้าน: p=F, q=T, r=F ทำให้ P=F, Q=T

(j) P=$(s \to (p \wedge \neg r)) \wedge ((p \to (r \vee q)) \wedge s)$; Q=$p \vee t$

p	q	r	s	t	P	Q	ตรงกัน
T	T	T	T	T	F	T	F
T	T	T	T	F	F	T	F
T	T	T	F	T	F	T	F
T	T	T	F	F	F	T	F
T	T	F	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	T	T	T
T	T	F	F	T	F	T	F
T	T	F	F	F	F	T	F

p	q	r	s	t	P	Q	ตรงกัน
T	F	T	T	T	F	T	F
T	F	T	T	F	F	T	F
T	F	T	F	T	F	T	F
T	F	T	F	F	F	T	F
T	F	F	T	T	F	T	F
T	F	F	T	F	F	T	F
T	F	F	F	T	F	T	F
T	F	F	F	F	F	T	F

p	q	r	s	t	P	Q	ตรงกัน
F	T	T	T	T	F	T	F
F	T	T	T	F	F	F	T
F	T	T	F	T	F	T	F
F	T	T	F	F	F	F	T
F	T	F	T	T	F	T	F
F	T	F	T	F	F	F	T
F	T	F	F	T	F	T	F
F	T	F	F	F	F	F	T

p	q	r	s	t	P	Q	ตรงกัน
F	F	T	T	T	F	T	F
F	F	T	T	F	F	F	T
F	F	T	F	T	F	T	F
F	F	T	F	F	F	F	T
F	F	F	T	T	F	T	F
F	F	F	T	F	F	F	T
F	F	F	F	T	F	T	F
F	F	F	F	F	F	F	T

ตอบ: ไม่สมมูล แถวที่ไฮไลต์คือกรณีค้าน: p=T, q=T, r=T, s=T, t=T ทำให้ P=F, Q=T

เช็กกลับ: สมมูลต้องเท่ากันทุกการกำหนดค่า ไม่ใช่แค่มีบางแถวที่จริงพร้อมกัน สำหรับข้อ (j) t เป็นตัวแปรอิสระอีกตัวจึงต้องไล่ครบ 32 แถว

ข้อ 28 · จำนวนเฉพาะที่ห่างกันสอง

P(n) หมายถึง “n และ n+2 เป็นจำนวนเฉพาะทั้งคู่” โจทย์ไม่ได้เขียนโดเมน ในที่นี้อ่าน n เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งเป็นบริบทการนับจำนวนเฉพาะ

(a) ∀n P(n) เป็นเท็จ แปลว่า ทุกจำนวนเต็มบวก n มีทั้ง n และ n+2 เป็นจำนวนเฉพาะ เลือก n=1 ก็พอหักล้าง เพราะ 1 ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ

① n	② n+2	③ ทั้งคู่เป็นเฉพาะ?
1	3	F
2	4	F
3	5	T
5	7	T

(b) ∃n P(n) เป็นจริง แปลว่า มีจำนวนเต็มบวกอย่างน้อยหนึ่งค่าให้ทั้งคู่เป็นจำนวนเฉพาะ ใช้ n=3 ได้คู่ 3,5

① เลือก n=3 → ② คู่ห่างสอง → ③ พยาน

3 เฉพาะ | 5 เฉพาะ

เช็กกลับ: กรณีค้านหนึ่งค่าพอทำลาย ∀ ส่วนพยานหนึ่งค่าพอยืนยัน ∃ ไม่จำเป็นต้องตัดสินว่ามีคู่แบบนี้ไม่สิ้นสุดหรือไม่

ข้อ 29 · โดเมนเป็นจำนวนจริงทั้งหมด

(a) $\forall x\ (x^2 > x)$ เลือก x=0 ได้ $0^2=0$ จึงไม่มากกว่า 0

① เงื่อนไข/ขั้น	② ค่าหรือข้อความ	③ ได้อะไร
① พยานค้าน	x=0	อยู่ใน $\mathbb{R}$
② คำนวณ	$0^2=0$	ซ้ายเท่าขวา
③ ตรวจ >	0>0	F

ตอบ: F

(b) $\exists x\ (x^2 > x)$ เลือก x=2 ได้ $2^2=4>2$

① เงื่อนไข/ขั้น	② ค่าหรือข้อความ	③ ได้อะไร
① เลือก	x=2	อยู่ใน $\mathbb{R}$
② ยกกำลัง	$2^2=4$	4>2
③ พบพยาน	x=2	T

ตอบ: T

(c) $\forall x\ (x > 1 \to x^2 > x)$ ถ้า x>1 แล้ว x เป็นบวก คูณ x>1 ทั้งสองข้างด้วย x ได้ $x^2>x$; ถ้า x≤1 ต้นลูกศรเท็จ จึงไม่มีกรณี T→F

① เงื่อนไข/ขั้น	② ค่าหรือข้อความ	③ ได้อะไร
① x≤1	ต้น F	→ เป็น T
② x>1	คูณด้วย x>0	$x^2>x$
③ ทุกกรณี	ไม่มี T→F	T

ตอบ: T

(d) $\exists x\ (x > 1 \to x^2 > x)$ เลือก x=2 ได้ต้นจริงและปลายจริง จึงได้ประพจน์ลูกศรจริง

① เงื่อนไข/ขั้น	② ค่าหรือข้อความ	③ ได้อะไร
① x=2	2>1	T
② ปลาย	4>2	T
③ ลูกศร	T→T	T

ตอบ: T

(e) $\forall x\ (x > 1 \to x/(x^2+1) < 1/3)$ เลือก x=2 ได้ต้นจริง แต่ 2/(4+1)=2/5>1/3 เพราะ 6>5 จึงเป็น T→F

① เงื่อนไข/ขั้น	② ค่าหรือข้อความ	③ ได้อะไร
① x=2	2>1	T
② เศษส่วน	2/5 เทียบ 1/3	6>5
③ ลูกศร	T→F	F

ตอบ: F

(f) $\exists x\ (x > 1 \to x/(x^2+1) < 1/3)$ เลือก x=0 ได้ต้นเท็จ จึงได้ลูกศรจริง หรือเลือก x=3 ได้ 3/10<1/3 เพราะ 9<10 ทั้งสองวิธีเป็นพยานได้

① เงื่อนไข/ขั้น	② ค่าหรือข้อความ	③ ได้อะไร
① x=0	0>1	F
② ลูกศร	F→T	T
③ อีกพยาน x=3	3/10<1/3	T→T

ตอบ: T

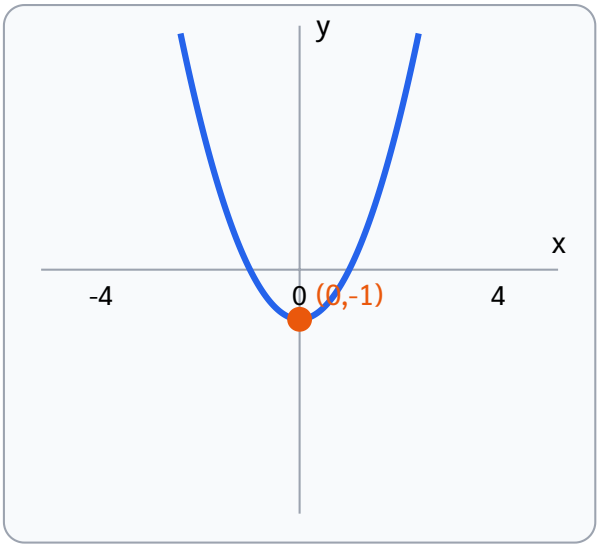
เช็กกลับ: ข้อ (c) ต้องพิสูจน์ทุก x ด้วยเหตุผลเชิงพีชคณิต ส่วนข้อ (a),(e) ใช้กรณีค้านเพียงค่าเดียว การลองเลขจำนวนมากไม่แทนคำพิสูจน์บน $\mathbb{R}$

ข้อ 30 · อ่านลำดับ ∀ และ ∃ จากซ้ายไปขวา

โดเมนของ x และ y เป็นจำนวนจริง กฎคืออ่านตัวบ่งปริมาณซ้ายก่อน: ∀ ให้คู่แข่งเลือกค่าใดก็ได้; ∃ ให้เราเลือกพยาน ณ จุดนั้น จึงอาจอาศัยค่าที่เลือกก่อนหน้าได้ แต่พยานที่เลือกก่อนต้องใช้ตัวเดิมกับค่าภายหลังทั้งหมด

(a) $\forall x \forall y\ (x^2 < y + 1)$ ต้องจริงทุกคู่ แต่ x=0,y=−1 ทำให้ 0<0 ซึ่งเท็จ

① เงื่อนไข/ขั้น	② ค่าหรือข้อความ	③ ได้อะไร
① เลือก x	0	$x^2=0$
② เลือก y	−1	y+1=0
③ ตรวจ	0<0	F



① เส้นฟ้า: $y=x^2-1$

② เหนือเส้น: $x^2<y+1$

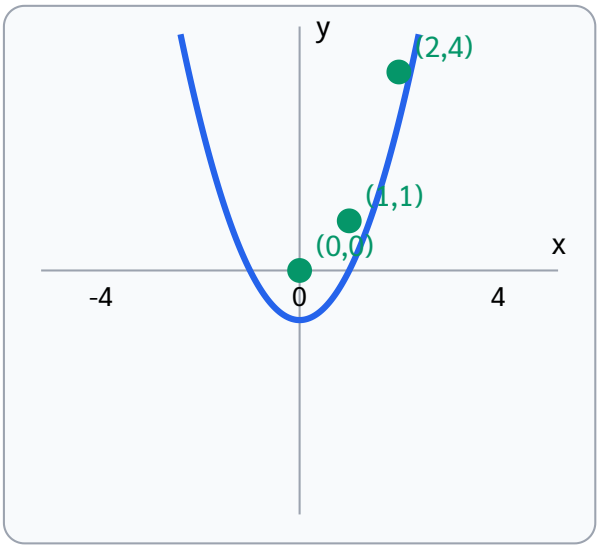
③ บนเส้น: เท่ากัน จึงไม่ผ่าน

จุดเป็นตัวอย่างของคู่ (x,y)
คำพิสูจน์ทุกค่าอ่านทีละขั้นด้านบน

ตอบ: F · **เช็กกลับ:** พยานที่เลือกก่อน ∀ ต้องไม่เปลี่ยนตามค่าหลัง ∀

(b) $\forall x \exists y\ (x^2 < y + 1)$ ไม่ว่า x เป็นอะไร เลือก $y=x^2$ ได้ x^2

① เงื่อนไข/ขั้น	② ค่าหรือข้อความ	③ ได้อะไร
① รับ x	ค่าใดก็ได้	คง x
② เลือก y	$y=x^2$	เลือกหลังรู้ x
③ ตรวจ	$x^2<x^2+1$	T



① เส้นฟ้า: $y=x^2-1$

② เหนือเส้น: $x^2<y+1$

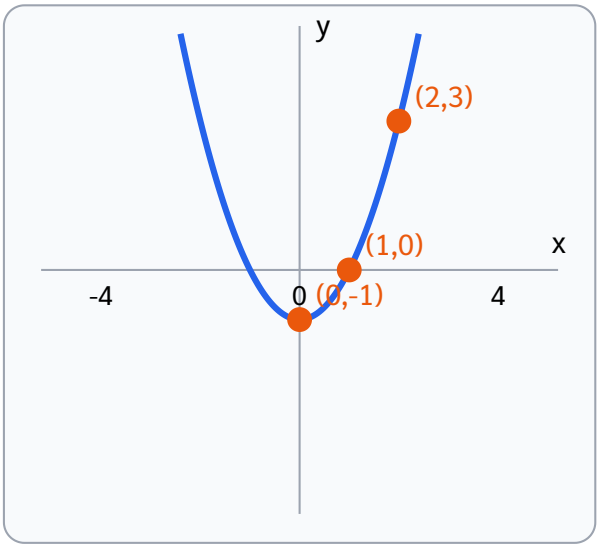
③ บนเส้น: เท่ากัน จึงไม่ผ่าน

จุดเป็นตัวอย่างของคู่ (x,y)
คำพิสูจน์ทุกค่าอ่านทีละขั้นด้านบน

ตอบ: T · **เช็กกลับ:** พยานที่เลือกก่อน ∀ ต้องไม่เปลี่ยนตามค่าหลัง ∀

(c) $\exists x \forall y\ (x^2 < y+1)$ ไม่ว่าเลือก x ใด คู่แข่งเลือก $y=x^2-1$ ได้ ทำให้ x^2

① เงื่อนไข/ขั้น	② ค่าหรือข้อความ	③ ได้อะไร
① เสนอ x	ค่าใดก็ตาม	คง x
② ค้านด้วย y	$y=x^2-1$	$y+1=x^2$
③ ตรวจ	$x^2<x^2$	F



① เส้นฟ้า: $y=x^2-1$

② เหนือเส้น: $x^2<y+1$

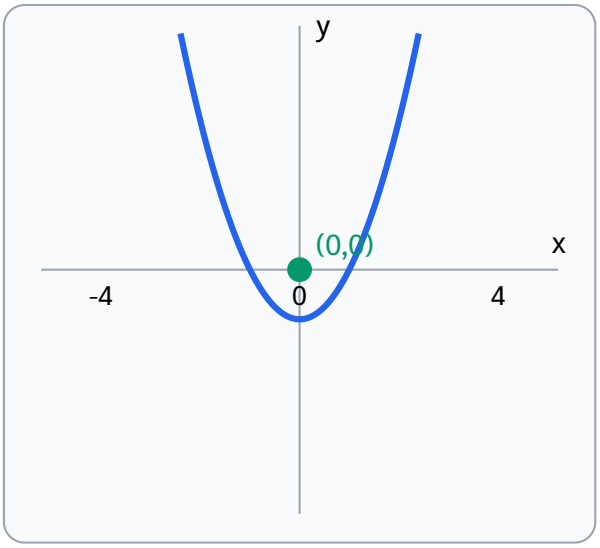
③ บนเส้น: เท่ากัน จึงไม่ผ่าน

จุดเป็นตัวอย่างของคู่ (x,y)
คำพิสูจน์ทุกค่าอ่านทีละขั้นด้านบน

ตอบ: F · **เช็กกลับ:** พยานที่เลือกก่อน ∀ ต้องไม่เปลี่ยนตามค่าหลัง ∀

(d) $\exists x \exists y\ (x^2 < y + 1)$ เลือก x=0,y=0 ได้ 0<1

① เงื่อนไข/ขั้น	② ค่าหรือข้อความ	③ ได้อะไร
① x	0	$x^2=0$
② y	0	y+1=1
③ ตรวจ	0<1	T



① เส้นฟ้า: $y=x^2-1$

② เหนือเส้น: $x^2<y+1$

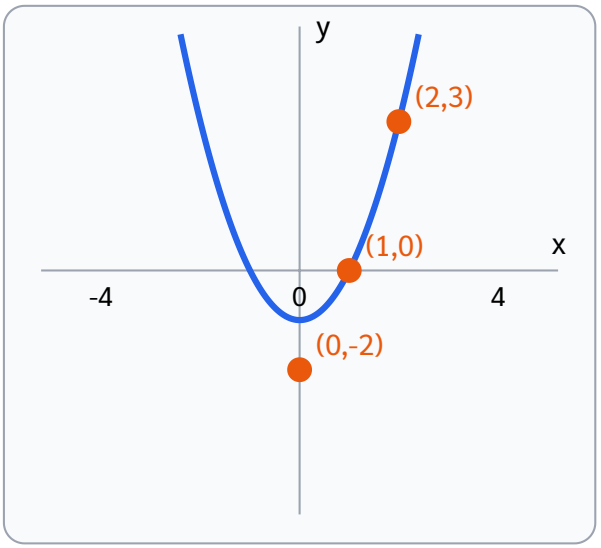
③ บนเส้น: เท่ากัน จึงไม่ผ่าน

จุดเป็นตัวอย่างของคู่ (x,y)
คำพิสูจน์ทุกค่าอ่านทีละขั้นด้านบน

ตอบ: T · **เช็กกลับ:** พยานที่เลือกก่อน ∀ ต้องไม่เปลี่ยนตามค่าหลัง ∀

(e) $\exists y \forall x\ (x^2 < y + 1)$ ให้ y เป็นค่าที่เลือกไว้ ถ้า $y \le -1$ เลือก x=0 จะไม่ผ่าน ถ้า $y > -1$ เลือก $x=\sqrt{(y+1)}$ ทำให้สองฝั่งเท่ากัน จึงไม่มี y ที่ใช้ได้กับทุก x

① เงื่อนไข/ขั้น	② ค่าหรือข้อความ	③ ได้อะไร
① $y \le -1$	x=0	$0 \ge y+1$
② $y > -1$	$x=\sqrt{(y+1)}$	$x^2=y+1$
③ ทั้งสองกรณี	ไม่ใช่ $x^2<y+1$	F



① เส้นฟ้า: $y=x^2-1$

② เหนือเส้น: $x^2<y+1$

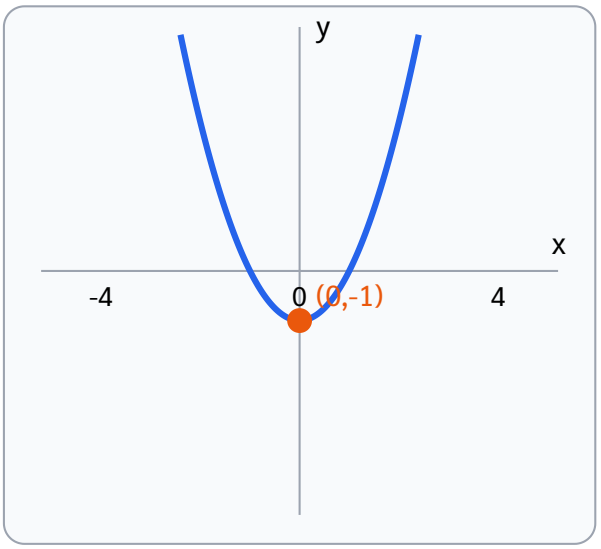
③ บนเส้น: เท่ากัน จึงไม่ผ่าน

จุดเป็นตัวอย่างของคู่ (x,y)
คำพิสูจน์ทุกค่าอ่านทีละขั้นด้านบน

ตอบ: F · **เช็กกลับ:** พยานที่เลือกก่อน ∀ ต้องไม่เปลี่ยนตามค่าหลัง ∀

(f) $\forall y \exists x\ (x^2 < y+1)$ คู่แข่งเลือก $y=-1$ จะต้องหา $x^2<0$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ในจำนวนจริง

① เงื่อนไข/ขั้น	② ค่าหรือข้อความ	③ ได้อะไร
① y	-1	$y+1=0$
② ทุก x	$x^2\geq 0$	ไม่มี $x^2<0$
③ หา x ไม่ได้	ที่ $y=-1$	F



① เส้นฟ้า: $y=x^2-1$

② เหนือเส้น: $x^2<y+1$

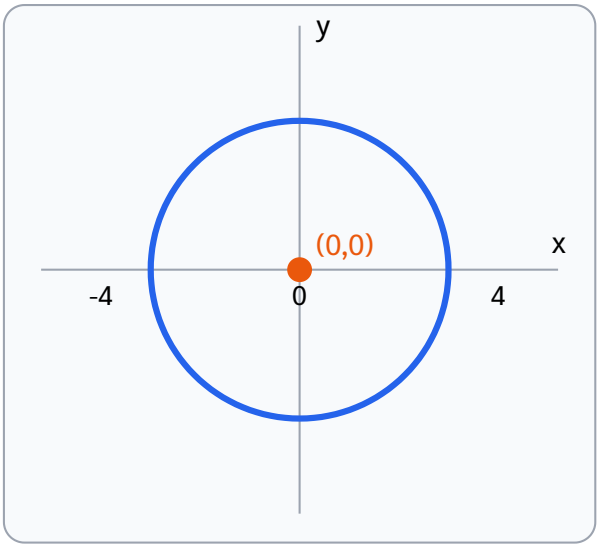
③ บนเส้น: เท่ากัน จึงไม่ผ่าน

จุดเป็นตัวอย่างของคู่ (x,y)
คำพิสูจน์ทุกค่าอ่านทีละขั้นด้านบน

ตอบ: F · **เช็กกลับ:** พยานที่เลือกก่อน ∀ ต้องไม่เปลี่ยนตามค่าหลัง ∀

(g) $\forall x \forall y\ (x^2 + y^2 = 9)$ เลือก x=y=0 ได้ 0≠9

① เงื่อนไข/ขั้น	② ค่าหรือข้อความ	③ ได้อะไร
① คู่ค้าน	(0,0)	$0^2+0^2=0$
② เป้าหมาย	9	0≠9
③ ตัดสิน	มีคู่ค้าน	F



① วงฟ้า: $x^2+y^2=9$

② จุดบนวง: ผ่านสมการ

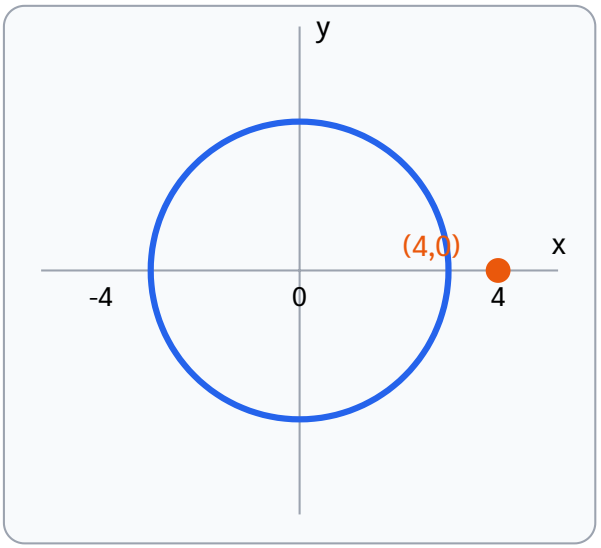
③ จุดนอก/ในวง: ไม่ผ่าน

จุดเป็นตัวอย่างของคู่ (x,y)
คำพิสูจน์ทุกค่าอ่านทีละขั้นด้านบน

ตอบ: F · **เช็กกลับ:** พยานที่เลือกก่อน ∀ ต้องไม่เปลี่ยนตามค่าหลัง ∀

(h) $\forall x \exists y\ (x^2 + y^2 = 9)$ เลือก x=4 จะได้ $16+y^2 \geq 16 > 9$ จึงไม่มี y

① เงื่อนไข/ขั้น	② ค่าหรือข้อความ	③ ได้อะไร
① x	4	$x^2=16$
② ทุก y	$y^2 \geq 0$	$16+y^2 \geq 16$
③ หา y ไม่ได้	16>9	F



① วงฟ้า: $x^2+y^2=9$

② จุดบนวง: ผ่านสมการ

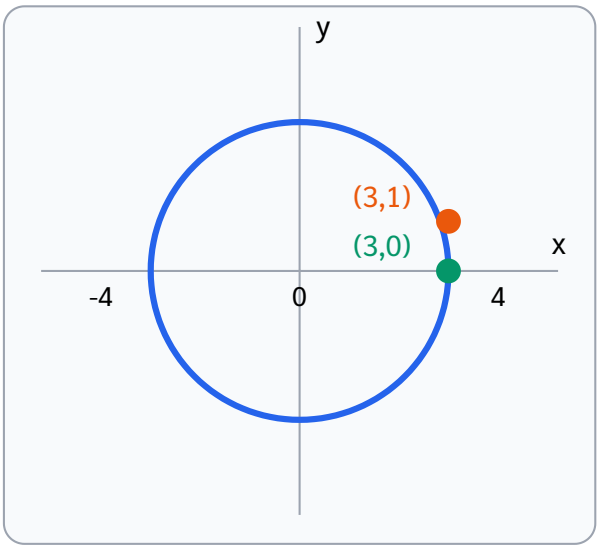
③ จุดนอก/ในวง: ไม่ผ่าน

จุดเป็นตัวอย่างของคู่ (x,y)
คำพิสูจน์ทุกค่าอ่านทีละขั้นด้านบน

ตอบ: F · **เช็กกลับ:** พยานที่เลือกก่อน ∀ ต้องไม่เปลี่ยนตามค่าหลัง ∀

(i) $\exists x \forall y\ (x^2 + y^2 = 9)$ ถ้าต้องจริงทุก y ลอง y=0 บังคับ $x^2=9$ แต่ y=1 บังคับ $x^2=8$ ใช้ x ตัวเดิมไม่ได้

① เงื่อนไข/ขั้น	② ค่าหรือข้อความ	③ ได้อะไร
① y=0	$x^2=9$	ข้อบังคับแรก
② y=1	$x^2=8$	ข้อบังคับที่สอง
③ x ตัวเดิม	$9\neq8$	F



① วงฟ้า: $x^2+y^2=9$

② จุดบนวง: ผ่านสมการ

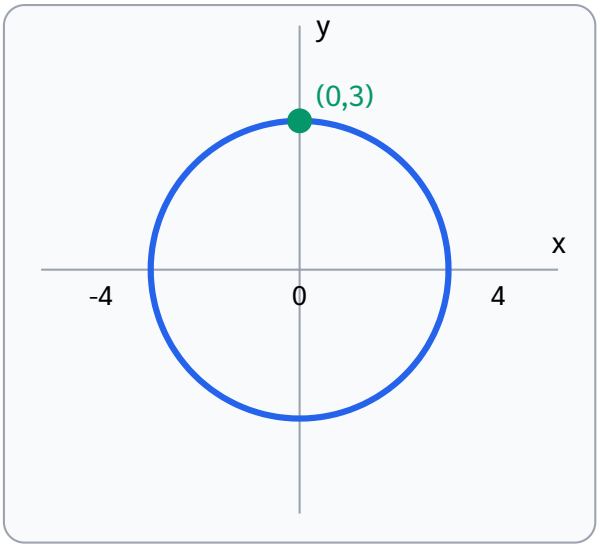
③ จุดนอก/ในวง: ไม่ผ่าน

จุดเป็นตัวอย่างของคู่ (x,y)
คำพิสูจน์ทุกค่าอ่านทีละขั้นด้านบน

ตอบ: F · **เช็กกลับ:** พยานที่เลือกก่อน ∀ ต้องไม่เปลี่ยนตามค่าหลัง ∀

(j) $\exists x \exists y\ (x^2 + y^2 = 9)$ เลือก x=0,y=3 ได้ 0+9=9

① เงื่อนไข/ขั้น	② ค่าหรือข้อความ	③ ได้อะไร
① เลือก	x=0,y=3	อยู่ใน $\mathbb{R}^2$
② คำนวณ	0^2+3^2	9
③ ตรวจ	9=9	T



① วงฟ้า: $x^2+y^2=9$

② จุดบนวง: ผ่านสมการ

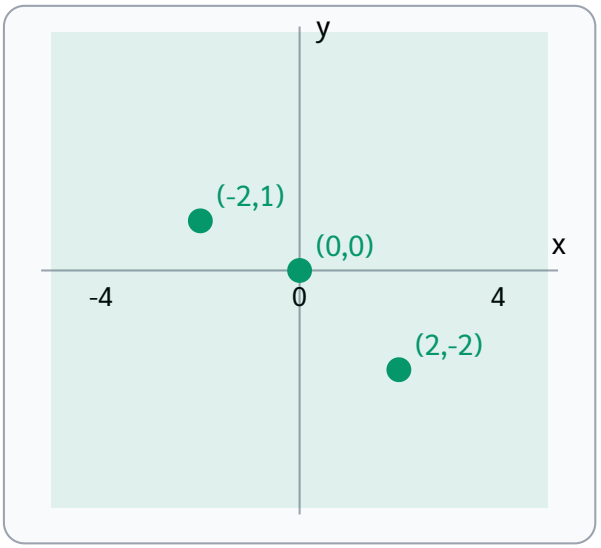
③ จุดนอก/ในวง: ไม่ผ่าน

จุดเป็นตัวอย่างของคู่ (x,y)
คำพิสูจน์ทุกค่าอ่านทีละขั้นด้านบน

ตอบ: T · **เช็กกลับ:** พยานที่เลือกก่อน ∀ ต้องไม่เปลี่ยนตามค่าหลัง ∀

(k) $\forall x \forall y\ (x^2 + y^2 \geq 0)$ กำลังสองจำนวนจริงแต่ละตัวไม่ติดลบ ผลบวกจึงไม่ติดลบทุกคู่

① เงื่อนไข/ขั้น	② ค่าหรือข้อความ	③ ได้อะไร
① ทุก x	$x^2 \geq 0$	ไม่ติดลบ
② ทุก y	$y^2 \geq 0$	ไม่ติดลบ
③ บวก	$x^2+y^2 \geq 0$	T



① ทั้งระนาบ: $x^2+y^2 \geq 0$

② กำลังสองไม่ติดลบ

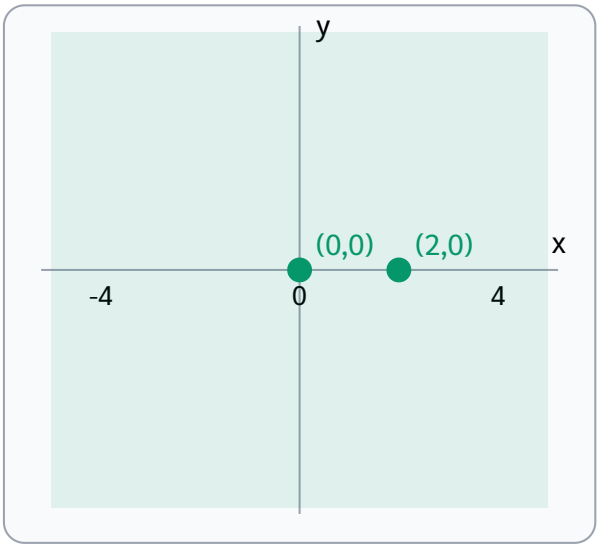
③ ทุกคู่จำนวนจริงผ่าน

จุดเป็นตัวอย่างของคู่ (x,y)
คำพิสูจน์ทุกค่าอ่านทีละขั้นด้านบน

ตอบ: T · **เช็กกลับ:** พยานที่เลือกก่อน ∀ ต้องไม่เปลี่ยนตามค่าหลัง ∀

(l) $\forall x \exists y\ (x^2 + y^2 \geq 0)$ รับ x ใดก็ได้ แล้วเลือก y=0 เหลือ $x^2 \geq 0$

① เงื่อนไข/ขั้น	② ค่าหรือข้อความ	③ ได้อะไร
① รับ x	ค่าใดก็ได้	$x^2 \geq 0$
② เลือก y	0	$y^2=0$
③ บวก	$x^2+0 \geq 0$	T



① ทั้งระนาบ: $x^2+y^2 \geq 0$

② กำลังสองไม่ติดลบ

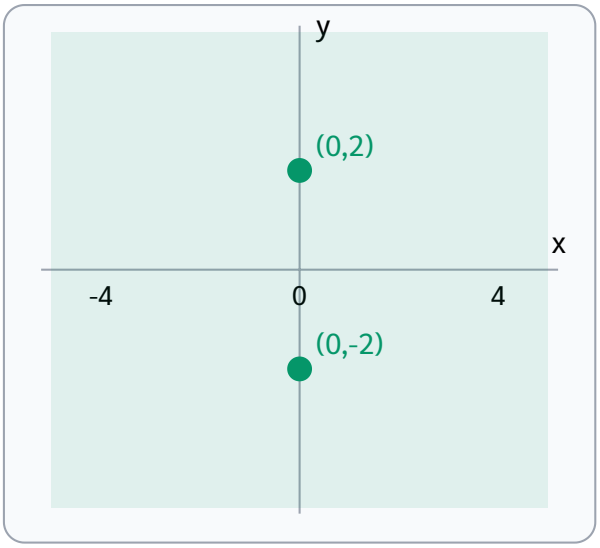
③ ทุกคู่จำนวนจริงผ่าน

จุดเป็นตัวอย่างของคู่ (x,y)
คำพิสูจน์ทุกค่าอ่านทีละขั้นด้านบน

ตอบ: T · **เช็กกลับ:** พยานที่เลือกก่อน ∀ ต้องไม่เปลี่ยนตามค่าหลัง ∀

(m) $\exists x \forall y\ (x^2 + y^2 \geq 0)$ เลือก x=0 คงไว้ สำหรับทุก y ได้ 0+y²≥0

① เงื่อนไข/ขั้น	② ค่าหรือข้อความ	③ ได้อะไร
① เลือก x	0	คงตัวนี้
② ทุก y	y²≥0	จริงเสมอ
③ บวก	0+y²≥0	T



① ทั้งระนาบ: x²+y²≥0

② กำลังสองไม่ติดลบ

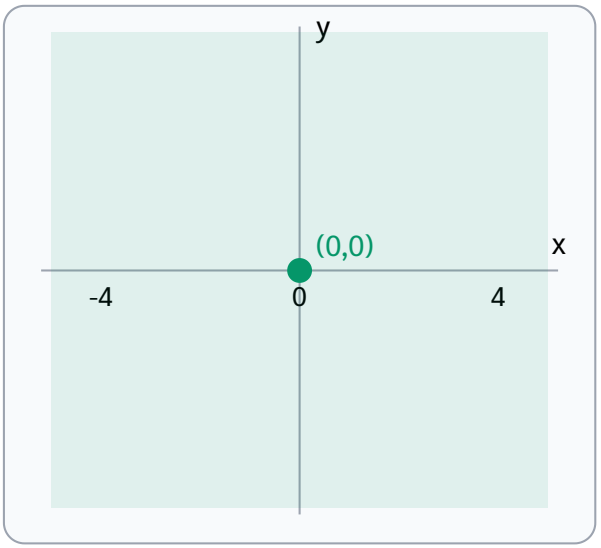
③ ทุกคู่จำนวนจริงผ่าน

จุดเป็นตัวอย่างของคู่ (x,y)
คำพิสูจน์ทุกค่าอ่านทีละขั้นด้านบน

ตอบ: T · **เช็กกลับ:** พยานที่เลือกก่อน ∀ ต้องไม่เปลี่ยนตามค่าหลัง ∀

(n) $\exists x \exists y\ (x^2 + y^2 \geq 0)$ เลือก x=y=0 ได้ 0≥0

① เงื่อนไข/ขั้น	② ค่าหรือข้อความ	③ ได้อะไร
① เลือก	x=y=0	หนึ่งคู่พอ
② บวก	0+0	0
③ ตรวจ	0≥0	T



① ทั้งระนาบ: $x^2+y^2 \geq 0$

② กำลังสองไม่ติดลบ

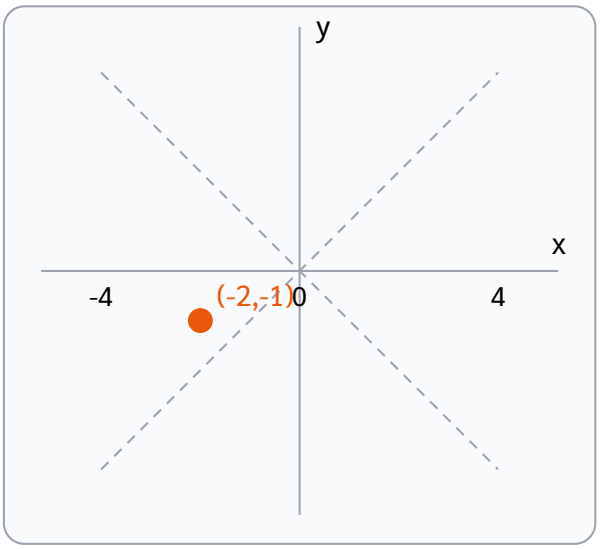
③ ทุกคู่จำนวนจริงผ่าน

จุดเป็นตัวอย่างของคู่ (x,y)
คำพิสูจน์ทุกค่าอ่านทีละขั้นด้านบน

ตอบ: T · **เช็กกลับ:** พยานที่เลือกก่อน ∀ ต้องไม่เปลี่ยนตามค่าหลัง ∀

(o) $\forall x \forall y\ (x < y \to x^2 < y^2)$ เลือก $x=-2, y=-1$ ได้ $-2<-1$ จริง แต่ $4<1$ เท็จ

① เงื่อนไข/ขั้น	② ค่าหรือข้อความ	③ ได้อะไร
① คู่ค้าน	$(-2,-1)$	$-2<-1$: T
② ยกกำลัง	(4,1)	$4<1$: F
③ ลูกศร	T→F	F



① เส้นประ: $y=x$ และ $y=-x$

② ตรวจ $x<y$ ก่อน

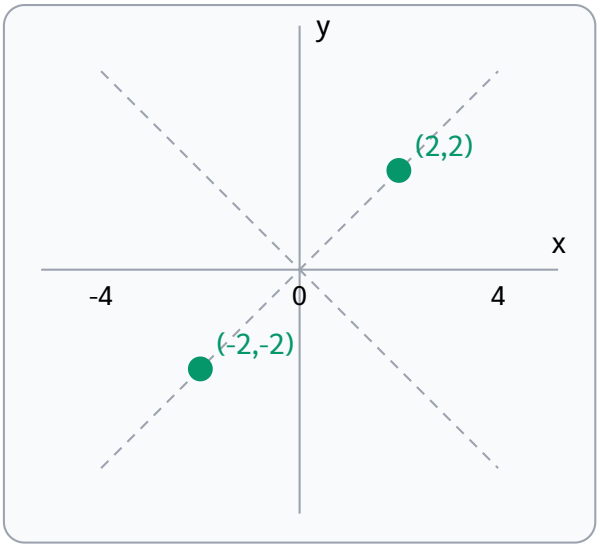
③ แล้วเทียบ x^2 กับ y^2

จุดเป็นตัวอย่างของคู่ (x,y)
คำพิสูจน์ทุกค่าอ่านทีละขั้นด้านบน

ตอบ: F · **เช็กกลับ:** พยานที่เลือกก่อน ∀ ต้องไม่เปลี่ยนตามค่าหลัง ∀

(p) $\forall x \exists y\ (x < y \rightarrow x^2 < y^2)$ รับ x ใดก็ได้ แล้วเลือก y=x ต้นลูกศร x

① เงื่อนไข/ขั้น	② ค่าหรือข้อความ	③ ได้อะไร
① รับ x	ค่าใดก็ได้	คง x
② เลือก y	y=x	x<x: F
③ ลูกศร	F→F	T



① เส้นประ: y=x และ y=−x

② ตรวจ x<y ก่อน

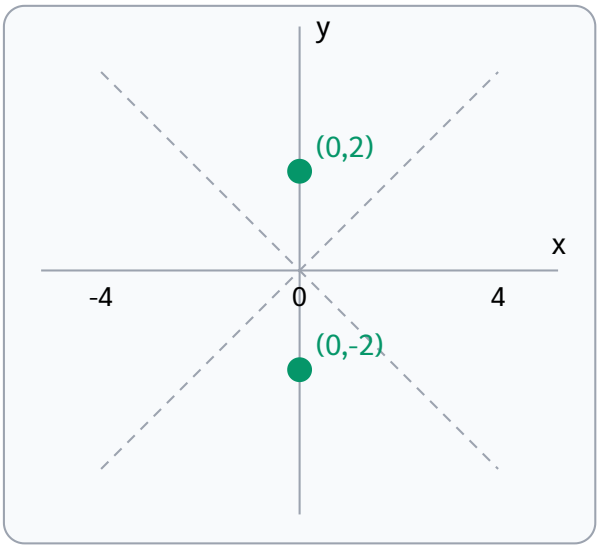
③ แล้วเทียบ x^2 กับ y^2

จุดเป็นตัวอย่างของคู่ (x,y)
คำพิสูจน์ทุกค่าอ่านทีละขั้นด้านบน

ตอบ: T · **เช็กกลับ:** พยานที่เลือกก่อน ∀ ต้องไม่เปลี่ยนตามค่าหลัง ∀

(q) $\exists x \forall y\ (x < y \rightarrow x^2 < y^2)$ เลือก x=0 คงไว้ ถ้า y>0 ได้ 0

① เงื่อนไข/ขั้น	② ค่าหรือข้อความ	③ ได้อะไร
① เลือก x	0	คงตัวนี้
② y>0	$0<y^2$	T→T
③ y≤0	0<y เป็น F	F→... เป็น T



① เส้นประ: y=x และ y=−x

② ตรวจ x<y ก่อน

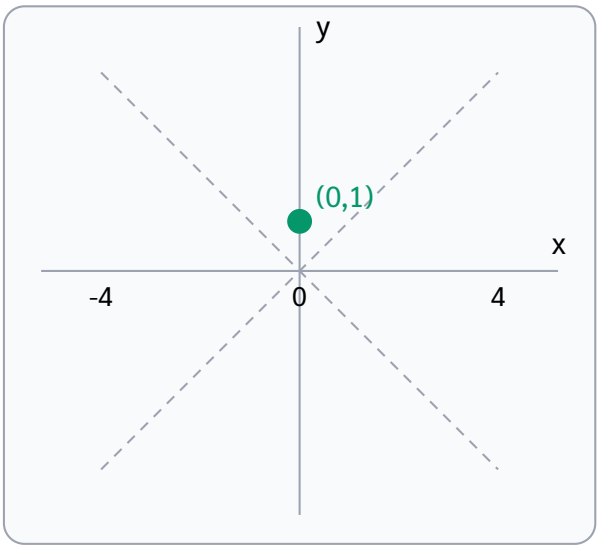
③ แล้วเทียบ x^2 กับ y^2

จุดเป็นตัวอย่างของคู่ (x,y)
คำพิสูจน์ทุกค่าอ่านทีละขั้นด้านบน

ตอบ: T · **เช็กกลับ:** พยานที่เลือกก่อน ∀ ต้องไม่เปลี่ยนตามค่าหลัง ∀

(r) $\exists x \exists y\ (x < y \to x^2 < y^2)$ เลือก x=0,y=1 ได้ 0<1 ทั้งก่อนและหลังยกกำลัง

① เงื่อนไข/ขั้น	② ค่าหรือข้อความ	③ ได้อะไร
① เลือกคู่	(0,1)	0<1: T
② ยกกำลัง	(0,1)	0<1: T
③ ลูกศร	T→T	T



① เส้นประ: y=x และ y=−x

② ตรวจ x<y ก่อน

③ แล้วเทียบ x^2 กับ y^2

จุดเป็นตัวอย่างของคู่ (x,y)
คำพิสูจน์ทุกค่าอ่านทีละขั้นด้านบน

ตอบ: T · **เช็กกลับ:** พยานที่เลือกก่อน ∀ ต้องไม่เปลี่ยนตามค่าหลัง ∀

เช็กกลับ: ข้อ (b) ให้ y เปลี่ยนตาม x จึงจริง แต่ข้อ (e) ต้องมี y ตัวเดียวรองรับ x ทุกตัวจึงเท็จ นี่คือเหตุผลที่สลับ ∀ กับ ∃ ไม่ได้

ภาคผนวก ง · Exercise-FirstHalf — Topic 2: Proofs

เฉลยหน้า 7–9 ครบทุกข้อย่อย ใช้วิธีจากบทที่ 3 โดยรักษาโดเมนและชนิดการพิสูจน์ที่โจทย์กำหนด



ข้อ 1 · $(x-1)^2=0 \Rightarrow x^3-1=0$

ให้ x เป็นจำนวนจริง ใช้การพิสูจน์ตรง (บทที่ 3 §3.2)

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. ASSUME	ให้ $(x-1)^2=0$
2. เปิดข้อเท็จจริงกำลังสอง	จำนวนจริงที่ยกกำลังสองได้ศูนย์ต้องเป็นศูนย์ จึง $x-1=0$
3. แก้สมการ	บวก 1 ทั้งสองข้าง ได้ $x=1$
4. แทนในเป้าหมาย	$x^3-1=1^3-1$
5. คำนวณ	$=1-1=0$
6. เช็กกลับ	$x=1$ ทำให้ทั้ง $(x-1)^2$ และ x^3-1 เป็นศูนย์ จึงได้ข้อสรุปตามวิธีตรง

① $(x-1)^2=0$

↓

② $x-1=0 \longrightarrow x=1$

↓

③ $x^3-1=1^3-1=0$

เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

อย่าเริ่มจาก $x^3-1=0$ เพราะนี่คือสิ่งที่ต้องแสดง ไม่ใช่สิ่งที่โจทย์ให้

ข้อ 2 · $x^3+x=0 \Rightarrow x^2-x\le 0$

ให้ x เป็นจำนวนจริง ใช้การพิสูจน์ตรง

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. ASSUME	ให้ $x^3+x=0$
2. ดึง x	$x(x^2+1)=0$
3. ตรวจตัวประกอบที่สอง	$x^2\ge 0$ จึง $x^2+1\ge 1>0$
4. ตัดตัวเลือก	x^2+1 ไม่เป็นศูนย์ ดังนั้น $x=0$
5. แทนในเป้าหมาย	$x^2-x=0^2-0=0$
6. สรุปและเช็กกลับ	$0\le 0$ จริง และ $0^3+0=0$ ตรงเงื่อนไขเดิม

① $x^3+x = x(x^2+1)=0$

↓

② $x^2+1>0 \longrightarrow x=0$

↓

③ $x^2-x=0\le 0$

เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

หารด้วย x ตั้งแต่แรกไม่ได้ เพราะคำตอบจริงคือ $x=0$; ต้องใช้ตัวประกอบ x^2+1 ที่ยืนยันแล้วว่าไม่เป็นศูนย์

ข้อ 3 · $x^3+5x+1 \le 0 \Rightarrow x<0$

ให้ x เป็นจำนวนจริง ใช้แย้งสลับที่ (บทที่ 3 §3.7)

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. เขียนทางใหม่	ถ้า $x \ge 0$ แล้ว $x^3+5x+1>0$
2. ASSUME	ให้ $x \ge 0$ ซึ่งเป็นปฏิเสธข้อสรุปเดิม
3. ตรวจพจน์	$x^3 \ge 0$ และ $5x \ge 0$
4. รวมขอบล่าง	$x^3+5x+1 \ge 0+0+1=1$
5. เทียบศูนย์	$1>0$ จึง $x^3+5x+1>0$
6. เช็กกลับ	ได้ปฏิเสธของ $x^3+5x+1 \le 0$ จึงข้อความเดิมจริง

① $x \ge 0 \rightarrow x^3 \ge 0,\ 5x \ge 0$

↓

② $x^3+5x+1 \ge 1$

↓

③ $x^3+5x+1 > 0$

เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

ปฏิเสธ “≤ 0” เป็น “>0” ไม่ใช่ “≥ 0” มิฉะนั้นยังทิ้งค่าศูนย์ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของเงื่อนไขเดิม

ข้อ 4 · x+y≥9 ⇒ x≥5 หรือ y≥5

x,y เป็นจำนวนเต็ม ใช้แย้งสลับที่

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. ปฏิเสธข้อสรุป	สมมติ x<5 และ y<5
2. ใช้จำนวนเต็ม	จึง x≤4 และ y≤4
3. บวกขอบบน	x+y≤4+4=8
4. เทียบ 9	x+y≤8<9 จึง x+y<9
5. เช็กกลับ	นี่คือปฏิเสธ x+y≥9 จึงข้อความเดิมจริงสำหรับจำนวนเต็ม

① x<5, y<5; x,y∈ℤ

↓

② x≤4, y≤4 → x+y≤8

↓

③ x+y<9

เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

ห้ามข้ามเงื่อนไขจำนวนเต็ม ถ้าเป็นจำนวนจริง x=y=4.5 จะได้ผลรวม 9 แต่ไม่มีตัวไหน≥5 จึงคำกล่าวทั่วไปแบบจำนวนจริงไม่จริง

ข้อ 5 · $2x+3y \geq 1 \Rightarrow x \geq 1$ หรือ $y \geq 1$

x,y เป็นจำนวนเต็ม เลือกใช้แย้งสลับที่

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. ปฏิเสธข้อสรุป	สมมติ $x<1$ และ $y<1$
2. ใช้จำนวนเต็ม	จึง $x \leq 0$ และ $y \leq 0$
3. คูณด้วยค่าบวก	$2x \leq 0$ และ $3y \leq 0$
4. บวก	$2x+3y \leq 0$
5. เทียบกับ 1	$2x+3y \leq 0<1$
6. เช็กกลับ	จึงได้ $\neg q \rightarrow \neg p$ และข้อความเดิมจริง

① $x<1, y<1 \rightarrow x \leq 0, y \leq 0$

↓

② $2x \leq 0, 3y \leq 0$

↓

③ $2x+3y \leq 0<1$

เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

เปลี่ยน “หรือ” เป็น “และ” ในข้อสรุปไม่ได้ ตัวอย่าง $x=1, y=0$ ให้ $2x+3y=2 \geq 1$ แต่ $y \geq 1$ เท็จ จึงรับรองเพียงอย่างน้อยหนึ่งตัว

ข้อ 6 · n คู่ ⇒ 7n+9 คี่

ใช้การพิสูจน์โดยขัดแย้ง (บทที่ 3 §3.9)

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. ASSUME กรณีที่ข้อความผิด	ให้ n คู่ แต่ 7n+9 ไม่คี่ จึง 7n+9 คู่
2. เปิดนิยาม n	n=2k โดย k เป็นจำนวนเต็ม
3. แทนค่า	7n+9=7(2k)+9
4. คูณ	=14k+9
5. แยกส่วนคู่	=14k+8+1
6. จัดรูป	=2(7k+4)+1 จึงคี่
7. ชี้ข้อขัดแย้ง	7n+9 ทั้งคู่จากสมมติฐานและคี่จากการคำนวณ
8. เช็กกลับ	กรณีผิดเกิดไม่ได้ จึง n คู่บังคับ 7n+9 คี่

① สมมติ 7n+9 คู่; n=2k

↓

② 7n+9=14k+8+1

↓

③ 7n+9=2(7k+4)+1 คี่ → ชน

เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

ถ้าเริ่มเพียง n คู่แล้วคำนวณจนคี่ จะเป็นวิธีตรง ต้องใส่สมมติฐานปฏิเสธข้อสรุปและชี้จุดชนเพื่อให้ตรงวิธีที่โจทย์กำหนด

ข้อ 7 · 3n+14 คู่ ⇒ n คู่

n เป็นจำนวนเต็ม ใช้การพิสูจน์โดยขัดแย้ง

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. ASSUME กรณีผิด	ให้ 3n+14 คู่ แต่ n ไม่คู่ จึง n คี่
2. เปิดนิยาม	n=2k+1 โดย k เป็นจำนวนเต็ม
3. แทนค่า	3n+14=3(2k+1)+14
4. กระจาย	=6k+3+14
5. รวมและแยกส่วนคู่	=6k+17=6k+16+1
6. ดึง 2	=2(3k+8)+1 จึงคี่
7. ชี้จุดชน	3n+14 คู่ตามสมมติฐาน แต่คี่ตามนิยาม
8. เช็กกลับ	จึงไม่สามารถมี 3n+14 คู่แต่ n คี่ ข้อความเดิมจริง

① 3n+14 คู่; n=2k+1

↓

② 3n+14=6k+17

↓

③ 2(3k+8)+1 คี่ → ขัดแย้ง

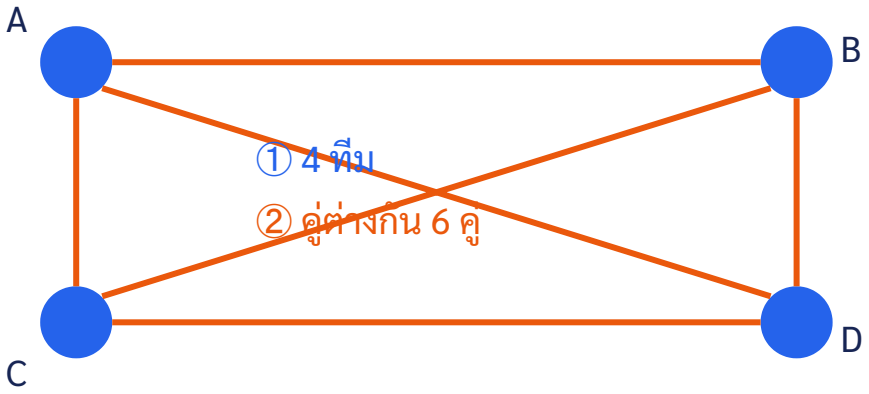
เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

ปฏิเสธข้อสรุป n คู่ต้องได้ n คี่ในโดเมนจำนวนเต็ม ไม่ใช่สุ่มเลือก n ติดลบหรือ n=1 เพียงค่าเดียว

ข้อ 8 · สี่ทีมแข่งเจ็ดเกม ต้องมีคู่ซ้ำ

โจทย์: สี่ทีมแข่งกันเจ็ดเกม จงพิสูจน์โดยขัดแย้งว่ามีทีมคู่หนึ่งเจอกันอย่างน้อยสองครั้ง ถือว่าแต่ละเกมมีสองทีมต่างกัน ไม่มีทีมแข่งกับตัวเอง

ติดป้ายทีมเป็น A,B,C,D คู่ที่ต่างกันมี AB,AC,AD,BC,BD,CD รวม 6 คู่ การกลับชื่อ BA ไม่ได้ทำให้เป็นทีมคู่ใหม่



③ เกมที่ 7 ต้องใช้เส้นเดิมอย่างน้อยหนึ่งเส้น

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. สมมติกรณีตรงข้าม	ไม่มีทีมคู่ใดเจอกันสองครั้ง ทุกคู่จึงแข่งได้อย่างมากหนึ่งเกม
2. นับคู่ที่มี	AB,AC,AD,BC,BD,CD มี 6 คู่
3. นับเกมภายใต้สมมติฐาน	6 คู่ × อย่างมาก 1 เกมต่อคู่ จึงมีเกมได้อย่างมาก 6 เกม
4. เทียบโจทย์	โจทย์ให้ 7 เกม แต่สมมติฐานบอกไม่เกิน 6 เป็นไปไม่ได้
5. ถอนสมมติฐาน	ต้องมีอย่างน้อยหนึ่งคู่แข่งตั้งแต่สองครั้งขึ้นไป
6. เช็กกลับ	ไม่ได้บอกว่าทุกคู่ซ้ำ หรือคู่ใดซ้ำแน่นอน เพียงต้องมีบางคู่ตามข้อสรุป

เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

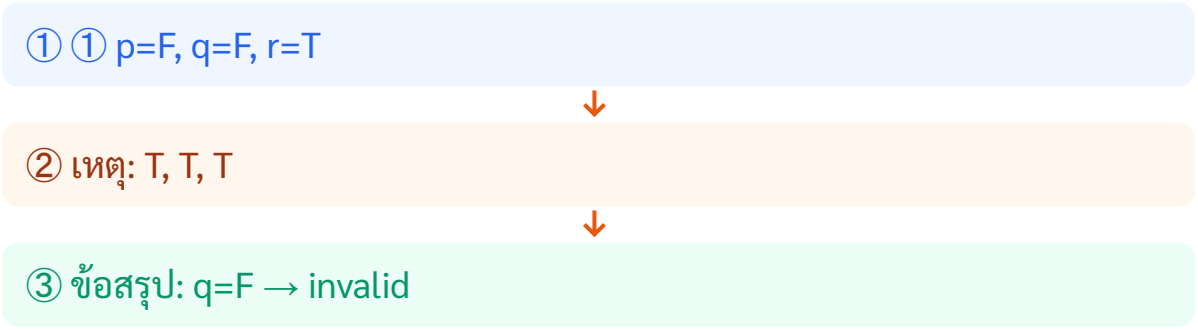
นับ AB กับ BA แยกกันจะได้จำนวนคู่เกินจริง โจทย์พูดถึงคู่ทีมที่เจอกัน ไม่ได้แยกว่าใครเขียนชื่อก่อน

ข้อ 9 · เหตุทุกข้อจริง แต่ q ยังเท็จได้

โจทย์: จาก p→(q∨r), p∨¬q, r∨q สรุป q ตรวจแบบบทที่ 3 §3.13

คำตอบ: ไม่สมเหตุสมผล (invalid) ใช้แถว p=F,q=F,r=T เป็นพยาน

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. เลือกค่า	p=F,q=F,r=T
2. ตรวจเหตุ 1	p→(q∨r)=F→(F∨T)=F→T=T
3. ตรวจเหตุ 2	p∨¬q=F∨T=T
4. ตรวจเหตุ 3	r∨q=T∨F=T
5. ตรวจข้อสรุป	q=F
6. เช็กกลับ	เหตุทั้งสาม T แต่ข้อสรุป F จึงหักล้างความสมเหตุสมผลได้ด้วยแถวเดียว



เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

เห็น r∨q จริงแล้วสรุป q จริงไม่ได้ เพราะความจริงอาจมาจาก r อย่างเดียว เช่นแถวนี้

ข้อ 10(a) · แปลภาษาเป็นเหตุและผล

ใช้ p: อ่านจริงจัง, q: ได้ผลการเรียน A, r: ร่ำรวย

รูปสัญลักษณ์: p→q, p ∴ q

คำตอบ: สมเหตุสมผล

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. รับเหตุ	p→q จริง และ p จริง
2. ใช้ modus ponens	จึง q จริง
3. เช็กกลับ	เหตุจริงพร้อมกันได้เฉพาะเมื่อ p=T,q=T ไม่ขึ้นกับ r

① p→q=T

↓

② p=T → q=T

เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

รูปสัญลักษณ์ต้องแยกเหตุ p ออกมาอีกบรรทัด ไม่รวมเป็นคำบรรยายที่ไม่ได้ใช้

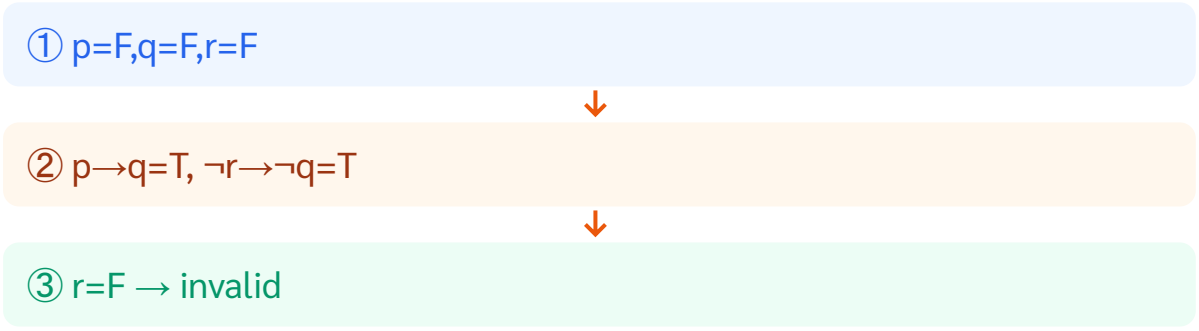
ข้อ 10(b) · แปลภาษาเป็นเหตุและผล

ใช้ p: อ่านจริงจัง, q: ได้ผลการเรียน A, r: ร่ำรวย

รูปสัญลักษณ์: $p \to q,\ \neg r \to \neg q \therefore r$

คำตอบ: ไม่สมเหตุสมผล

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. เลือกแถวหลุด	p=F,q=F,r=F
2. ตรวจเหตุแรก	p→q=F→F=T
3. ตรวจเหตุสอง	¬r→¬q=T→T=T
4. ตรวจผล	r=F
5. เช็กกลับ	เหตุจริงทั้งสองแต่ผลเท็จ จึง invalid



เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

โจทย์ไม่ได้ให้ p จริง จึงใช้ p→q ไปยืนยัน q แล้วต่อไป r ไม่ได้

ข้อ 10(c) · แปลภาษาเป็นเหตุและผล

ใช้ p: อ่านจริงจัง, q: ได้ผลการเรียน A, r: ร่ำรวย

รูปสัญลักษณ์: p↔r, r ∴ p

คำตอบ: สมเหตุสมผล

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. เปิด ↔	p↔r ให้ทั้ง p→r และ r→p
2. รับเหตุที่สอง	r จริง
3. ใช้ทิศที่เหมาะ	จาก r→p กับ r ได้ p
4. เช็กกลับ	ใช้ r→p ที่มาจาก ↔ ไม่ใช่สลับ p→r เอง

① $p \leftrightarrow r \rightarrow (p \rightarrow r) \land (r \rightarrow p)$

↓

② $r + (r \rightarrow p) \rightarrow p$

เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

ต้องเปิด ↔ ให้เห็นทิศ r→p ก่อน ไม่เขียนเพียงว่ากลับลูกศรได้ทุกกรณี

ข้อ 10(d) · แปลภาษาเป็นเหตุและผล

ใช้ p: อ่านจริงจัง, q: ได้ผลการเรียน A, r: ร่ำรวย

รูปสัญลักษณ์: (p∨r)→q, q ∴ ¬p→r

คำตอบ: ไม่สมเหตุสมผล

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. เลือกแถวหลุด	p=F,q=T,r=F
2. ตรวจเหตุแรก	(p∨r)→q=(F∨F)→T=F→T=T
3. ตรวจเหตุที่สอง	q=T
4. ตรวจข้อสรุป	¬p→r=T→F=F
5. เช็กกลับ	สองเหตุ T แต่ข้อสรุป F จึง invalid

① p=F,q=T,r=F

↓

② (p ∨ r)→q=T, q=T

↓

③ ¬p→r=F → invalid

เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

ได้ q จริงจากเหตุ ไม่ได้ยืนยันว่า p∨r จริง การย้อนเหตุจากผลเป็นก้าวที่ผิด

ข้อ 10(e) · แปลภาษาเป็นเหตุและผล

ใช้ p: อ่านจริงจัง, q: ได้ผลการเรียน A, r: ร่ำรวย

รูปสัญลักษณ์: p→(q∨r), ¬q∧¬r ∴ ¬p

คำตอบ: สมเหตุสมผล

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. รับเหตุ	p→(q∨r) และ ¬q∧¬r
2. รวมคำปฏิเสธ	¬q∧¬r ≡ ¬(q∨r)
3. ใช้ modus tollens	จาก p→(q∨r) และ ¬(q∨r) ได้ ¬p
4. เช็กกลับ	ถ้า p จริง จะบังคับ q∨r จริง ซึ่งเป็นไปไม่ได้เมื่อ q,r เท็จทั้งคู่

① $\neg q \land \neg r \rightarrow \neg(q \lor r)$

↓

② $p \rightarrow (q \lor r), \neg(q \lor r) \rightarrow \neg p$

เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

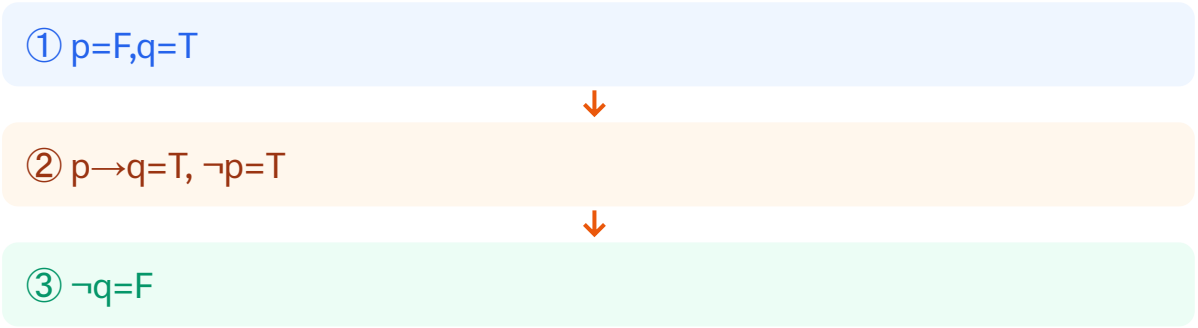
ต้องปฏิเสธ q∨r ทั้งก้อน ไม่เลือกปฏิเสธเพียง q ตัวเดียว

ข้อ 11(a) · ตรวจความสมเหตุสมผล

โจทย์: $p \to q,\ \neg p \therefore \neg q$

คำตอบ: ไม่สมเหตุสมผล

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. เลือกค่า	p=F,q=T
2. ตรวจเหตุ	p→q=F→T=T และ ¬p=T
3. ตรวจผล	¬q=F
4. เช็กกลับ	เหตุจริงแต่ผลเท็จ จึง invalid



เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

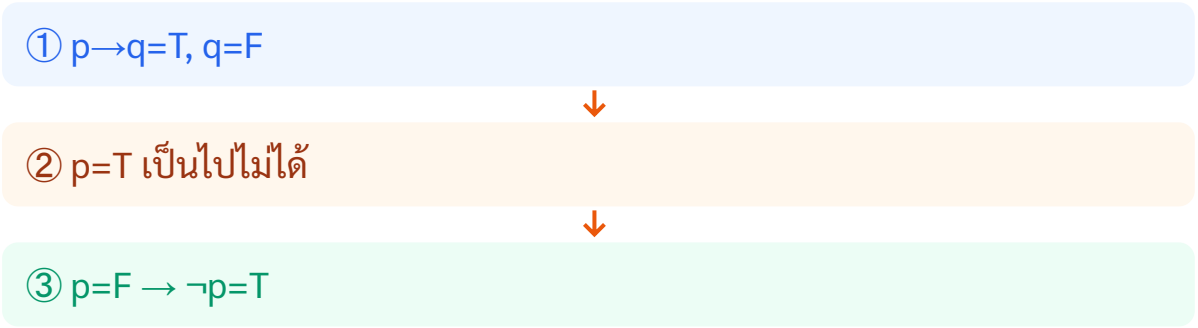
การปฏิเสธเหตุไม่ได้ปฏิเสธผลตามไปด้วย

ข้อ 11(b) · ตรวจความสมเหตุสมผล

โจทย์: $p \to q,\ \neg q \therefore \neg p$

คำตอบ: สมเหตุสมผล

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. รับเหตุ	$p \to q$ จริงและ q เท็จ
2. ทดสอบ p จริง	ถ้า p จริง จะได้ $p \to q = T \to F$ เท็จ ขัดกับเหตุ
3. สรุป	p เท็จ จึง $\neg p$ จริง
4. เช็กกลับ	นี่คือ modus tollens ไม่ใช่การปฏิเสธเหตุแบบข้อ (a)



เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

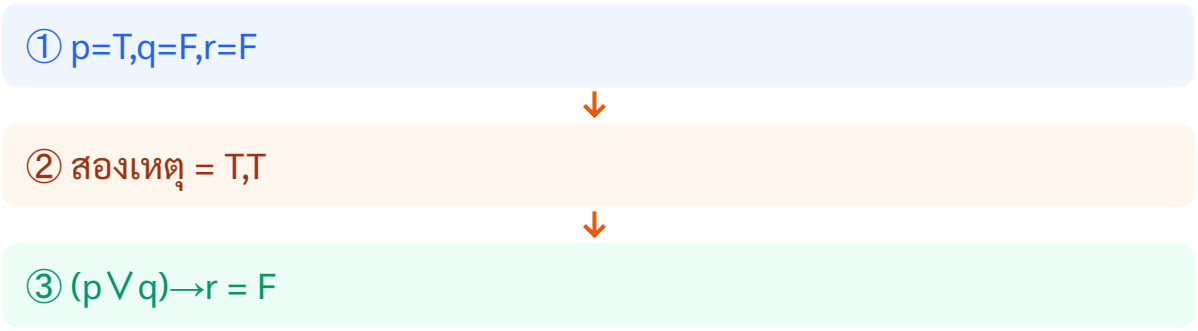
ห้ามสับสน $\neg q$ ที่โจทย์ให้กับ $\neg p$ ที่ยังต้องสรุป

ข้อ 11(c) · ตรวจความสมเหตุสมผล

โจทย์: $p \to (q \to r),\ q \to (p \to r) \therefore (p \vee q) \to r$

คำตอบ: ไม่สมเหตุสมผล

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. เลือกค่า	p=T,q=F,r=F
2. ตรวจเหตุ 1	q→r=F→F=T จึง p→(q→r)=T→T=T
3. ตรวจเหตุ 2	p→r=T→F=F จึง q→(p→r)=F→F=T
4. ตรวจผล	(pvq)→r=(TvF)→F=T→F=F
5. เช็กกลับ	ทั้งสองเหตุบังคับ r เมื่อ p และ q จริงร่วมกัน แต่ข้อสรุปใช้เพียง p หรือ q จึงแรงเกินไป



เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

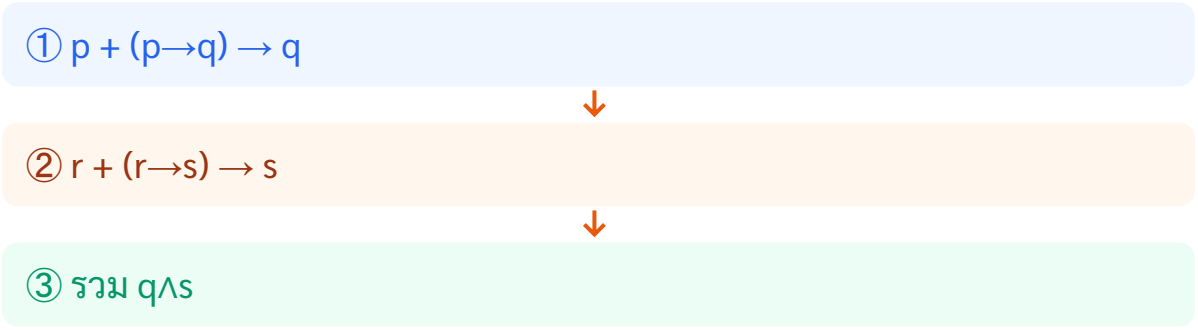
สองเหตุข้างต้นสมมูลกับ $(p \wedge q) \to r$ ไม่ใช่ $(p \vee q) \to r$

ข้อ 11(d) · ตรวจความสมเหตุสมผล

โจทย์: (p→q)∧(r→s), p∧r ∴ q∧s

คำตอบ: สมเหตุสมผล

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. แยกเหตุแรก	ได้ p→q และ r→s
2. แยกเหตุที่สอง	ได้ p และ r
3. ใช้ทางแรก	p→q กับ p ให้ q
4. ใช้ทางที่สอง	r→s กับ r ให้ s
5. รวมข้อสรุป	ได้ q∧s
6. เช็กกลับ	ทั้ง q,s มาจากเหตุที่แยกได้ด้วย ∧ ไม่ใช่แยก ∨



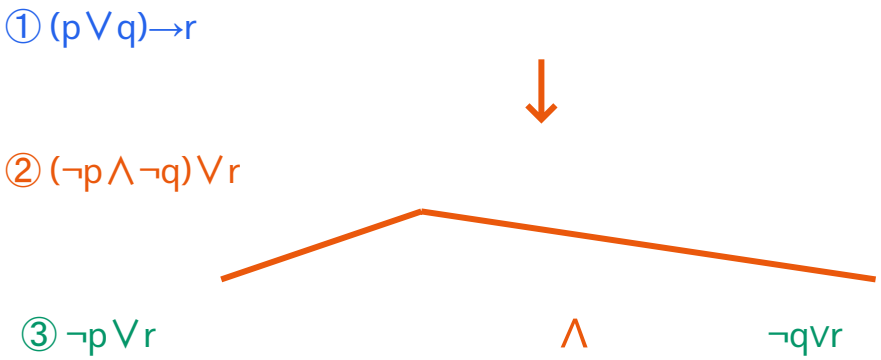
เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

ต้องได้ทั้ง q และ s ก่อนเขียน ∧ ไม่ใช่มีเพียงด้านเดียว

ข้อ 12 · เปลี่ยน (p∨q)→r เป็น “และของคลอส”

โจทย์: หารูปที่สมมูลกับ (p∨q)→r และเป็นคลอสหลายอันเชื่อมด้วย ∧ วิธีอยู่ที่บทที่ 3 §3.17

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. ตัดลูกศร	(p∨q)→r ≡ ¬(p∨q)∨r
2. ผลักคำปฏิเสธเข้าไป	≡(¬p∧¬q)∨r
3. แจกแจง ∨ เหนือ ∧	≡(¬p∨r)∧(¬q∨r)
4. ระบุคลอส	คลอสแรก ¬p∨r; คลอสที่สอง ¬q∨r
5. เช็กกลับ	ต้องจริงทั้ง “ถ้า p แล้ว r” และ “ถ้า q แล้ว r” จึงตรงกับ “ถ้าอย่างน้อย p หรือ q แล้ว r”



เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

ตอบ ¬p∨¬q∨r จะกลายเป็น (p∧q)→r ซึ่งอ่อนกว่าโจทย์ เช่น p=T,q=F,r=F ทำให้คำตอบผิดนี้จริง แต่ต้นฉบับ (T∨F)→F เท็จ

ข้อ 13 · ใช้เรโซลูชัน

โจทย์: ¬pVq, ¬qV¬r, pV¬r ∴ ¬r

ใช้หลักจากบทที่ 3 §3.15–3.17 วงคู่ตรงข้ามหนึ่งคู่ต่อครั้ง แล้วเก็บลิเทอรัลที่เหลือทั้งหมด

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. กำกับเหตุ	(1) ¬pVq, (2) ¬qV¬r, (3) pV¬r
2. ตัด q/¬q	ใช้ (1),(2) ได้ (4) ¬pV¬r
3. ตัด p/¬p	ใช้ (4),(3) ได้ (5) ¬rV¬r
4. ตัดสำเนาซ้ำ	¬rV¬r ≡ ¬r จึงได้ (6) ¬r
5. เช็กกลับ	ข้อสรุปตรงเป้าหมาย ทุกก้าวมาจากคลอสที่มีอยู่ก่อน

① $(\neg p \vee q)+(\neg q \vee \neg r) \rightarrow \neg p \vee \neg r$

↓

② $(\neg p \vee \neg r)+(p \vee \neg r) \rightarrow \neg r \vee \neg r$

↓

③ $\neg r \vee \neg r \rightarrow \neg r$

เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

ขั้นที่ลบตัวซ้ำใช้กฎ AvA=A ต่างจากเรโซลูชันที่ต้องมี A/¬A อย่าสับสนกฎสองอย่าง

ข้อ 14(a) · ใช้เรโซลูชัน

โจทย์: ¬p∨q∨r, ¬q, ¬r ∴ ¬p

ใช้หลักจากบทที่ 3 §3.15–3.17 วงคู่ตรงข้ามหนึ่งคู่ต่อครั้ง แล้วเก็บลิเทอรัลที่เหลือทั้งหมด

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. กำกับเหตุ	(1) ¬p∨q∨r, (2) ¬q, (3) ¬r
2. ตัด q/¬q	ใช้ (1),(2) ได้ (4) ¬p∨r
3. ตัด r/¬r	ใช้ (4),(3) ได้ (5) ¬p
4. เช็กกลับ	ตัดทาง q และ r ออกด้วยเหตุปฏิเสธที่โจทย์ให้ จึงเหลือ ¬p

① $(\neg p \vee q \vee r) + \neg q \rightarrow \neg p \vee r$

↓

② $(\neg p \vee r) + \neg r \rightarrow \neg p$

เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

อย่าลบ q,r ทิ้งโดยไม่อ้างคลอส ¬q,¬r เพราะแต่ละการลบต้องมีเหตุรองรับ

ข้อ 14(b) · ใช้เรโซลูชัน

โจทย์: ¬p∨r, ¬r∨q, p ∴ q

ใช้หลักจากบทที่ 3 §3.15–3.17 วงคู่ตรงข้ามหนึ่งคู่ต่อครั้ง แล้วเก็บลิเทอรัลที่เหลือทั้งหมด

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. กำกับเหตุ	(1) ¬p∨r, (2) ¬r∨q, (3) p
2. ตัด p/¬p	ใช้ (1),(3) ได้ (4) r
3. ตัด r/¬r	ใช้ (4),(2) ได้ (5) q
4. เช็กกลับ	ได้ q ตรงข้อสรุป; ผลกลาง r มาจากเหตุ ไม่ได้สมมติขึ้นเอง

① $(\neg p \vee r) + p \rightarrow r$

↓

② $(\neg r \vee q) + r \rightarrow q$

เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

เขียนผลกลาง r ให้เห็น อย่ากระโดดจากเหตุไป q โดยไม่มีบรรทัดที่ใช้คู่ตรงข้าม

ข้อ 14(c) · ใช้เรโซลูชัน

โจทย์: $p \to q,\ p \vee q \therefore q$

ใช้หลักจากบทที่ 3 §3.15–3.17 วงคู่ตรงข้ามหนึ่งคู่ต่อครั้ง แล้วเก็บลิเทอรัลที่เหลือทั้งหมด

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. เปลี่ยนลูกศร	(1) $p \to q \equiv \neg p \vee q$
2. เก็บเหตุสอง	(2) $p \vee q$
3. ตัด $p/\neg p$	จาก (1),(2) ได้ $q \vee q$
4. ลดสำเนาซ้ำ	$q \vee q \equiv q$
5. เช็กกลับ	ไม่ว่า p จริงหรือเท็จ q ถูกบังคับโดยหนึ่งในสองเหตุ ผลเรโซลูชันตรงกัน

① $p \to q \to \neg p \vee q$

↓

② $(\neg p \vee q) + (p \vee q) \to q \vee q$

↓

③ $q \vee q \to q$

เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

ก่อนใช้เรโซลูชันต้องเปลี่ยน → ให้เป็น ∨ ไม่ตัดลูกศรเหมือนเป็นลิเทอรัล

ข้อ 14(d) · ใช้เรโซลูชัน

โจทย์: p↔r, r ∴ p

ใช้หลักจากบทที่ 3 §3.15–3.17 วงคู่ตรงข้ามหนึ่งคู่ต่อครั้ง แล้วเก็บลิเทอรัลที่เหลือทั้งหมด

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. เปิด ↔	p↔r ≡ (p→r)∧(r→p)
2. เปิด →	≡(¬p∨r)∧(¬r∨p)
3. แยกคลอส	(1) ¬p∨r, (2) ¬r∨p, (3) r
4. ตัด r/¬r	ใช้ (2),(3) ได้ (4) p
5. เช็กกลับ	p คือเป้าหมาย ไม่จำเป็นต้องใช้คลอส (1) ทุกครั้ง

① $p \leftrightarrow r \rightarrow (\neg p \vee r) \wedge (\neg r \vee p)$

↓

② $(\neg r \vee p) + r \rightarrow p$

เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

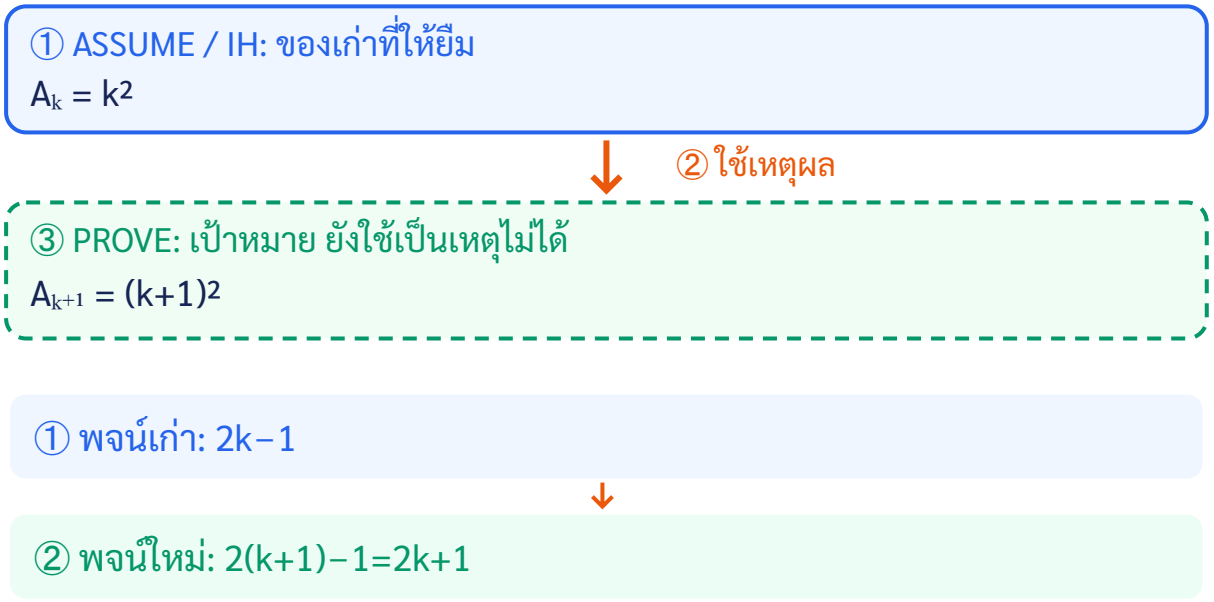
แยก ↔ ให้ได้สองคลอสก่อน เพื่อแสดงว่าทิศ r→p มีสิทธิ์ใช้จริง

ข้อ 15(a) · ฐาน, IH และเป้าหมาย

โจทย์: พิสูจน์ $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$ ทุกจำนวนเต็ม $n \geq 1$

เช่น $1+3+5=9=3^2$ ให้ A_n แทนผลบวก n พจน์ทางซ้าย กฎของพจน์ที่ n คือ $2n-1$ จึงต้องเติม $2(k+1)-1$ เมื่อเพิ่มหนึ่งพจน์

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. ฐานด้านซ้าย	$A_1=1$
2. ฐานด้านขวา	$1^2=1$ จึงซ้ายเท่าขวา
3. เลือก k	ให้ k เป็นจำนวนเต็มใด ๆ ที่ $k \geq 1$ โดยคง k ตัวเดิมตลอดขั้น
4. ASSUME / IH	สมมติ $A_k=1+3+\cdots+(2k-1)=k^2$
5. PROVE	ต้องแสดง $A_{k+1}=1+3+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2$

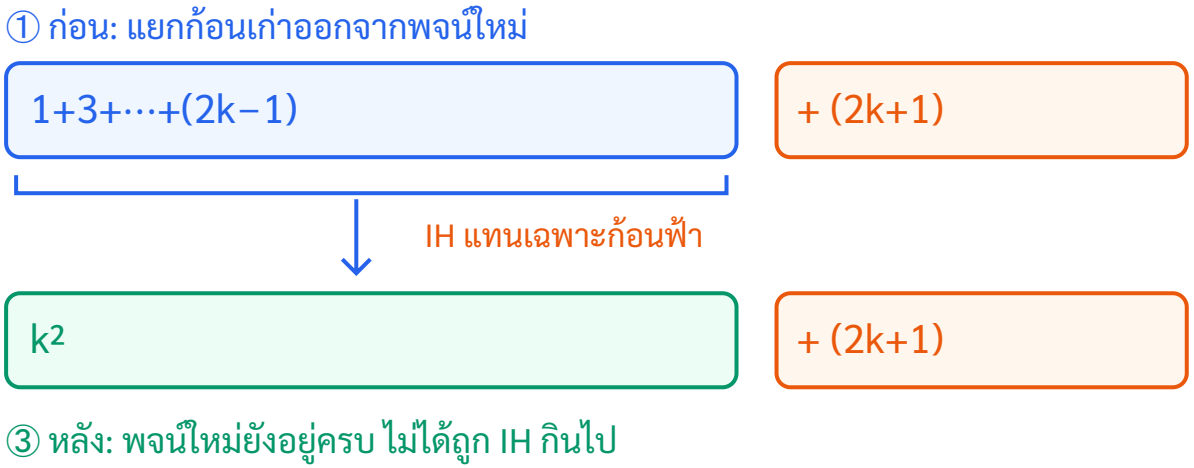


เช็กลิสต์ก่อนหยุด

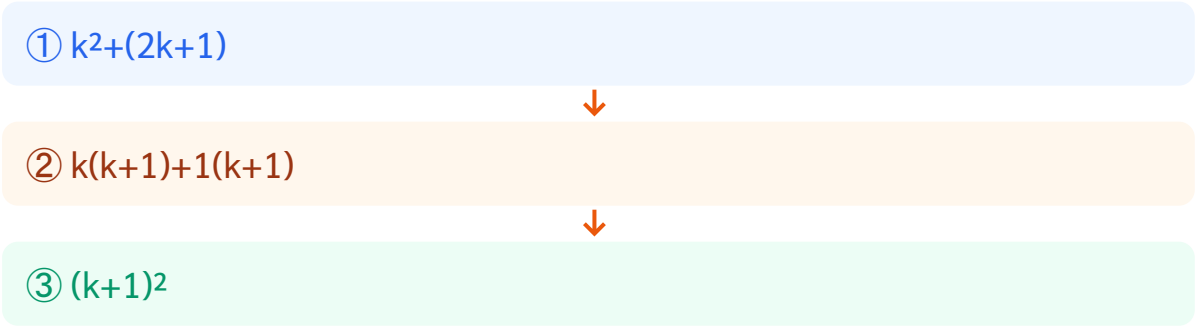
ฐานผ่านแล้ว ส่วนเป้าหมายที่ k+1 ยังใช้เป็นเหตุไม่ได้ เราต้องเริ่มจากนิพจน์ที่ต้องคำนวณ แล้วใช้ IH เฉพาะส่วนเก่าที่ตรงกัน

ข้อ 15(a) · ลงมือใช้ IH และตรวจคำตอบ

แยกผลบวกถึง 2k−1 ออกเป็นก้อนเก่า ส่วน 2k+1 เป็นพจน์ใหม่ที่ IH ไม่ครอบคลุม



บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. เริ่มด้านซ้ายใหม่	$A_{k+1}=[1+3+\cdots+(2k-1)]+(2k+1)$
2. ใช้ IH	$=k^2+(2k+1)$
3. ถอดวงเล็บ	$=k^2+2k+1$
4. แยกพจน์กลาง	$=k^2+k+k+1$
5. จัดกลุ่ม	$=k(k+1)+1(k+1)$
6. ดึงตัวร่วม	$=(k+1)(k+1)=(k+1)^2$ ตรงเป้าหมาย
7. ปิดอุปนัย	ฐาน n=1 จริง และขั้น S(k)→S(k+1) จริงสำหรับทุก k≥1 จึงข้อความจริงทุกจำนวนเต็ม n≥1
8. เช็กกลับ	n=4: $1+3+5+7=16=4^2$



เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

เติม k+1 อย่างเดียวจะเป็นคนละลำดับ พจน์ที่เพิ่มต้องมาจาก 2n−1 โดยแทน n=k+1

ข้อ 15(b) · ฐาน, IH และเป้าหมาย

โจทย์: พิสูจน์ $1\cdot2+2\cdot3+\cdots+n(n+1)=n(n+1)(n+2)/3$

ตัวอย่างสองพจน์ $1\cdot2+2\cdot3=2+6=8$ ให้ A_n เป็นผลบวกทางซ้าย เมื่อเพิ่มตำแหน่งจาก k เป็น k+1 พจน์ใหม่คือ $(k+1)((k+1)+1)=(k+1)(k+2)$

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. ฐานด้านซ้าย	$A_1=1\cdot2=2$
2. ฐานด้านขวา	$1(1+1)(1+2)/3=1\cdot2\cdot3/3=2$ จึงฐานผ่าน
3. เลือก k	ให้ k เป็นจำนวนเต็มใด ๆ ที่ $k\geq1$ โดยคง k ตัวเดิมตลอดขั้น
4. ASSUME / IH	สมมติ $A_k=1\cdot2+\cdots+k(k+1)=k(k+1)(k+2)/3$
5. PROVE	ต้องแสดง $A_{k+1}=(k+1)(k+2)(k+3)/3$

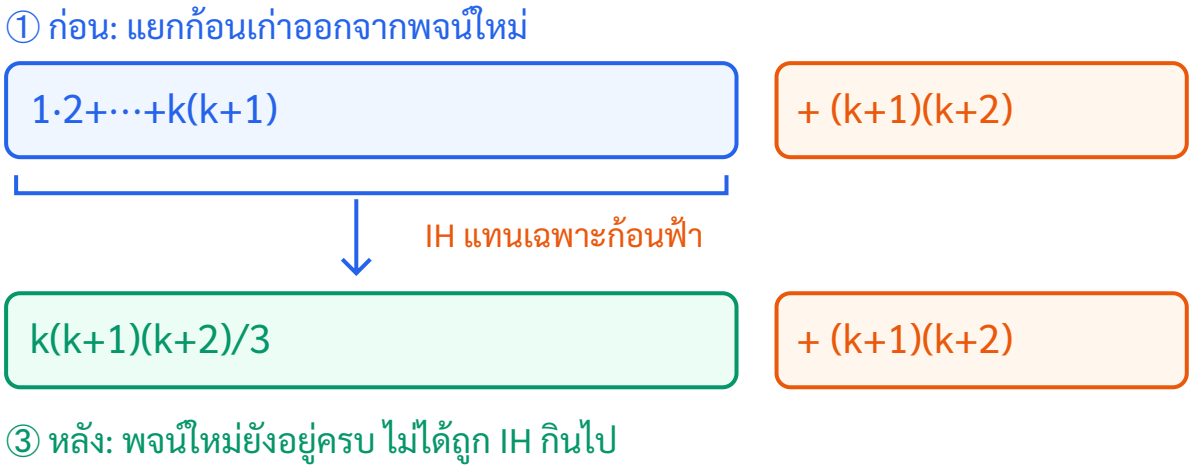


เช็กลิสต์ก่อนหยุด

ฐานผ่านแล้ว ส่วนเป้าหมายที่ k+1 ยังใช้เป็นเหตุไม่ได้ เราต้องเริ่มจากนิพจน์ที่ต้องคำนวณ แล้วใช้ IH เฉพาะส่วนเก่าที่ตรงกัน

ข้อ 15(b) · ลงมือใช้ IH และตรวจคำตอบ

ก้อนเก่ามีตัวประกอบ (k+1)(k+2) ร่วมกับพจน์ใหม่ เมื่อทำส่วนเป็น 3 แล้วจะดึงตัวร่วมนี้ออกได้



บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. เริ่มและแยกก้อน	$A_{k+1}=A_k+(k+1)(k+2)$
2. ใช้ IH	$=k(k+1)(k+2)/3+(k+1)(k+2)$
3. ทำส่วนเป็น 3	$=k(k+1)(k+2)/3+3(k+1)(k+2)/3$
4. รวมเศษ	$=[k(k+1)(k+2)+3(k+1)(k+2)]/3$
5. ดึง (k+1)(k+2)	$=(k+1)(k+2)(k+3)/3$
6. เทียบเป้าหมาย	ตรงกับการแทน n=k+1 ในสูตรเดิมครบทั้งสามตัวประกอบ
7. ปิดอุปนัย	ฐาน n=1 จริง และขั้น S(k)→S(k+1) จริงสำหรับทุก k≥1 จึงข้อความจริงทุกจำนวนเต็ม n≥1
8. เช็กกลับ	n=2 ให้ 8=2·3·4/3=8

① $k(k+1)(k+2)/3 + (k+1)(k+2)$

↓

② $[(k+1)(k+2)]\cdot(k+3)/3$

เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

ตอนแทน n=k+1 ต้องเปลี่ยน n+2 เป็น k+3 ด้วย ไม่ใช่คง k+2 ซ้ำสองตำแหน่ง

ข้อ 15(c) · ฐาน, IH และเป้าหมาย

โจทย์: พิสูจน์ $1(1!)+2(2!)+\cdots+n(n!)=(n+1)!-1$

ให้ A_n แทนผลบวก $i(i!)$ ตั้งแต่ $i=1$ ถึง n เช่น $A_2=1\cdot1+2\cdot2=5$ และ $3!-1=5$

ต้นฉบับหน้า 9 พิมพ์ $1(1!)+2(2!)+n(n!)$ โดยไม่มี $\cdots$ หากอ่านเป็นสามพจน์ตรงตัวจะไม่จริงสำหรับทุก n; ที่นี่ใช้ผลบวกที่ตั้งใจสื่อ $1(1!)+2(2!)+\cdots+n(n!)$ และระบุการแก้ไว้ชัดเจน

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. ฐานด้านซ้าย	$A_1=1(1!)=1$
2. ฐานด้านขวา	$(1+1)!-1=2!-1=2-1=1$
3. เลือก k	ให้ k เป็นจำนวนเต็มใด ๆ ที่ $k\geq1$ โดยคง k ตัวเดิมตลอดขั้น
4. ASSUME / IH	สมมติ $A_k=1(1!)+\cdots+k(k!)=(k+1)!-1$
5. PROVE	ต้องแสดง $A_{k+1}=(k+2)!-1$



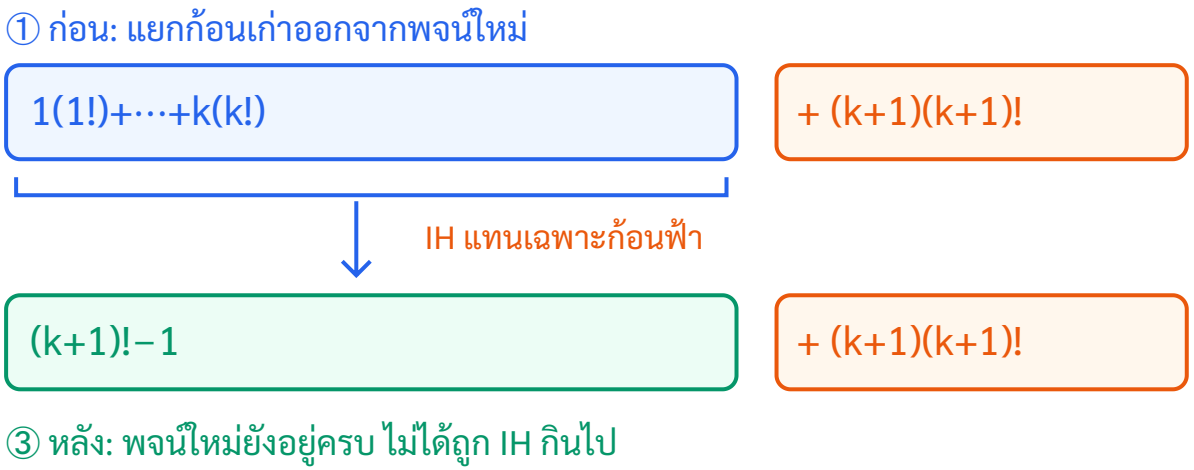


เช็กลิสต์ก่อนหยุด

ฐานผ่านแล้ว ส่วนเป้าหมายที่ k+1 ยังใช้เป็นเหตุไม่ได้ เราต้องเริ่มจากนิพจน์ที่ต้องคำนวณ แล้วใช้ IH เฉพาะส่วนเก่าที่ตรงกัน

ข้อ 15(c) · ลงมือใช้ IH และตรวจคำตอบ

พจน์ใหม่คือ (k+1) คูณแฟกทอเรียลของ k+1 เมื่อรวมกับ (k+1)! ใน IH จะมีแฟกทอเรียลก้อนเดียวกันให้ดึงออก



บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. แยกก้อนเก่า	$A_{k+1}=A_k+(k+1)(k+1)!$
2. ใช้ IH	$=[(k+1)!-1]+(k+1)(k+1)!$
3. ย้าย −1 ไปท้าย	$=(k+1)!+(k+1)(k+1)!-1$
4. ดึง (k+1)!	$=[1+(k+1)](k+1)!-1$
5. รวมตัวคูณ	$=(k+2)(k+1)!-1$
6. ใช้นิยาม !	$=(k+2)!-1$ ตรงเป้าหมาย
7. ปิดอุปนัย	ฐาน n=1 จริง และขั้น S(k)→S(k+1) จริงสำหรับทุก k≥1 จึงข้อความจริงทุกจำนวนเต็ม n≥1
8. เช็กกลับ	n=3: 1+4+18=23=4!−1

① $(k+1)!+(k+1)(k+1)!-1$

↓

② $[1+(k+1)](k+1)!-1$

↓

③ $(k+2)!-1$

เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

(k+2)! ไม่เท่ากับ (k+1)!+(k+2) แต่เท่ากับ (k+2)(k+1)! เพราะแฟกทอเรียลต่อด้วยการคูณ

ข้อ 15(d) · ฐาน, IH และเป้าหมาย

โจทย์: พิสูจน์ $1^2+2^2+\cdots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$

ให้ A_n เป็นผลบวกกำลังสอง n พจน์แรก เช่น $1^2+2^2=5$ อย่าสับสนผลบวกกำลังสองกับกำลังสองของผลบวก

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. ฐานด้านซ้าย	$A_1=1^2=1$
2. ฐานด้านขวา	$1\cdot2\cdot3/6=1$
3. เลือก k	ให้ k เป็นจำนวนเต็มใด ๆ ที่ $k\geq1$ โดยคง k ตัวเดิมตลอดขั้น
4. ASSUME / IH	สมมติ $A_k=1^2+\cdots+k^2=k(k+1)(2k+1)/6$
5. PROVE	ต้องแสดง $A_{k+1}=(k+1)(k+2)(2k+3)/6$ เพราะ $2(k+1)+1=2k+3$

① ASSUME / IH: ของเก่าที่ให้ยืม

$A_k = k(k+1)(2k+1)/6$

② ใช้เหตุผล

③ PROVE: เป้าหมาย ยังใช้เป็นเหตุไม่ได้

$A_{k+1} = (k+1)(k+2)(2k+3)/6$

① ใหม่: $(k+1)^2$

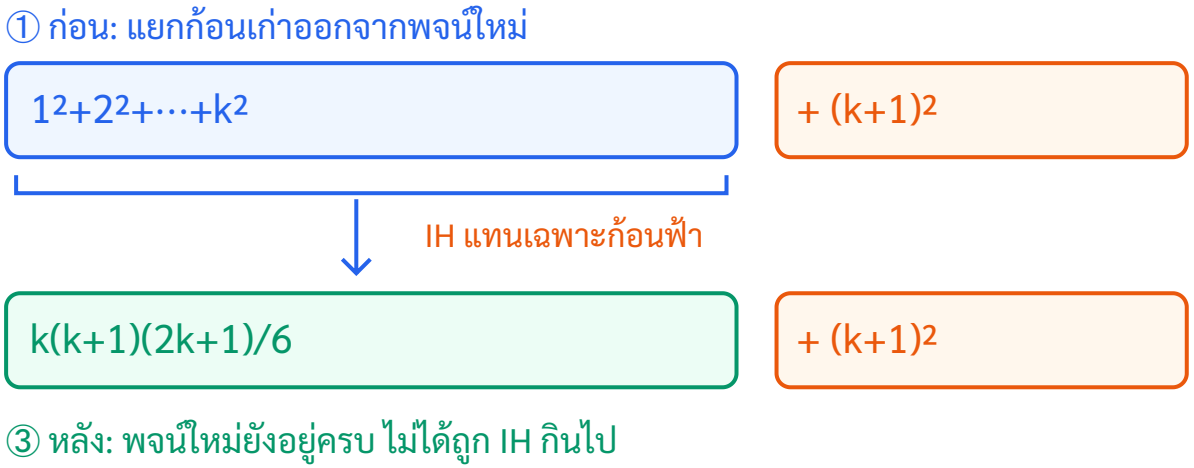
② $2n+1$ เมื่อ $n=k+1 \rightarrow 2k+3$

เช็กลิสต์ก่อนหยุด

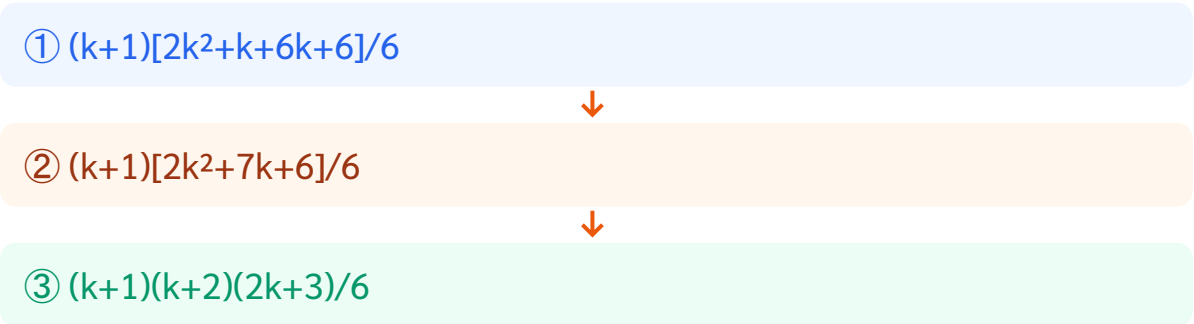
ฐานผ่านแล้ว ส่วนเป้าหมายที่ k+1 ยังใช้เป็นเหตุไม่ได้ เราต้องเริ่มจากนิพจน์ที่ต้องคำนวณ แล้วใช้ IH เฉพาะส่วนเก่าที่ตรงกัน

ข้อ 15(d) · ลงมือใช้ IH และตรวจคำตอบ

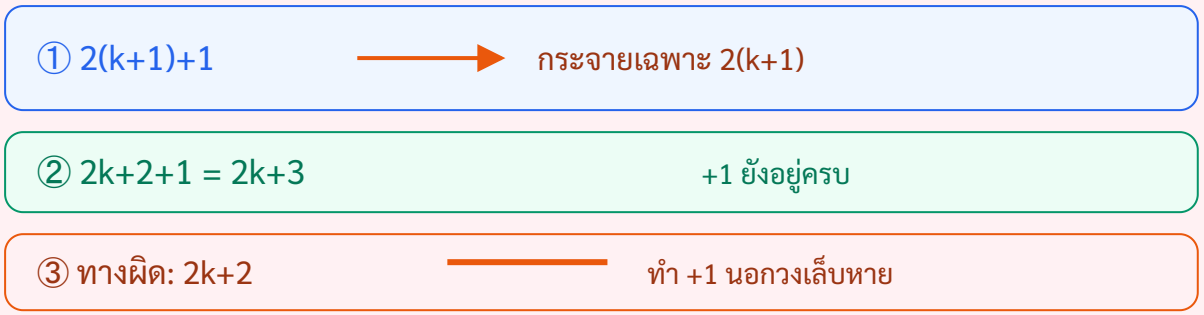
แยกพจน์ใหม่ $(k+1)^2$ ก่อนใช้ IH แล้วทำส่วนเป็น 6 ขั้นที่ยาวอยู่ในวงเล็บ เราจะกระจายและรวมทีละก้าว



บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. แยกก้อน	$A_{k+1}=A_k+(k+1)^2$
2. ใช้ IH	$=k(k+1)(2k+1)/6+(k+1)^2$
3. ทำส่วนเท่ากัน	$=[k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2]/6$
4. ดึง k+1	$=(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]/6$
5. กระจายวงเล็บ	$=(k+1)[2k^2+k+6k+6]/6$
6. รวมพจน์	$=(k+1)(2k^2+7k+6)/6$
7. แยกตัวประกอบ	$2k^2+7k+6=(k+2)(2k+3)$ เพราะกระจายได้ $2k^2+3k+4k+6$
8. แทนกลับ	$A_{k+1}=(k+1)(k+2)(2k+3)/6$ ตรงเป้าหมาย
9. ปิดอุปนัย	ฐาน n=1 จริง และขั้น S(k)→S(k+1) จริงสำหรับทุก $k\geq1$ จึงข้อความจริงทุกจำนวนเต็ม $n\geq1$
10. เช็กกลับ	n=3: 1+4+9=14=3·4·7/6



เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง



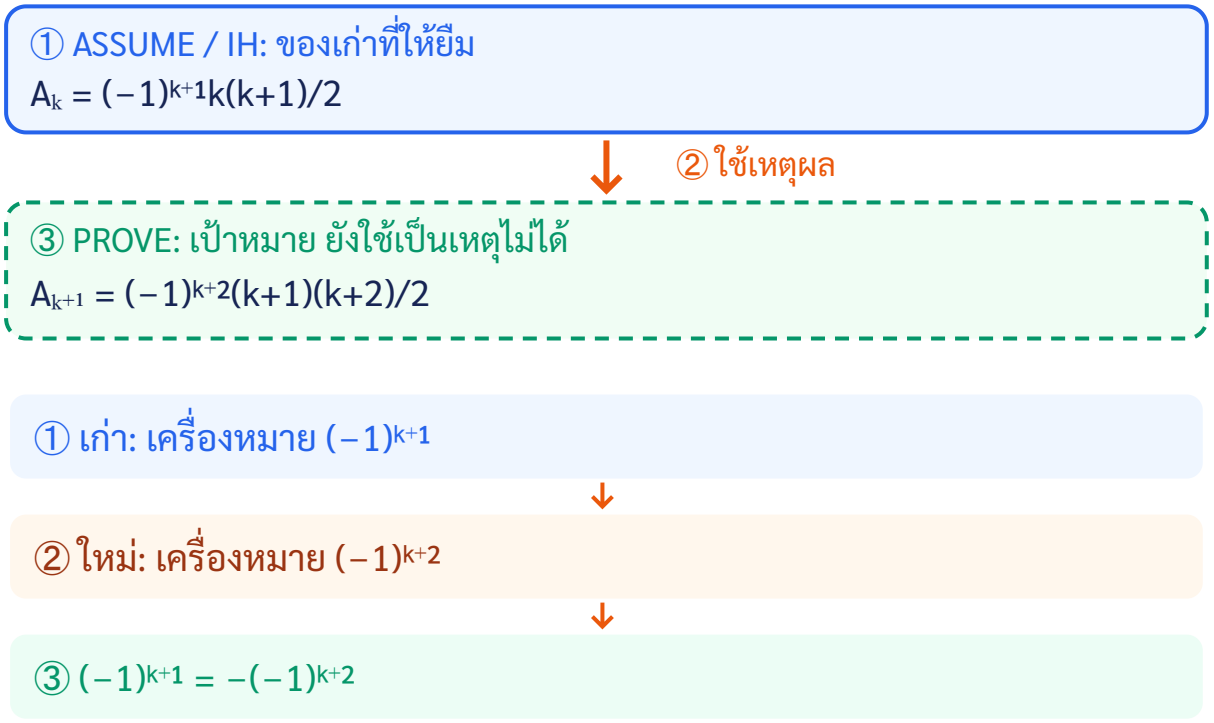
เขียน 2(k+1)+1 เป็น 2k+2 จะลืม +1 ท้าย ทำให้เป้าหมายผิดก่อนเริ่มพิสูจน์

ข้อ 15(e) · ฐาน, IH และเป้าหมาย

โจทย์: พิสูจน์ $1^2-2^2+3^2-\cdots+(-1)^{n+1}n^2=(-1)^{n+1}n(n+1)/2$

ให้ A_n เป็นผลบวกสลับเครื่องหมาย เช่น $A_2=1-4=-3$ และ $A_3=1-4+9=6$ เครื่องหมาย $(-1)^{n+1}$ ทำให้ตำแหน่งคี่บวก ตำแหน่งคู่ลบ

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. ฐานด้านซ้าย	$A_1=1$
2. ฐานด้านขวา	$(-1)^{1+1}\cdot 1\cdot 2/2=(-1)^2\cdot 1=1$
3. เลือก k	ให้ k เป็นจำนวนเต็มใด ๆ ที่ $k\geq 1$ โดยคง k ตัวเดิมตลอดขั้น
4. ASSUME / IH	สมมติ $A_k=(-1)^{k+1}k(k+1)/2$
5. PROVE	ต้องแสดง $A_{k+1}=(-1)^{k+2}(k+1)(k+2)/2$



เช็กลิสต์ก่อนหยุด

ฐานผ่านแล้ว ส่วนเป้าหมายที่ k+1 ยังใช้เป็นเหตุไม่ได้ เราต้องเริ่มจากนิพจน์ที่ต้องคำนวณ แล้วใช้ IH เฉพาะส่วนเก่าที่ตรงกัน

ข้อ 15(e) · ลงมือใช้ IH และตรวจคำตอบ

เลือกดึงเครื่องหมายของพจน์ใหม่ $(-1)^{k+2}$ ออกทั้งก้อน ทำให้พจน์เก่ามีเครื่องหมายลบอยู่ภายในแทน เป็นการเปลี่ยนรูปโดยรักษาค่าเดิม

① ก่อน: แยกก้อนเก่าออกจากพจน์ใหม่

$1^2-2^2+\cdots+(-1)^{k+1}k^2$ + $(-1)^{k+2}(k+1)^2$

IH แทนเฉพาะก้อนฟ้า

$(-1)^{k+1}k(k+1)/2$ + $(-1)^{k+2}(k+1)^2$

③ หลัง: พจน์ใหม่ยังอยู่ครบ ไม่ได้ถูก IH กินไป

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. แยกส่วนใหม่	$A_{k+1}=A_k+(-1)^{k+2}(k+1)^2$
2. ใช้ IH	$=(-1)^{k+1}k(k+1)/2+(-1)^{k+2}(k+1)^2$
3. เปลี่ยนเครื่องหมายเก่า	$=-(-1)^{k+2}k(k+1)/2+(-1)^{k+2}(k+1)^2$
4. ดึงเครื่องหมายร่วม	$=(-1)^{k+2}[-k(k+1)/2+(k+1)^2]$
5. ดึง k+1	$=(-1)^{k+2}(k+1)[-k/2+(k+1)]$
6. ทำส่วนเป็น 2	$=(-1)^{k+2}(k+1)[(-k+2k+2)/2]$
7. รวมเศษ	$=(-1)^{k+2}(k+1)(k+2)/2$ ตรงเป้าหมาย
8. ปิดอุปนัย	ฐาน n=1 จริง และขั้น S(k)→S(k+1) จริงสำหรับทุก k≥1 จึงข้อความจริงทุกจำนวนเต็ม n≥1
9. เช็กกลับ	n=2 ได้ $-3=(-1)^3\cdot2\cdot3/2$; n=3 ได้ $6=(-1)^4\cdot3\cdot4/2$

① $-k/2+(k+1) = (-k+2k+2)/2$

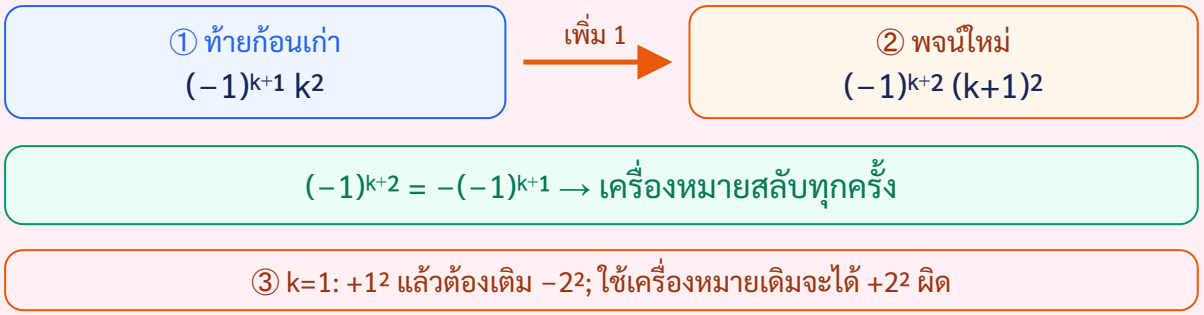
↓

② $= (k+2)/2$

↓

③ ผล: $(-1)^{k+2}(k+1)(k+2)/2$

เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง



$(-1)^{k+2} = -(-1)^{k+1}$ → เครื่องหมายสลับทุกครั้ง

③ k=1: $+1^2$ แล้วต้องเติม -2^2; ใช้เครื่องหมายเดิมจะได้ $+2^2$ ผิด

ถ้าใช้เครื่องหมาย $(-1)^{k+1}$ กับพจน์ใหม่ด้วย จะไม่ได้สลับเครื่องหมาย เช่นต่อจาก n=1 ต้องเติม -4 ไม่ใช่ $+4$

ข้อ 15(f) · ฐาน, IH และเป้าหมาย

โจทย์: พิสูจน์ $1^3+2^3+\cdots+n^3=[n(n+1)/2]^2$

ให้ A_n เป็นผลบวกกำลังสาม เช่น $A_2=1+8=9=[2\cdot3/2]^2$ วงเล็บบนขวาหมายถึงยกกำลังสองทั้งเศษส่วน

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. ฐานด้านซ้าย	$A_1=1^3=1$
2. ฐานด้านขวา	$[1\cdot2/2]^2=1^2=1$
3. เลือก k	ให้ k เป็นจำนวนเต็มใด ๆ ที่ $k\geq1$ โดยคง k ตัวเดิมตลอดขั้น
4. ASSUME / IH	สมมติ $A_k=[k(k+1)/2]^2$
5. PROVE	ต้องแสดง $A_{k+1}=[(k+1)(k+2)/2]^2$



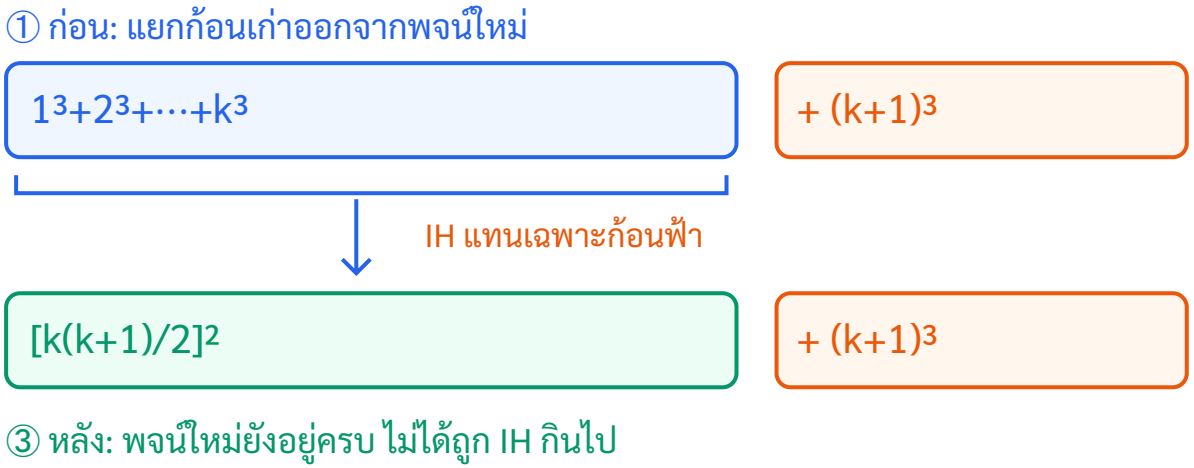


เช็กลิสต์ก่อนหยุด

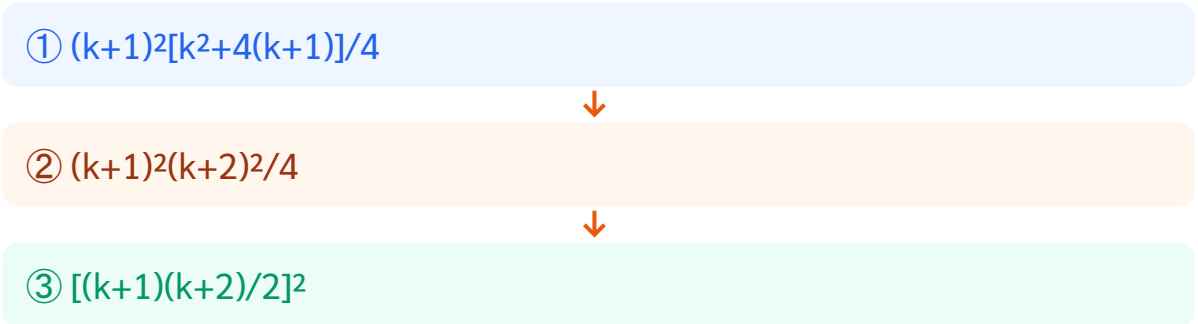
ฐานผ่านแล้ว ส่วนเป้าหมายที่ k+1 ยังใช้เป็นเหตุไม่ได้ เราต้องเริ่มจากนิพจน์ที่ต้องคำนวณ แล้วใช้ IH เฉพาะส่วนเก่าที่ตรงกัน

ข้อ 15(f) · ลงมือใช้ IH และตรวจคำตอบ

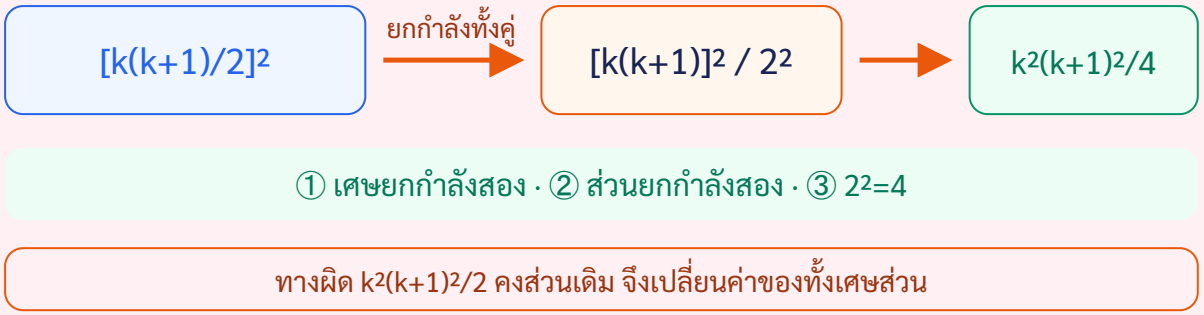
หลังใช้ IH จะมีก้อน $(k+1)^2$ ร่วมกัน แต่ต้องเปิดกำลังของเศษส่วนให้ถูกก่อน: ส่วน 2 ยกกำลังสองเป็น 4



บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. แยกก้อน	$A_{k+1}=A_k+(k+1)^3$
2. ใช้ IH	$=[k(k+1)/2]^2+(k+1)^3$
3. เปิดกำลังเศษส่วน	$=k^2(k+1)^2/4+(k+1)^3$
4. ทำส่วนเท่ากัน	$=[k^2(k+1)^2+4(k+1)^3]/4$
5. ดึง $(k+1)^2$	$=(k+1)^2[k^2+4(k+1)]/4$
6. กระจาย	$=(k+1)^2(k^2+4k+4)/4$
7. ใช้กำลังสองสมบูรณ์	$=(k+1)^2(k+2)^2/4$
8. รวมกำลัง	$=[(k+1)(k+2)/2]^2$ ตรงเป้าหมาย
9. ปิดอุปนัย	ฐาน n=1 จริง และขั้น S(k)→S(k+1) จริงสำหรับทุก $k\geq 1$ จึงข้อความจริงทุกจำนวนเต็ม $n\geq 1$
10. เช็กกลับ	n=3: $1+8+27=36=[3\cdot 4/2]^2$



เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง



① เศษยกกำลังสอง · ② ส่วนยกกำลังสอง · ③ $2^2=4$

ทางผิด $k^2(k+1)^2/2$ คงส่วนเดิม จึงเปลี่ยนค่าของทั้งเศษส่วน

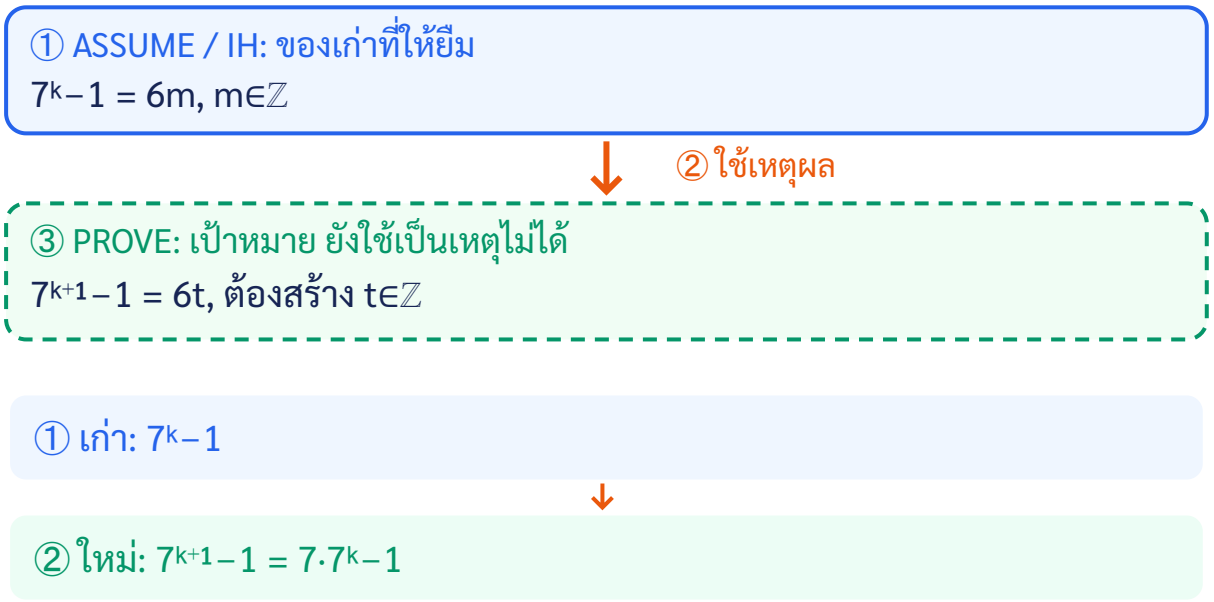
$[k(k+1)/2]^2$ ไม่เท่ากับ $k^2(k+1)^2/2$ ต้องยกกำลังส่วนด้วย จึงได้ส่วน 4

ข้อ 16(a) · ฐาน, IH และเป้าหมาย

โจทย์: พิสูจน์ว่า 7^n-1 หารด้วย 6 ลงตัวทุกจำนวนเต็ม $n\geq 1$

คำว่า “หารด้วย 6 ลงตัว” หมายถึงเขียนเป็น 6 คูณจำนวนเต็มได้ เราจะใช้ตัวคูณเก่า m เพื่อสร้างตัวคูณใหม่ t

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. ฐาน	$7^1-1=6=6(1)$ จึงหารด้วย 6 ลงตัว
2. เลือก k	ให้ k เป็นจำนวนเต็มใด ๆ ที่ $k\geq 1$ โดยคง k ตัวเดิมตลอดขั้น
3. ASSUME / IH	สมมติ $7^k-1=6m$ โดย m เป็นจำนวนเต็ม
4. PROVE	ต้องสร้างจำนวนเต็ม t ที่ทำให้ $7^{k+1}-1=6t$

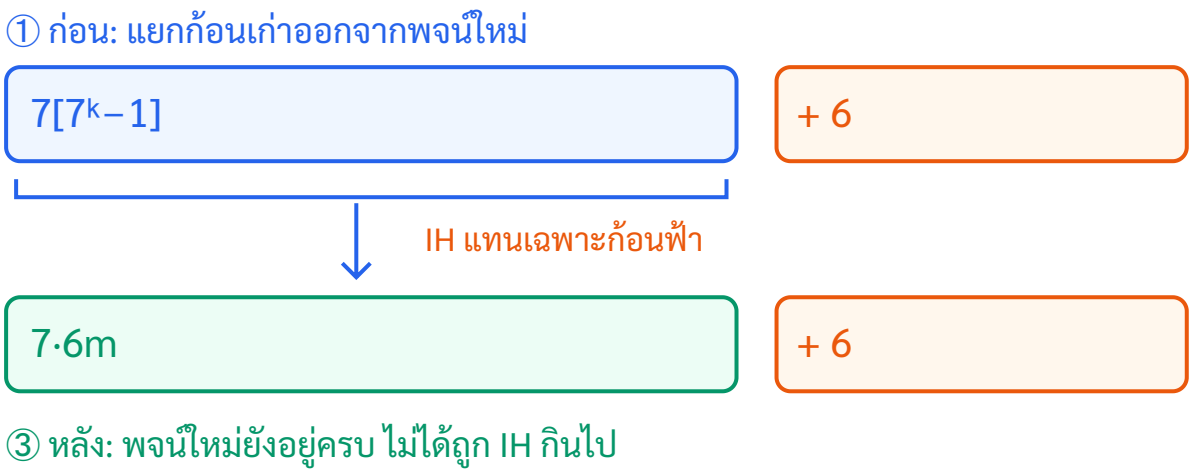


เช็กลิสต์ก่อนหยุด

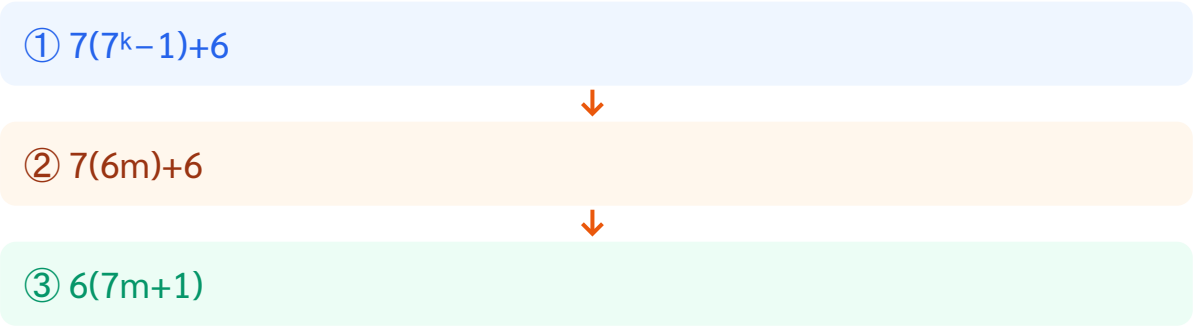
ฐานผ่านแล้ว ส่วนเป้าหมายที่ k+1 ยังใช้เป็นเหตุไม่ได้ เราต้องเริ่มจากนิพจน์ที่ต้องคำนวณ แล้วใช้ IH เฉพาะส่วนเก่าที่ตรงกัน

ข้อ 16(a) · ลงมือใช้ IH และตรวจคำตอบ

คูณก้อนเก่าด้วย 7 จะได้ −7 ที่ท้าย จึงเติม 6 เพื่อกลับมาเป็น −1



บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. เปิดกำลัง	$7^{k+1}-1=7\cdot7^{k}-1$
2. รักษาค่าด้วย −7+6	$=7\cdot7^{k}-7+6$
3. ดึง 7	$=7(7^{k}-1)+6$
4. ใช้ IH	$=7(6m)+6$
5. คูณ	$=42m+6$
6. ดึง 6	$=6(7m+1)$
7. สร้างตัวคูณ	$t=7m+1$ เป็นจำนวนเต็ม จึง 6 หาร $7^{k+1}-1$ ลงตัว
8. ปิดอุปนัย	ฐาน n=1 จริง และขั้น S(k)→S(k+1) จริงสำหรับทุก $k\geq1$ จึงข้อความจริงทุกจำนวนเต็ม $n\geq1$
9. เช็กกลับ	n=2: $7^{2}-1=48=6(8)$ โดยตัวคูณใหม่จาก m=1 คือ 7·1+1=8



เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

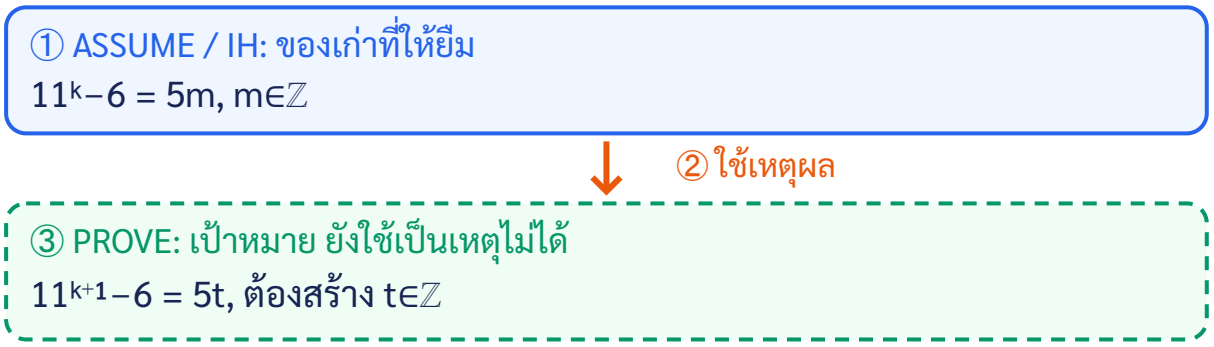
$7^{k+1}-1$ ไม่เท่ากับ $7(7^{k}-1)$ ต้องมี +6 ที่ท้ายเพื่อรักษาค่า

ข้อ 16(b) · ฐาน, IH และเป้าหมาย

โจทย์: พิสูจน์ว่า $11^n - 6$ หารด้วย 5 ลงตัวทุกจำนวนเต็ม $n \geq 1$

ต่างจากข้อก่อนตรงค่าที่ลบคือ 6 เมื่อนำก้อนเก่าไปคูณด้วย 11 ค่าท้ายจะกลายเป็น -66 เราจึงต้องชดเชย 60 เพื่อกลับเป็น -6

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. ฐาน	$11^1 - 6 = 5 = 5(1)$ จึงหารด้วย 5 ลงตัว
2. เลือก k	ให้ k เป็นจำนวนเต็มใด ๆ ที่ $k \geq 1$ โดยคง k ตัวเดิมตลอดขั้น
3. ASSUME / IH	สมมติ $11^k - 6 = 5m$ โดย m เป็นจำนวนเต็ม
4. PROVE	ต้องสร้าง $t \in \mathbb{Z}$ ให้ $11^{k+1} - 6 = 5t$



① $11(11^k - 6) = 11^{k+1} - 66$

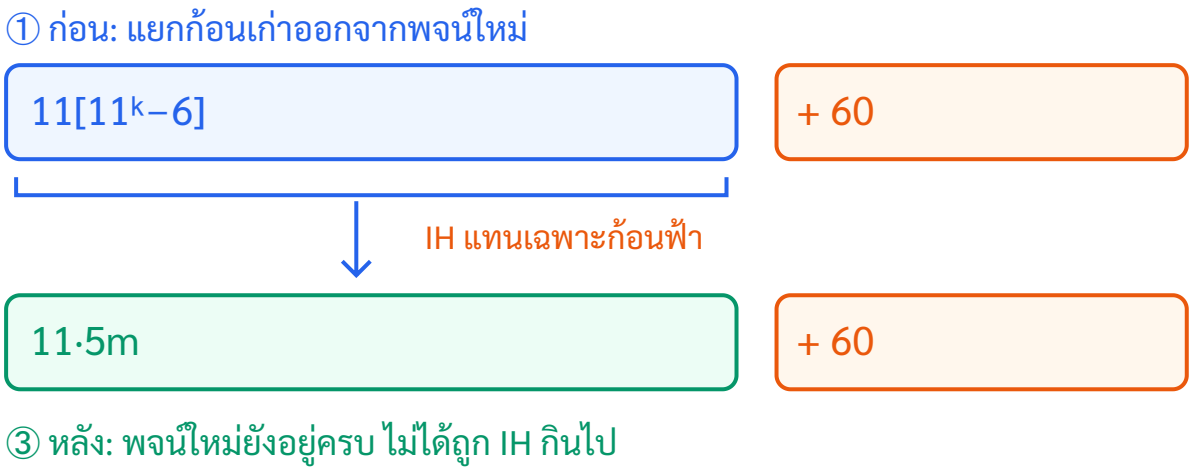
② เติม 60 $\longrightarrow$ $11^{k+1} - 6$

เช็กลิสต์ก่อนหยุด

ฐานผ่านแล้ว ส่วนเป้าหมายที่ k+1 ยังใช้เป็นเหตุไม่ได้ เราต้องเริ่มจากนิพจน์ที่ต้องคำนวณ แล้วใช้ IH เฉพาะส่วนเก่าที่ตรงกัน

ข้อ 16(b) · ลงมือใช้ IH และตรวจคำตอบ

ทำให้ก้อน 11^k-6 ปรากฏก่อนใช้ IH การเติม 60 ไม่ใช่การเดา แต่เป็นส่วนต่างระหว่าง -66 กับ -6



บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. เปิดกำลัง	$11^{k+1}-6=11\cdot11^k-6$
2. เขียนค่าคงเดิมใหม่	$=11\cdot11^k-66+60$
3. ดึง 11	$=11(11^k-6)+60$
4. ใช้ IH	$=11(5m)+60$
5. คูณ	$=55m+60$
6. ดึง 5	$=5(11m+12)$
7. สร้างตัวคูณ	$t=11m+12$ เป็นจำนวนเต็ม จึงหารด้วย 5 ลงตัว
8. ปิดอุปนัย	ฐาน $n=1$ จริง และขั้น $S(k)\to S(k+1)$ จริงสำหรับทุก $k\geq1$ จึงข้อความจริงทุกจำนวนเต็ม $n\geq1$
9. เช็กกลับ	$n=2$: $121-6=115=5(23)$; จาก $m=1$ ได้ $t=11\cdot1+12=23$

① $11(11^k-6)+60$

↓

② $11(5m)+60$

↓

③ $5(11m+12)$

เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

เติม 6 หรือ 5 ตามตัวเลขที่เห็นในโจทย์ไม่ได้ ต้องกระจายวงเล็บจริงแล้วหาส่วนต่าง ครั้งนี้ส่วนต่างคือ 60

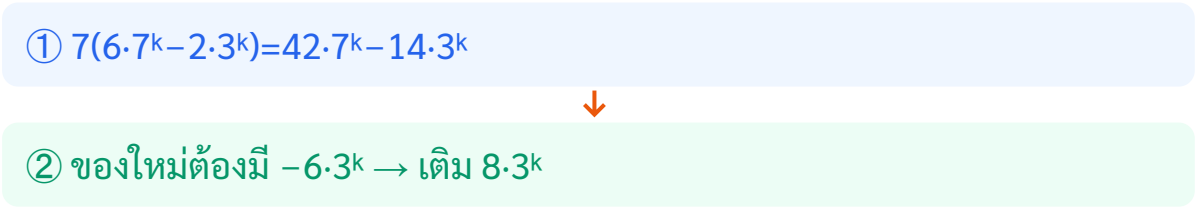
ข้อ 16(c) · ฐาน, IH และเป้าหมาย

โจทย์: พิสูจน์ว่า $6\cdot7^n-2\cdot3^n$ หารด้วย 4 ลงตัวทุกจำนวนเต็ม $n\geq1$

มีฐานยกกำลังสองตัวคือ 7 กับ 3 เราจะเลือกคูณก้อนเก่าด้วย 7 เพื่อให้พจน์แรกตรงกับของใหม่ แล้วซ่อมส่วนต่างของพจน์ที่มี 3^k

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. ฐาน: แทน n=1	$6\cdot7-2\cdot3=42-6=36$
2. ฐาน: จัดรูป	$36=4(9)$ จึงหารด้วย 4 ลงตัว
3. เลือก k	ให้ k เป็นจำนวนเต็มใด ๆ ที่ $k\geq1$ โดยคง k ตัวเดิมตลอดขั้น
4. ASSUME / IH	สมมติ $6\cdot7^k-2\cdot3^k=4m$ โดย m เป็นจำนวนเต็ม
5. PROVE	ต้องสร้าง $t\in\mathbb{Z}$ ให้ $6\cdot7^{k+1}-2\cdot3^{k+1}=4t$



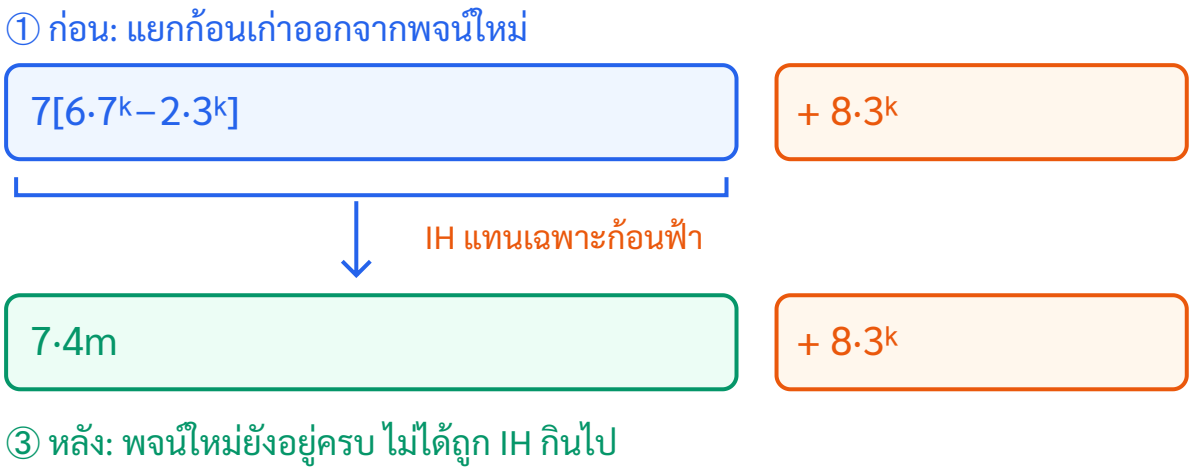


เช็กลิสต์ก่อนหยุด

ฐานผ่านแล้ว ส่วนเป้าหมายที่ k+1 ยังใช้เป็นเหตุไม่ได้ เราต้องเริ่มจากนิพจน์ที่ต้องคำนวณ แล้วใช้ IH เฉพาะส่วนเก่าที่ตรงกัน

ข้อ 16(c) · ลงมือใช้ IH และตรวจคำตอบ

ส่วนชดเชย $8\cdot3^k$ มีตัวประกอบ 4 อยู่แล้ว จึงรวมกับ 7 เท่าของก้อนเก่าที่หารด้วย 4 ลงตัวได้



บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. เปิดกำลังใหม่	$6\cdot7^{k+1}-2\cdot3^{k+1}=42\cdot7^k-6\cdot3^k$
2. แยก −6 เป็น −14+8	$=42\cdot7^k-14\cdot3^k+8\cdot3^k$
3. ดึง 7 จากสองพจน์แรก	$=7(6\cdot7^k-2\cdot3^k)+8\cdot3^k$
4. ใช้ IH	$=7(4m)+8\cdot3^k$
5. คูณ	$=28m+8\cdot3^k$
6. ดึง 4	$=4(7m+2\cdot3^k)$
7. ตรวจตัวคูณ	$t=7m+2\cdot3^k$ เป็นจำนวนเต็ม เพราะ m,k เป็นจำนวนเต็มและ $k\geq1$
8. อ่านผล	ได้ 4t จึงหารด้วย 4 ลงตัว
9. ปิดอุปนัย	ฐาน n=1 จริง และขั้น S(k)→S(k+1) จริงสำหรับทุก $k\geq1$ จึงข้อความจริงทุกจำนวนเต็ม $n\geq1$
10. เช็กกลับ	n=2: $6\cdot49-2\cdot9=294-18=276=4(69)$; จาก k=1,m=9 ได้ $t=7\cdot9+2\cdot3=69$

① $42\cdot7^k-6\cdot3^k$

↓

② $7(6\cdot7^k-2\cdot3^k)+8\cdot3^k$

↓

③ $4(7m+2\cdot3^k)$

เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

① เป้าหมายใหม่: $42\cdot7^k - 6\cdot3^k$

② $7[6\cdot7^k - 2\cdot3^k] = 42\cdot7^k - 14\cdot3^k$

เติมส่วนต่าง $+8\cdot3^k$

③ $7[6\cdot7^k - 2\cdot3^k] + 8\cdot3^k$
IH แทนเฉพาะก้อนเก่า → $7(4m)+8\cdot3^k = 4(7m+2\cdot3^k)$

คูณก้อนเก่าทั้งหมดด้วย 7 แล้วลืมซ่อมพจน์ที่มีฐาน 3 จะทำให้สัมประสิทธิ์ −6 กลายเป็น −14 ซึ่งไม่ใช่นิพจน์เป้าหมาย

ข้อ 17(a) · ฐาน, IH และเป้าหมาย

โจทย์: พิสูจน์ $2+4+\cdots+2n=n(n+1)$ ทุกจำนวนเต็ม $n\geq 1$

ให้ A_n เป็นผลบวก n จำนวนคู่บวกแรก เช่น $2+4+6=12$ พจน์ที่ n คือ $2n$ ดังนั้นพจน์ใหม่คือ $2(k+1)$

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. ฐานซ้าย	$A_1=2$
2. ฐานขวา	$1(1+1)=2$
3. เลือก k	ให้ k เป็นจำนวนเต็มใด ๆ ที่ $k\geq 1$ โดยคง k ตัวเดิมตลอดขั้น
4. ASSUME / IH	สมมติ $A_k=2+4+\cdots+2k=k(k+1)$
5. PROVE	ต้องแสดง $A_{k+1}=(k+1)(k+2)$



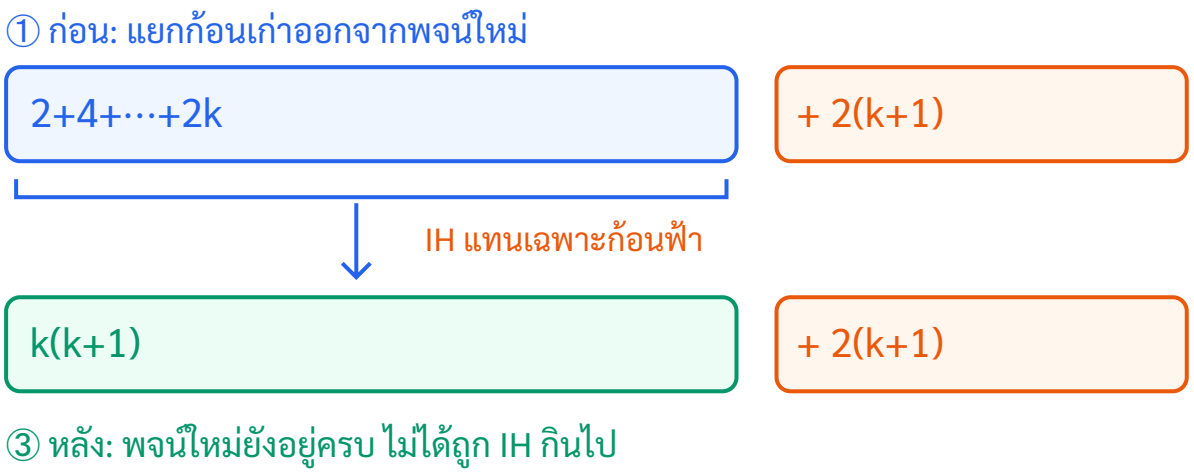


เช็กลิสต์ก่อนหยุด

ฐานผ่านแล้ว ส่วนเป้าหมายที่ k+1 ยังใช้เป็นเหตุไม่ได้ เราต้องเริ่มจากนิพจน์ที่ต้องคำนวณ แล้วใช้ IH เฉพาะส่วนเก่าที่ตรงกัน

ข้อ 17(a) · ลงมือใช้ IH และตรวจคำตอบ

หลังแทนก้อนเก่าด้วย k(k+1) ทั้งของเก่าและพจน์ใหม่มีตัวประกอบ k+1 จึงดึงออกได้



บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. แยกก้อน	$A_{k+1}=A_k+2(k+1)$
2. ใช้ IH	$=k(k+1)+2(k+1)$
3. ดึง k+1	$=(k+1)(k+2)$
4. เทียบเป้าหมาย	ตรงสูตรเมื่อแทน n=k+1
5. ปิดอุปนัย	ฐาน n=1 จริง และขั้น S(k)→S(k+1) จริงสำหรับทุก k≥1 จึงข้อความจริงทุกจำนวนเต็ม n≥1
6. เช็กกลับ	n=3: 2+4+6=12=3·4

① $k(k+1)+2(k+1)$

↓

② $(k+1)(k+2)$

เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

พจน์ใหม่คือ 2(k+1)=2k+2 ไม่ใช่ 2k+1 เพราะผลบวกนี้เป็นลำดับจำนวนคู่

ข้อ 17(b) · ฐาน, IH และเป้าหมาย

โจทย์: พิสูจน์ $2^2+4^2+\cdots+(2n)^2=2n(n+1)(2n+1)/3$

ให้ A_n แทนผลบวกกำลังสองของจำนวนคู่บวก n ตัวแรก เช่น $A_2=4+16=20$ พจน์ใหม่ต้องยกกำลังสองทั้ง $2(k+1)$

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. ฐานซ้าย	$A_1=2^2=4$
2. ฐานขวา	$2\cdot1\cdot2\cdot3/3=4$
3. เลือก k	ให้ k เป็นจำนวนเต็มใด ๆ ที่ $k\geq1$ โดยคง k ตัวเดิมตลอดขั้น
4. ASSUME / IH	สมมติ $A_k=2k(k+1)(2k+1)/3$
5. PROVE	ต้องแสดง $A_{k+1}=2(k+1)(k+2)(2k+3)/3$



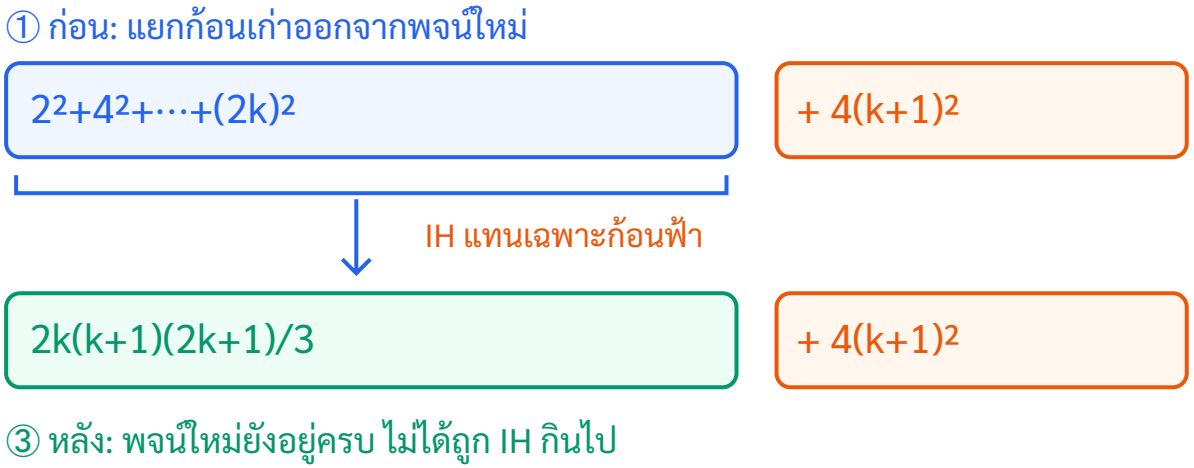


เช็กลิสต์ก่อนหยุด

ฐานผ่านแล้ว ส่วนเป้าหมายที่ k+1 ยังใช้เป็นเหตุไม่ได้ เราต้องเริ่มจากนิพจน์ที่ต้องคำนวณ แล้วใช้ IH เฉพาะส่วนเก่าที่ตรงกัน

ข้อ 17(b) · ลงมือใช้ IH และตรวจคำตอบ

แยกก้อนเก่าแล้วใช้ IH จากนั้นทำส่วนเป็น 3 เพื่อดึงตัวร่วม 2(k+1) ออก เราจะแสดงการกระจายที่จำเป็นครบ



บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. แยกก้อน	$A_{k+1}=A_k+[2(k+1)]^2$
2. ใช้ IH และเปิดกำลัง	$=2k(k+1)(2k+1)/3+4(k+1)^2$
3. ทำส่วนเป็น 3	$=[2k(k+1)(2k+1)+12(k+1)^2]/3$
4. ดึง 2(k+1)	$=2(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]/3$
5. กระจาย	$=2(k+1)[2k^2+k+6k+6]/3$
6. รวมพจน์	$=2(k+1)(2k^2+7k+6)/3$
7. แยกตัวประกอบ	$=2(k+1)(k+2)(2k+3)/3$
8. เช็กเป้าหมาย	ตรงกับ n=k+1 ทุกตำแหน่ง
9. ปิดอุปนัย	ฐาน n=1 จริง และขั้น S(k)→S(k+1) จริงสำหรับทุก k≥1 จึงข้อความจริงทุกจำนวนเต็ม n≥1
10. เช็กกลับ	n=2: 4+16=20=2·2·3·5/3

① $2(k+1)[2k^2+k+6k+6]/3$

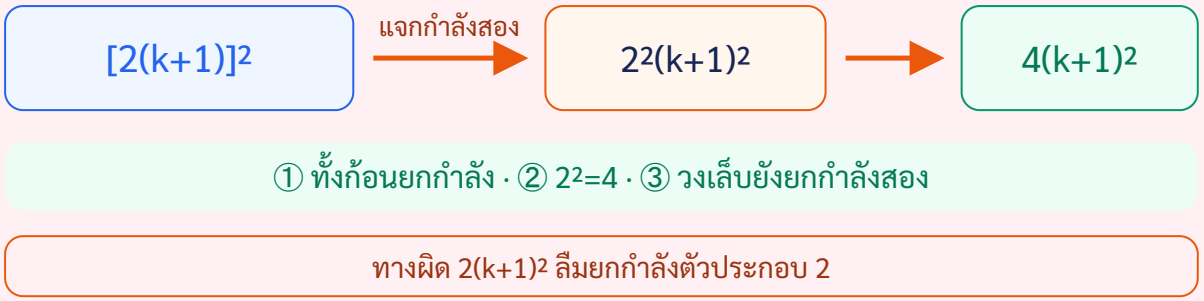
↓

② $2(k+1)(2k^2+7k+6)/3$

↓

③ $2(k+1)(k+2)(2k+3)/3$

เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง



① ทั้งก้อนยกกำลัง · ② $2^2=4$ · ③ วงเล็บยังยกกำลังสอง

ทางผิด $2(k+1)^2$ ลืมยกกำลังตัวประกอบ 2

$[2(k+1)]^2$ ไม่เท่ากับ $2(k+1)^2$ ต้องยกกำลัง 2 ด้วย จึงเป็น $4(k+1)^2$

ข้อ 17(c) · ฐาน, IH และเป้าหมาย

โจทย์: พิสูจน์ $1/2!+2/3!+\cdots+n/(n+1)!=1-1/(n+1)!$

ให้ A_n เป็นผลบวกทางซ้าย เช่น $A_2=1/2+2/6=5/6$ จำนวนที่ตำแหน่ง n มีตัวเศษ n แต่ตัวส่วน $(n+1)!$ จึงเปลี่ยนคนละตำแหน่งเมื่อเพิ่มพจน์

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. ฐานซ้าย	$A_1=1/2!=1/2$
2. ฐานขวา	$1-1/2!=1-1/2=1/2$
3. เลือก k	ให้ k เป็นจำนวนเต็มใด ๆ ที่ $k\geq 1$ โดยคง k ตัวเดิมตลอดขั้น
4. ASSUME / IH	สมมติ $A_k=1-1/(k+1)!$
5. PROVE	ต้องแสดง $A_{k+1}=1-1/(k+2)!$

① ASSUME / IH: ของเก่าที่ให้ยืม
$A_k = 1-1/(k+1)!$

② ใช้เหตุผล

③ PROVE: เป้าหมาย ยังใช้เป็นเหตุไม่ได้
$A_{k+1} = 1-1/(k+2)!$

① พจน์ใหม่: $(k+1)/(k+2)!$

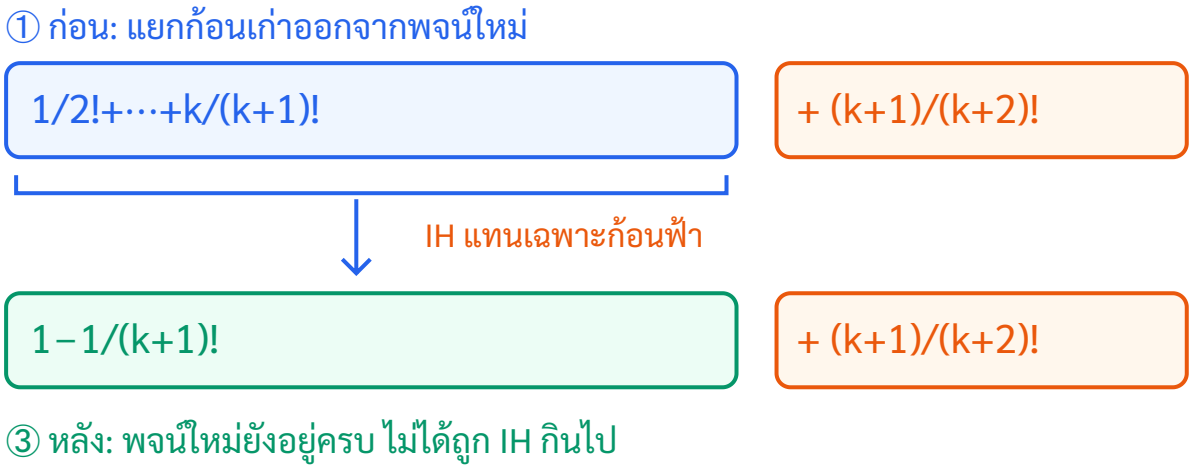
② $(k+2)! = (k+2)(k+1)!$

เช็กลิสต์ก่อนหยุด

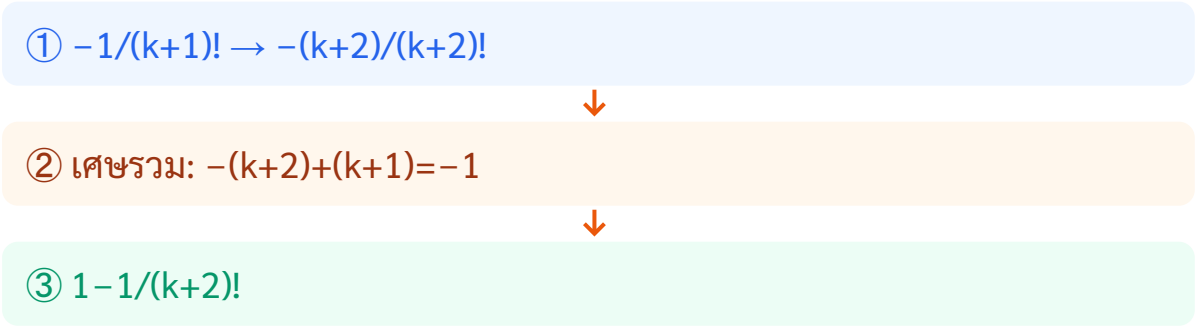
ฐานผ่านแล้ว ส่วนเป้าหมายที่ k+1 ยังใช้เป็นเหตุไม่ได้ เราต้องเริ่มจากนิพจน์ที่ต้องคำนวณ แล้วใช้ IH เฉพาะส่วนเก่าที่ตรงกัน

ข้อ 17(c) · ลงมือใช้ IH และตรวจคำตอบ

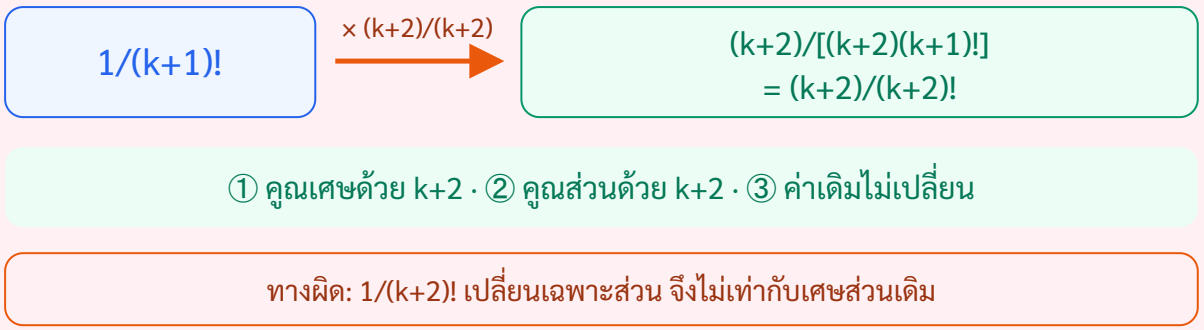
ตัวส่วนของพจน์ใหม่คือ (k+2)! เราต้องเปลี่ยน 1/(k+1)! ให้มีส่วนเดียวกัน โดยคูณเศษด้วย k+2 พร้อมกัน



บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. แยกก้อน	$A_{k+1}=A_k+(k+1)/(k+2)!$
2. ใช้ IH	$=1-1/(k+1)!+(k+1)/(k+2)!$
3. เปลี่ยนส่วนของพจน์ลบ	$1/(k+1)!=(k+2)/[(k+2)(k+1)!]=(k+2)/(k+2)!$
4. แทนกลับ	$=1-(k+2)/(k+2)!+(k+1)/(k+2)!$
5. รวมเศษ	$=1+[-(k+2)+(k+1)]/(k+2)!$
6. ถอดวงเล็บเศษ	$-(k+2)+(k+1)=-k-2+k+1=-1$
7. สรุป	$=1-1/(k+2)!$ ตรงเป้าหมาย
8. ปิดอุปนัย	ฐาน n=1 จริง และขั้น S(k)→S(k+1) จริงสำหรับทุก $k\geq 1$ จึงข้อความจริงทุกจำนวนเต็ม $n\geq 1$
9. เช็กกลับ	n=2: 1/2+2/6=3/6+2/6=5/6=1−1/6



เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง



เปลี่ยนตัวส่วน (k+1)! เป็น (k+2)! โดยไม่คูณตัวเศษด้วย k+2 ทำให้ค่าของเศษส่วนเปลี่ยน; ใช้ IH แล้วก็ยังต้องรักษาค่าทุกบรรทัด

ข้อ 17(d) · ฐาน, IH และเป้าหมาย

โจทย์: พิสูจน์ $2^{n+1} < 1+(n+1)2^n$ ทุกจำนวนเต็ม $n \geq 1$

นี่เป็นอสมการเคร่งครัด ต้องรักษาเครื่องหมาย < อย่างน้อยหนึ่งก้าวจนถึงปลายทาง ตัวอย่าง n=1 ให้ 4<5 ซึ่งเป็นฐานจริง

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. ฐานซ้าย	$2^{1+1}=2^2=4$
2. ฐานขวา	$1+(1+1)2^1=1+2\cdot2=5$
3. เทียบ	$4<5$ จึงฐานผ่าน
4. เลือก k	ให้ k เป็นจำนวนเต็มใด ๆ ที่ $k \geq 1$ โดยคง k ตัวเดิมตลอดขั้น
5. ASSUME / IH	สมมติ $2^{k+1}<1+(k+1)2^k$
6. PROVE	ต้องแสดง $2^{k+2}<1+(k+2)2^{k+1}$



เช็กลิสต์ก่อนหยุด

ฐานผ่านแล้ว ส่วนเป้าหมายที่ k+1 ยังใช้เป็นเหตุไม่ได้ เราต้องเริ่มจากนิพจน์ที่ต้องคำนวณ แล้วใช้ IH เฉพาะส่วนเก่าที่ตรงกัน

ข้อ 17(d) · ลงมือใช้ IH และตรวจคำตอบ

ใช้ IH กับ 2^{k+1} หลังเปิดซ้ายใหม่เป็น 2 เท่าของมัน จากนั้นต้องเทียบขอบที่ได้กับเป้าหมายอีกครั้ง ไม่หยุดแค่ใช้ IH

บรรทัด / ทำอะไร	เขียนอะไร และเพราะอะไร
1. เปิดซ้ายใหม่	$2^{k+2}=2\cdot 2^{k+1}$
2. ใช้ IH คูณด้วย 2>0	$<2[1+(k+1)2^k]$
3. กระจาย	$=2+(k+1)2^{k+1}$
4. หาช่องว่างถึงเป้าหมาย	$[1+(k+2)2^{k+1}]-[2+(k+1)2^{k+1}]=2^{k+1}-1$
5. ตรวจช่องว่างเป็นบวก	$k\geq 1$ จึง $2^{k+1}\geq 4$ ทำให้ $2^{k+1}-1\geq 3>0$
6. เทียบขอบ	$2+(k+1)2^{k+1}<1+(k+2)2^{k+1}$
7. ต่อโซ่	$2^{k+2}<2+(k+1)2^{k+1}<1+(k+2)2^{k+1}$ จึงได้เป้าหมาย
8. ปิดอุปนัย	ฐาน n=1 จริง และขั้น S(k)→S(k+1) จริงสำหรับทุก $k\geq 1$ จึงข้อความจริงทุกจำนวนเต็ม $n\geq 1$
9. เช็กกลับ	n=2: $2^3=8<1+3\cdot 4=13$

① $2^{k+2} < 2+(k+1)2^{k+1}$ [IH×2]

↓

② ช่องว่าง = $2^{k+1}-1 > 0$

↓

③ $2^{k+2} < 1+(k+2)2^{k+1}$

เดินทางผิดให้เห็นจุดพัง

หลังคูณ IH ด้วย 2 จะได้ค่าคงที่ 2 ไม่ใช่ 1 ต้องอธิบายช่องว่างไปยังเป้าหมาย ไม่เปลี่ยน 2 เป็น 1 เอง

ผลตรวจตัวเลขและค่าความจริงของภาคนี้อยู่ใน check_exercise2.py ซึ่งตรวจสูตรอุปนัยทุก n=1..50 พร้อมตัวอย่างและก้าวพีชคณิต การตรวจจำนวนจำกัดไม่ใช้แทนเหตุผลพิสูจน์สำหรับทุก n ที่แสดงไว้ด้านบน

Topic 3 · ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

ใช้วิธีจากบทที่ 4–5 อ่านคู่ (ต้น,ปลาย) ให้คงลำดับ สีฟ้าคือความสัมพันธ์เดิม สีเขียวคือผลที่คำนวณแล้ว ตารางเมทริกซ์อ่านแถวเป็นต้นและคอลัมน์เป็นปลาย

ข้อ 1 · อ่านหนึ่งแถวเป็นหนึ่งคู่

ชื่อคนในต้นฉบับเปลี่ยนเป็น ก, ข, ค โดยคงการจับคู่เดิม

(a) เก็บลำดับซ้าย→ขวา อ่านแต่ละแถวเป็น (ซ้าย,ขวา) ได้ {(2207, พรม), (452, สี), (8840, ค้อน), (9921, คีม)}

① ซ้าย	② ขวา	③ คู่
8840	ค้อน	(8840, ค้อน)
9921	คีม	(9921, คีม)
452	สี	(452, สี)
2207	พรม	(2207, พรม)

(b) เก็บลำดับซ้าย→ขวา อ่านแต่ละแถวเป็น (ซ้าย,ขวา) ได้ {(a, 3), (b, 1), (b, 4), (c, 1)}

① ซ้าย	② ขวา	③ คู่
a	3	(a, 3)
b	1	(b, 1)
b	4	(b, 4)
c	1	(c, 1)

(c) เก็บลำดับซ้าย→ขวา อ่านแต่ละแถวเป็น (ซ้าย,ขวา) ได้ {(ก, คณิต), (ข, ฟิสิกส์), (ค, เศรษฐศาสตร์)}

① ซ้าย	② ขวา	③ คู่
ก	คณิต	(ก, คณิต)
ข	ฟิสิกส์	(ข, ฟิสิกส์)
ค	เศรษฐศาสตร์	(ค, เศรษฐศาสตร์)

(d) เก็บลำดับซ้าย→ขวา อ่านแต่ละแถวเป็น (ซ้าย,ขวา) ได้ {(a, a), (b, b)}

① ซ้าย	② ขวา	③ คู่
a	a	(a, a)
b	b	(b, b)

เช็กกลับ: ข้อ (b) ตัว b จับคู่ได้ทั้ง 1 และ 4 ยังเป็นความสัมพันธ์ได้ ข้อ (d) มีเพียง (a,a),(b,b)

ข้อ 2 · เขียนคู่เป็นตาราง

(a) หนึ่งคู่ต่อหนึ่งแถว สมาชิกตัวหน้าอยู่คอลัมน์ซ้าย ตัวหลังอยู่คอลัมน์ขวา

① ต้น	② ปลาย
a	6
b	2
a	1
c	1

(b) หนึ่งคู่ต่อหนึ่งแถว สมาชิกตัวหน้าอยู่คอลัมน์ซ้าย ตัวหลังอยู่คอลัมน์ขวา

① ต้น	② ปลาย
ก	ดนตรี
ข	ประวัติศาสตร์
ค	คณิต
ข	รัฐศาสตร์

(c) $x^2 \geq y$ บน $\{1,2,3,4\}$

ต้นฉบับใช้ตัวอักษร A ในเงื่อนไข แต่หมายถึงความสัมพันธ์ R ตามโจทย์ ตรวจแต่ละ x กับ y ทุกตัว

① x	② x^2	③ y ที่ผ่าน
1	1	1
2	4	1,2,3,4
3	9	1,2,3,4
4	16	1,2,3,4

(c) หนึ่งคู่ต่อหนึ่งแถว สมาชิกตัวหน้าอยู่คอลัมน์ซ้าย ตัวหลังอยู่คอลัมน์ขวา

① ต้น	② ปลาย
1	1
2	1
2	2
2	3
2	4
3	1
3	2
3	3
3	4
4	1
4	2
4	3
4	4

(d) ใช้ดาวเคราะห์แปดดวง เรียงระยะจากดวงอาทิตย์ โดยเริ่มตำแหน่งแรกที่ 1

(d) หนึ่งคู่ต่อหนึ่งแถว สมาชิกตัวหน้าอยู่คอลัมน์ซ้าย ตัวหลังอยู่คอลัมน์ขวา

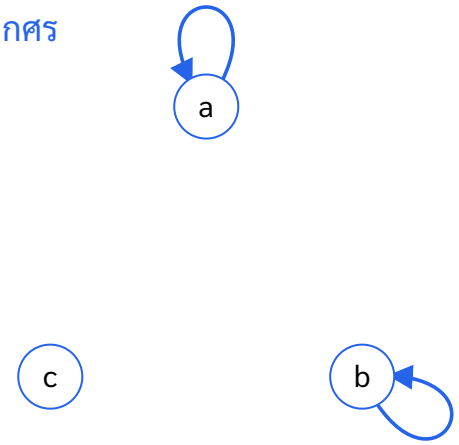
① ต้น	② ปลาย
พุธ	1
ศุกร์	2
โลก	3
อังคาร	4
พฤหัสบดี	5
เสาร์	6
ยูเรนัส	7
เนปจูน	8

เช็กกลับ: ข้อ (c) มี 1+4+4+4=13 คู่ แต่ละคู่ผ่าน $x^2 \geq y$ ส่วนข้อ (d) ไม่นับดวงอาทิตย์เป็นดาวเคราะห์

ข้อ 3 · วาดไดกราฟพร้อมเมทริกซ์

(a) วางทุกจุดก่อนต่อคู่ คู่ (x,y) ให้ลูกศร x→y คู่ (x,x) ให้วงวน จุดที่ไม่มีคู่ยังต้องอยู่ในรูป

① ลูกศร



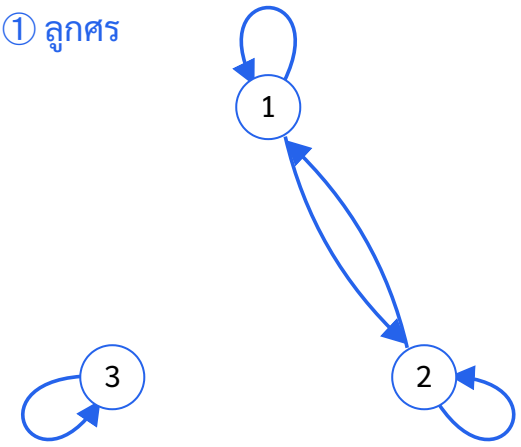
② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

	a	b	c
a	1	0	0
b	0	1	0
c	0	0	0

คู่ที่ใช้: {(a, a), (b, b)}

(b) วางทุกจุดก่อนต่อคู่ คู่ (x,y) ให้ลูกศร x→y คู่ (x,x) ให้วงวน จุดที่ไม่มีคู่ยังต้องอยู่ในรูป

① ลูกศร



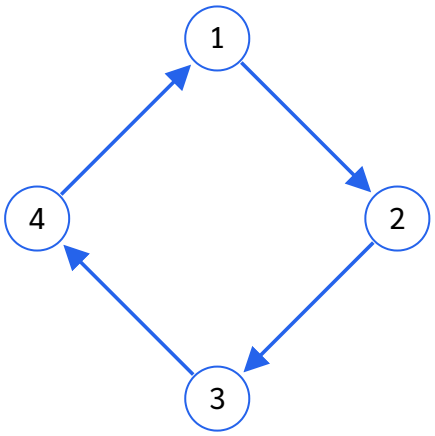
② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

	1	2	3
1	1	1	0
2	1	1	0
3	0	0	1

คู่ที่ใช้: {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)}

(c) วางทุกจุดก่อนต่อคู่ คู่ (x,y) ให้ลูกศร x→y คู่ (x,x) ให้วงวน จุดที่ไม่มีคู่ยังต้องอยู่ในรูป

① ลูกศร



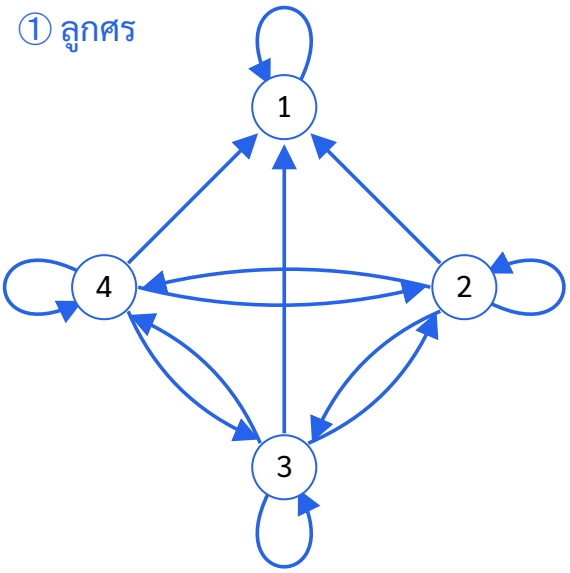
② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

	1	2	3	4
1	0	1	0	0
2	0	0	1	0
3	0	0	0	1
4	1	0	0	0

คู่ที่ใช้: {(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)}

(d) วางทุกจุดก่อนต่อคู่ คู่ (x,y) ให้ลูกศร x→y คู่ (x,x) ให้วงวน จุดที่ไม่มีคู่ยังต้องอยู่ในรูป

① ลูกศร



② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

	1	2	3	4
1	1	0	0	0
2	1	1	1	1
3	1	1	1	1
4	1	1	1	1

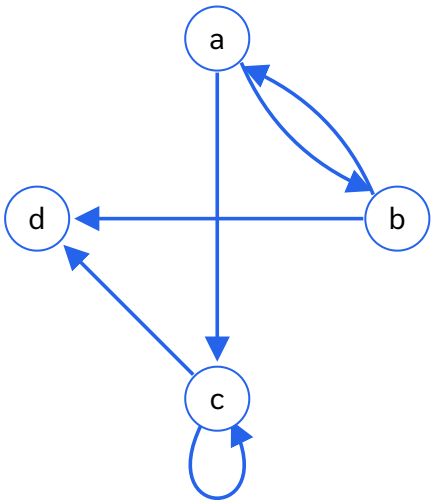
คู่ที่ใช้: {(1, 1), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)}

เช็กกลับ: จำนวนเลข 1 ในเมทริกซ์เท่าจำนวนลูกศร วงวนตรงกับแนวทแยง ข้อ (a) มี c เป็นจุดโดดเดี่ยว

ข้อ 4 · อ่านลูกศรจากภาพต้นฉบับเป็นคู่

(a) ไล่หัวลูกศรทีละเส้น เริ่มต้นเส้น→หัวลูกศร แล้วจด (ต้น,ปลาย) ได้ {(a, b), (a, c), (b, a), (b, d), (c, c), (c, d)}

① ลูกศร

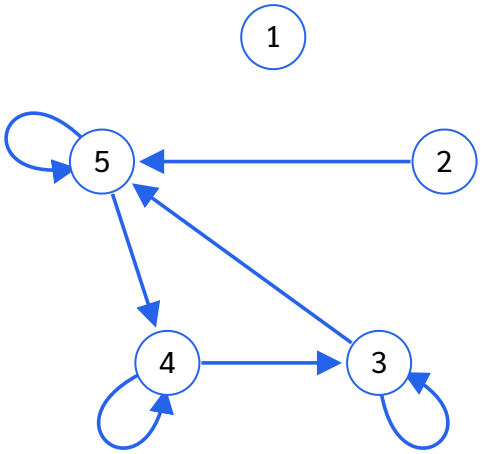


② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

	a	b	c	d
a	0	1	1	0
b	1	0	0	1
c	0	0	1	1
d	0	0	0	0

(b) ไล่หัวลูกศรทีละเส้น เริ่มต้นเส้น→หัวลูกศร แล้วจด (ต้น,ปลาย) ได้ {(2, 5), (3, 3), (3, 5), (4, 3), (4, 4), (5, 4), (5, 5)}

① ลูกศร



② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	1
3	0	0	1	0	1
4	0	0	1	1	0
5	0	0	0	1	1

(c) ไล่หัวลูกศรทีละเส้น เริ่มต้นเส้น→หัวลูกศร แล้วจด (ต้น,ปลาย) ได้ ∅

① ลูกศร

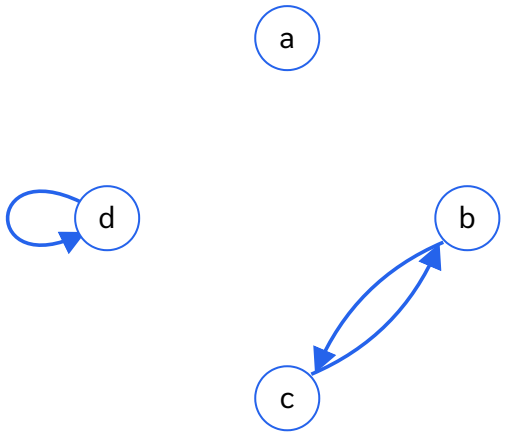


② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

	1	2
1	0	0
2	0	0

(d) ไล่หัวลูกศรทีละเส้น เริ่มต้นเส้น→หัวลูกศร แล้วจด (ต้น,ปลาย) ได้ {(b, c), (c, b), (d, d)}

① ลูกศร



② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

	a	b	c	d
a	0	0	0	0
b	0	0	1	0
c	0	1	0	0
d	0	0	0	1

เช็กกลับ: ข้อ (b) ลูกศรเฉียงจาก 2 ไป 5; วงรอบสามจุดคือ 4→3→5→4 และมีวงวนที่ 3,4,5 ข้อ (c) มีจุดแต่ไม่มีลูกศร จึงเป็นเซตว่าง

ข้อ 5 · กลับความสัมพันธ์ของข้อ 1–4 ทุกข้อย่อย

R^{-1} เปลี่ยน (a,b) ทุกคู่เป็น (b,a) ไม่เพิ่มคู่ใหม่และไม่ทิ้งคู่ซ้ำต้น คำว่า inverse relation ใช้ได้แม้สิ่งเดิมไม่เป็นฟังก์ชัน

กลับข้อ 1a

① คู่เดิม	② สลับตำแหน่ง	③ คู่กลับ
(8840, ค้อน)	ต้น ↔ ปลาย	(ค้อน, 8840)
(9921, คีม)	ต้น ↔ ปลาย	(คีม, 9921)
(452, สี)	ต้น ↔ ปลาย	(สี, 452)
(2207, พรม)	ต้น ↔ ปลาย	(พรม, 2207)

ตอบ: {(คีม, 9921), (ค้อน, 8840), (พรม, 2207), (สี, 452)}

กลับข้อ 1b

① คู่เดิม	② สลับตำแหน่ง	③ คู่กลับ
(a, 3)	ต้น ↔ ปลาย	(3, a)
(b, 1)	ต้น ↔ ปลาย	(1, b)
(b, 4)	ต้น ↔ ปลาย	(4, b)
(c, 1)	ต้น ↔ ปลาย	(1, c)

ตอบ: {(1, b), (1, c), (3, a), (4, b)}

กลับข้อ 1c

① คู่เดิม	② สลับตำแหน่ง	③ คู่กลับ
(ก, คณิต)	ต้น ↔ ปลาย	(คณิต, ก)
(ข, ฟิสิกส์)	ต้น ↔ ปลาย	(ฟิสิกส์, ข)
(ค, เศรษฐศาสตร์)	ต้น ↔ ปลาย	(เศรษฐศาสตร์, ค)

ตอบ: {(คณิต, ก), (ฟิสิกส์, ข), (เศรษฐศาสตร์, ค)}

กลับข้อ 1d

① คู่เดิม	② สลับตำแหน่ง	③ คู่กลับ
(a, a)	ต้น ↔ ปลาย	(a, a)
(b, b)	ต้น ↔ ปลาย	(b, b)

ตอบ: {(a, a), (b, b)}

กลับข้อ 2a

① คู่เดิม	② สลับตำแหน่ง	③ คู่กลับ
(a, 6)	ต้น ↔ ปลาย	(6, a)
(b, 2)	ต้น ↔ ปลาย	(2, b)
(a, 1)	ต้น ↔ ปลาย	(1, a)
(c, 1)	ต้น ↔ ปลาย	(1, c)

ตอบ: {(1, a), (1, c), (2, b), (6, a)}

กลับข้อ 2b

① คู่เดิม	② สลับตำแหน่ง	③ คู่กลับ
(ก, ดนตรี)	ต้น ↔ ปลาย	(ดนตรี, ก)
(ข, ประวัติศาสตร์)	ต้น ↔ ปลาย	(ประวัติศาสตร์, ข)
(ค, คณิต)	ต้น ↔ ปลาย	(คณิต, ค)
(ข, รัฐศาสตร์)	ต้น ↔ ปลาย	(รัฐศาสตร์, ข)

ตอบ: {(คณิต, ค), (ดนตรี, ก), (ประวัติศาสตร์, ข), (รัฐศาสตร์, ข)}

กลับข้อ 2c

① คู่เดิม	② สลับตำแหน่ง	③ คู่กลับ
(1, 1)	ต้น ↔ ปลาย	(1, 1)
(2, 1)	ต้น ↔ ปลาย	(1, 2)
(2, 2)	ต้น ↔ ปลาย	(2, 2)
(2, 3)	ต้น ↔ ปลาย	(3, 2)
(2, 4)	ต้น ↔ ปลาย	(4, 2)
(3, 1)	ต้น ↔ ปลาย	(1, 3)
(3, 2)	ต้น ↔ ปลาย	(2, 3)
(3, 3)	ต้น ↔ ปลาย	(3, 3)
(3, 4)	ต้น ↔ ปลาย	(4, 3)
(4, 1)	ต้น ↔ ปลาย	(1, 4)
(4, 2)	ต้น ↔ ปลาย	(2, 4)
(4, 3)	ต้น ↔ ปลาย	(3, 4)
(4, 4)	ต้น ↔ ปลาย	(4, 4)

ตอบ: {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)}

กลับข้อ 2d

① คู่เดิม	② สลับตำแหน่ง	③ คู่กลับ
(พุธ, 1)	ต้น ↔ ปลาย	(1, พุธ)
(ศุกร์, 2)	ต้น ↔ ปลาย	(2, ศุกร์)
(โลก, 3)	ต้น ↔ ปลาย	(3, โลก)
(อังคาร, 4)	ต้น ↔ ปลาย	(4, อังคาร)
(พฤหัสบดี, 5)	ต้น ↔ ปลาย	(5, พฤหัสบดี)
(เสาร์, 6)	ต้น ↔ ปลาย	(6, เสาร์)
(ยูเรนัส, 7)	ต้น ↔ ปลาย	(7, ยูเรนัส)
(เนปจูน, 8)	ต้น ↔ ปลาย	(8, เนปจูน)

ตอบ: {(1, พุธ), (2, ศุกร์), (3, โลก), (4, อังคาร), (5, พฤหัสบดี), (6, เสาร์), (7, ยูเรนัส), (8, เนปจูน)}

กลับข้อ 3a

① คู่เดิม	② สลับตำแหน่ง	③ คู่กลับ
(a, a)	ต้น ↔ ปลาย	(a, a)
(b, b)	ต้น ↔ ปลาย	(b, b)

ตอบ: {(a, a), (b, b)}

กลับข้อ 3b

① คู่เดิม	② สลับตำแหน่ง	③ คู่กลับ
(1, 2)	ต้น ↔ ปลาย	(2, 1)
(2, 1)	ต้น ↔ ปลาย	(1, 2)
(3, 3)	ต้น ↔ ปลาย	(3, 3)
(1, 1)	ต้น ↔ ปลาย	(1, 1)
(2, 2)	ต้น ↔ ปลาย	(2, 2)

ตอบ: {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)}

กลับข้อ 3c

① คู่เดิม	② สลับตำแหน่ง	③ คู่กลับ
(1, 2)	ต้น ↔ ปลาย	(2, 1)
(2, 3)	ต้น ↔ ปลาย	(3, 2)
(3, 4)	ต้น ↔ ปลาย	(4, 3)
(4, 1)	ต้น ↔ ปลาย	(1, 4)

ตอบ: {(1, 4), (2, 1), (3, 2), (4, 3)}

กลับข้อ 3d

① คู่เดิม	② สลับตำแหน่ง	③ คู่กลับ
(1, 1)	ต้น ↔ ปลาย	(1, 1)
(2, 1)	ต้น ↔ ปลาย	(1, 2)
(2, 2)	ต้น ↔ ปลาย	(2, 2)
(2, 3)	ต้น ↔ ปลาย	(3, 2)
(2, 4)	ต้น ↔ ปลาย	(4, 2)
(3, 1)	ต้น ↔ ปลาย	(1, 3)
(3, 2)	ต้น ↔ ปลาย	(2, 3)
(3, 3)	ต้น ↔ ปลาย	(3, 3)
(3, 4)	ต้น ↔ ปลาย	(4, 3)
(4, 1)	ต้น ↔ ปลาย	(1, 4)
(4, 2)	ต้น ↔ ปลาย	(2, 4)
(4, 3)	ต้น ↔ ปลาย	(3, 4)
(4, 4)	ต้น ↔ ปลาย	(4, 4)

ตอบ: {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)}

กลับข้อ 4a

① คู่เดิม	② สลับตำแหน่ง	③ คู่กลับ
(a, b)	ต้น ↔ ปลาย	(b, a)
(b, a)	ต้น ↔ ปลาย	(a, b)
(a, c)	ต้น ↔ ปลาย	(c, a)
(b, d)	ต้น ↔ ปลาย	(d, b)
(c, c)	ต้น ↔ ปลาย	(c, c)
(c, d)	ต้น ↔ ปลาย	(d, c)

ตอบ: {(a, b), (b, a), (c, a), (c, c), (d, b), (d, c)}

กลับข้อ 4b

① คู่เดิม	② สลับตำแหน่ง	③ คู่กลับ
(3, 3)	ต้น ↔ ปลาย	(3, 3)
(4, 4)	ต้น ↔ ปลาย	(4, 4)
(5, 5)	ต้น ↔ ปลาย	(5, 5)
(4, 3)	ต้น ↔ ปลาย	(3, 4)
(3, 5)	ต้น ↔ ปลาย	(5, 3)
(5, 4)	ต้น ↔ ปลาย	(4, 5)
(2, 5)	ต้น ↔ ปลาย	(5, 2)

ตอบ: {(3, 3), (3, 4), (4, 4), (4, 5), (5, 2), (5, 3), (5, 5)}

กลับข้อ 4c

① คู่เดิม	② สลับตำแหน่ง	③ คู่กลับ
∅	ไม่มีคู่ให้กลับ	∅

ตอบ: ∅

กลับข้อ 4d

① คู่เดิม	② สลับตำแหน่ง	③ คู่กลับ
(b, c)	ต้น ↔ ปลาย	(c, b)
(c, b)	ต้น ↔ ปลาย	(b, c)
(d, d)	ต้น ↔ ปลาย	(d, d)

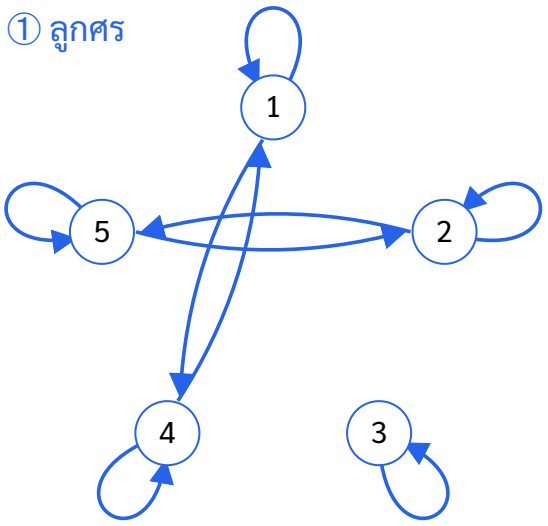
ตอบ: {(b, c), (c, b), (d, d)}

เช็กกลับ: กลับซ้ำอีกรอบต้องได้ทุกคู่เดิม วงวนไม่เปลี่ยน ทิศทางสองข้างที่มีอยู่แล้วสลับกันจึงให้เซตเดิม

ข้อ 6 · ตรวจทุกคู่บน {1,2,3,4,5}: 3 หาร x−y ลงตัว

(a) ไล่แถว x แล้วทดสอบ y=1...5 เก็บเฉพาะคู่ที่ผ่านเงื่อนไข ได้ {(1, 1), (1, 4), (2, 2), (2, 5), (3, 3), (4, 1), (4, 4), (5, 2), (5, 5)}

① ลูกศร

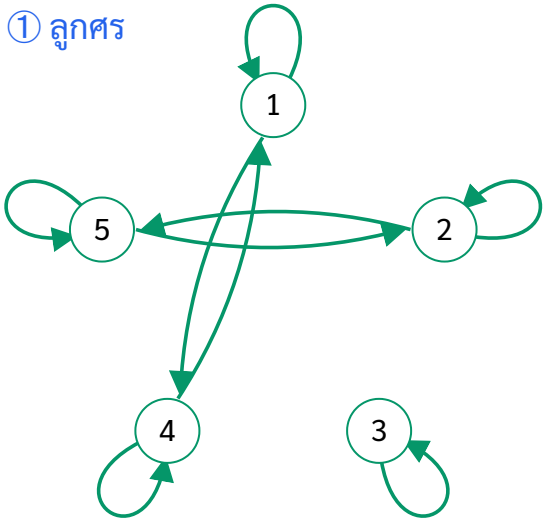


② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

	1	2	3	4	5
1	1	0	0	1	0
2	0	1	0	0	1
3	0	0	1	0	0
4	1	0	0	1	0
5	0	1	0	0	1

(b) กลับทุกคู่ R^{-1}={(1, 1), (1, 4), (2, 2), (2, 5), (3, 3), (4, 1), (4, 4), (5, 2), (5, 5)}

① ลูกศร



② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

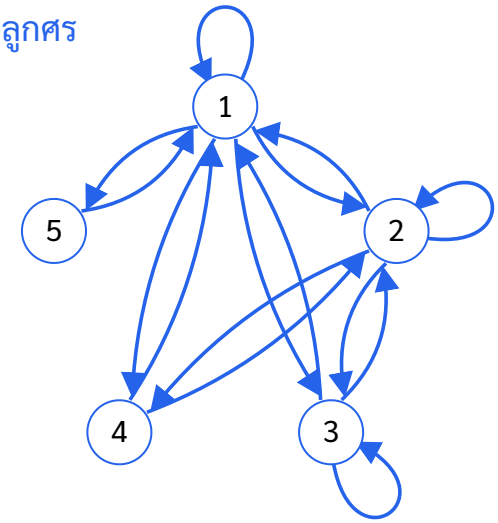
	1	2	3	4	5
1	1	0	0	1	0
2	0	1	0	0	1
3	0	0	1	0	0
4	1	0	0	1	0
5	0	1	0	0	1

เช็กกลับ: อ่านเลข 1 ทุกช่องกลับเป็นคู่ แล้วแทนเงื่อนไขเดิมอีกครั้ง ช่อง 0 ต้องไม่ผ่านเงื่อนไข

ข้อ 7 · ตรวจทุกคู่บน {1,2,3,4,5}: x+y≤6

(a) ไล่แถว x แล้วทดสอบ y=1…5 เก็บเฉพาะคู่ที่ผ่านเงื่อนไข ได้ {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (5, 1)}

① ลูกศร

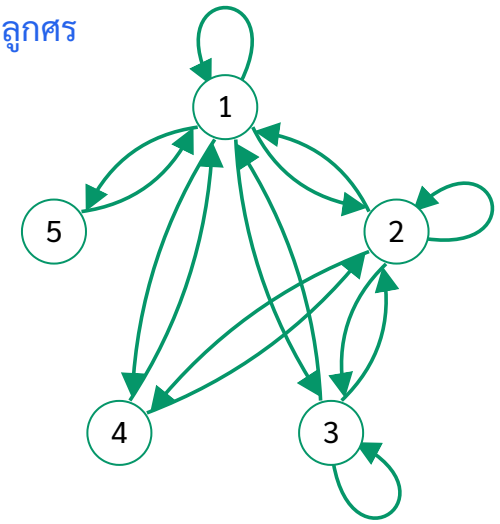


② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	0
3	1	1	1	0	0
4	1	1	0	0	0
5	1	0	0	0	0

(b) กลับทุกคู่ $R^{-1}=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),(5,1)\}$

① ลูกศร



② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	0
3	1	1	1	0	0
4	1	1	0	0	0
5	1	0	0	0	0

(c) ตรวจสมบัติพร้อมหลักฐาน ลำดับบางส่วนต้องมีสะท้อน ปฏิสมมาตร และถ่ายทอดครบทั้งสาม

① สมบัติ	② หลักฐานที่ตรวจ	③ ผล
สะท้อน	ขาด (4,4)	ไม่ผ่าน
สมมาตร	ทุกลูกศรมีลูกศรกลับ	ผ่าน
ปฏิสมมาตร	มี (1,2),(2,1)	ไม่ผ่าน
ถ่ายทอด	2→1→5 ขาด 2→5	ไม่ผ่าน

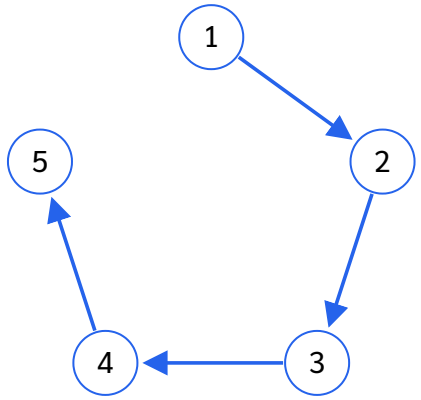
ลำดับบางส่วน: ไม่เป็น

เช็กกลับ: อ่านเลข 1 ทุกช่องกลับเป็นคู่ แล้วแทนเงื่อนไขเดิมอีกครั้ง ช่อง 0 ต้องไม่ผ่านเงื่อนไข

ข้อ 8 · ตรวจทุกคู่บน {1,2,3,4,5}: x=y−1

(a) ไล่แถว x แล้วทดสอบ y=1...5 เก็บเฉพาะคู่ที่ผ่านเงื่อนไข ได้ {(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)}

① ลูกศร

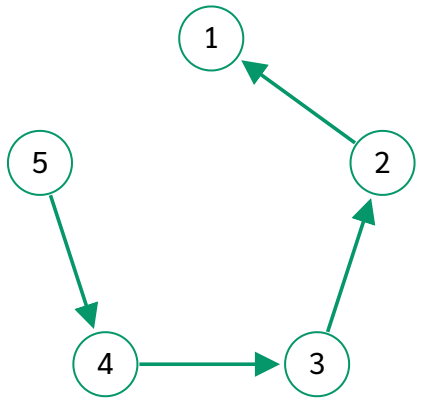


② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	0	1	0
4	0	0	0	0	1
5	0	0	0	0	0

(b) กลับทุกคู่ R^{-1}={(2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4)}

① ลูกศร



② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0
3	0	1	0	0	0
4	0	0	1	0	0
5	0	0	0	1	0

(c) ตรวจสมบัติพร้อมหลักฐาน ลำดับบางส่วนต้องมีสะท้อน ปฏิสมมาตร และถ่ายทอดครบทั้งสาม

① สมบัติ	② หลักฐานที่ตรวจ	③ ผล
สะท้อน	ขาด (1,1)	ไม่ผ่าน
สมมาตร	มี (1,2) ขาด (2,1)	ไม่ผ่าน
ปฏิสมมาตร	ไม่มีต่างจุดยิงกลับกัน	ผ่าน
ถ่ายทอด	1→2→3 ขาด 1→3	ไม่ผ่าน

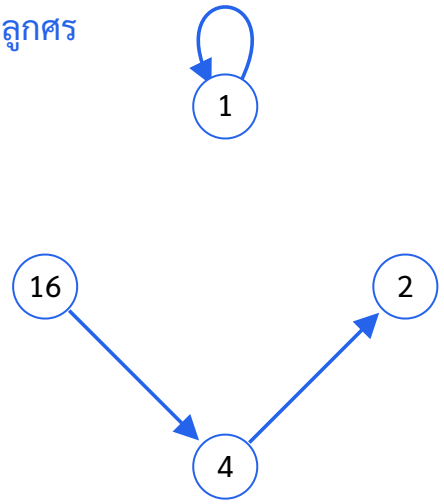
ลำดับบางส่วน: ไม่เป็น

เช็กกลับ: อ่านเลข 1 ทุกช่องกลับเป็นคู่ แล้วแทนเงื่อนไขเดิมอีกครั้ง ช่อง 0 ต้องไม่ผ่านเงื่อนไข

ข้อ 9 · สมบัติบนจำนวนเต็มบวกทั้งหมด

(a) $x = y^2$ สะท้อนพังที่ 2≠2²; สมมาตรพังที่ 4R2 แต่ไม่ 2R4; ถ้ามี x=y² และ y=x² จะได้ x=x⁴ บนจำนวนเต็มบวกจึง x=y=1; ถ่ายทอดพังที่ 16R4 และ 4R2 แต่ไม่ 16R2

① ลูกศร



② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

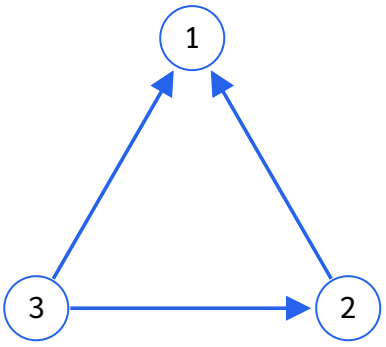
	1	2	4	16
1	1	0	0	0
2	0	0	0	0
4	0	1	0	0
16	0	0	1	0

สะท้อน	สมมาตร	ปฏิสมมาตร	ถ่ายทอด	ลำดับบางส่วน
F	F	T	F	F

รูปแสดงส่วนย่อยสำหรับเห็นพยาน เหตุผลทั่วไปด้านบนเป็นตัวพิสูจน์กรณีที่กล่าวว่าจริงทุกจำนวนเต็มบวก

(b) $x > y$ x>x ไม่จริง; 2>1 แต่ไม่ 1>2; ไม่มีต่างจุดไปกลับจึงปฏิสมมาตร; x>y>z ให้ x>z

① ลูกศร



② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

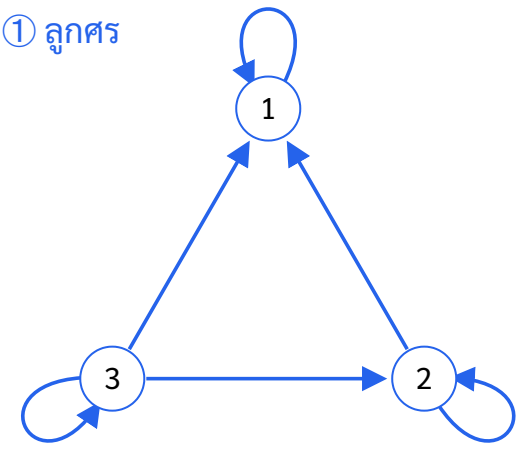
	1	2	3
1	0	0	0
2	1	0	0
3	1	1	0

สะท้อน	สมมาตร	ปฏิสมมาตร	ถ่ายทอด	ลำดับบางส่วน
F	F	T	T	F

รูปแสดงส่วนย่อยสำหรับเห็นพยาน เหตุผลทั่วไปด้านบนเป็นตัวพิสูจน์กรณีที่กล่าวว่าจริงทุกจำนวนเต็มบวก

(c) $x \geq y$ x≥x เสมอ; 2≥1 แต่ไม่กลับ; x≥y และ y≥x บังคับ x=y; x≥y≥z ให้ x≥z

① ลูกศร



② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

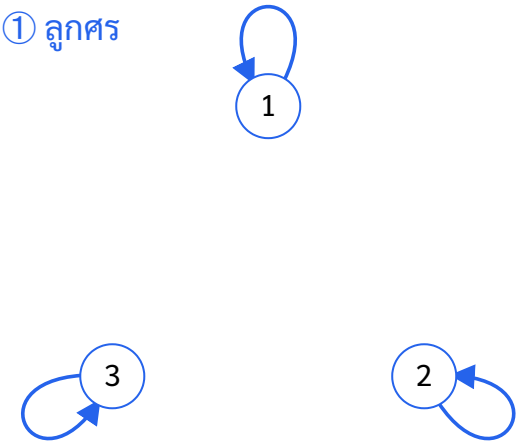
	1	2	3
1	1	0	0
2	1	1	0
3	1	1	1

สะท้อน	สมมาตร	ปฏิสมมาตร	ถ่ายทอด	ลำดับบางส่วน
T	F	T	T	T

รูปแสดงส่วนย่อยสำหรับเห็นพยาน เหตุผลทั่วไปด้านบนเป็นตัวพิสูจน์กรณีที่กล่าวว่าจริงทุกจำนวนเต็มบวก

(d) $x = y$ x=x; สลับสมการได้; ไปกลับบังคับเท่ากัน; ถ้า x=y และ y=z ก็ x=z

① ลูกศร



② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

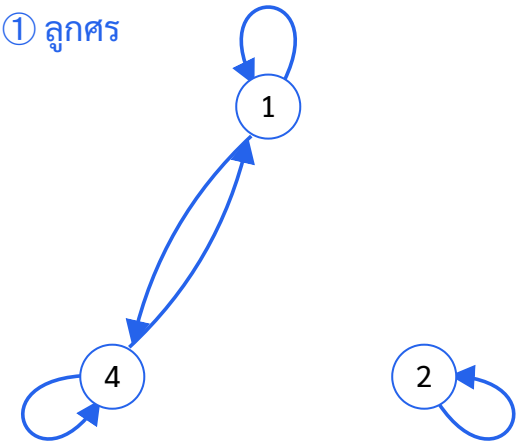
	1	2	3
1	1	0	0
2	0	1	0
3	0	0	1

สะท้อน	สมมาตร	ปฏิสมมาตร	ถ่ายทอด	ลำดับบางส่วน
T	T	T	T	T

รูปแสดงส่วนย่อยสำหรับเห็นพยาน เหตุผลทั่วไปด้านบนเป็นตัวพิสูจน์กรณีที่กล่าวว่าจริงทุกจำนวนเต็มบวก

(e) $3 \mid (x - y)$ x−x=0 หาร 3 ลงตัว; เปลี่ยนเครื่องหมายยังหารลงตัว; 1R4 และ 4R1 แต่ต่างกันจึงไม่ปฏิสมมาตร; บวก x−y กับ y−z ได้ x−z

① ลูกศร



② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

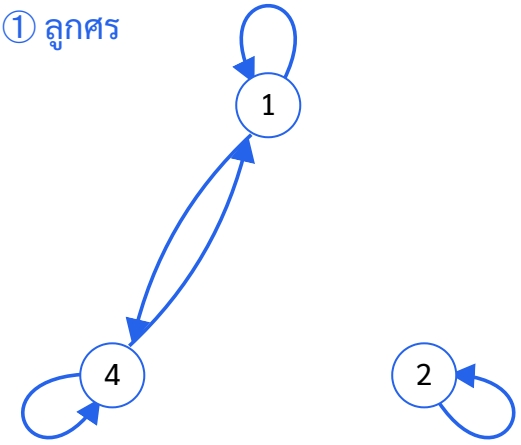
	1	2	4
1	1	0	1
2	0	1	0
4	1	0	1

สะท้อน	สมมาตร	ปฏิสมมาตร	ถ่ายทอด	ลำดับบางส่วน
T	T	F	T	F

รูปแสดงส่วนย่อยสำหรับเห็นพยาน เหตุผลทั่วไปด้านบนเป็นตัวพิสูจน์กรณีที่กล่าวว่าจริงทุกจำนวนเต็มบวก

(f) $3 \mid (x+2y)$ x+2y=(x−y)+3y จึงหาร 3 ลงตัวก็ต่อเมื่อ x−y หาร 3 ลงตัว ใช้เหตุผลข้อ (e) ได้ครบ

① ลูกศร



② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

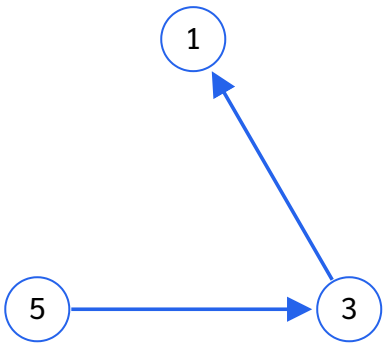
	1	2	4
1	1	0	1
2	0	1	0
4	1	0	1

สะท้อน	สมมาตร	ปฏิสมมาตร	ถ่ายทอด	ลำดับบางส่วน
T	T	F	T	F

รูปแสดงส่วนย่อยสำหรับเห็นพยาน เหตุผลทั่วไปด้านบนเป็นตัวพิสูจน์กรณีที่กล่าวว่าจริงทุกจำนวนเต็มบวก

(g) $x - y = 2$ x−x=0 ไม่ใช่ 2; 3R1 แต่ไม่กลับ; ไปกลับจะบังคับ 2=−2 จึงไม่มีต่างจุดไปกลับ; 5R3 และ 3R1 แต่ 5−1=4

① ลูกศร



② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

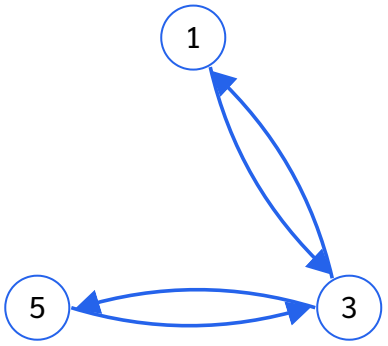
	1	3	5
1	0	0	0
3	1	0	0
5	0	1	0

สะท้อน	สมมาตร	ปฏิสมมาตร	ถ่ายทอด	ลำดับบางส่วน
F	F	T	F	F

รูปแสดงส่วนย่อยสำหรับเห็นพยาน เหตุผลทั่วไปด้านบนเป็นตัวพิสูจน์กรณีที่กล่าวว่าจริงทุกจำนวนเต็มบวก

(h) $|x - y| = 2$ ไม่มีวงวนเพราะ |x−x|=0; ค่าสัมบูรณ์ไม่เปลี่ยนเมื่อสลับ; 1R3 และ 3R1 จึงไม่ปฏิสมมาตร; ทาง 1→3→1 ขาดวงวน 1→1

① ลูกศร



② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

	1	3	5
1	0	1	0
3	1	0	1
5	0	1	0

สะท้อน	สมมาตร	ปฏิสมมาตร	ถ่ายทอด	ลำดับบางส่วน
F	T	F	F	F

รูปแสดงส่วนย่อยสำหรับเห็นพยาน เหตุผลทั่วไปด้านบนเป็นตัวพิสูจน์กรณีที่กล่าวว่าจริงทุกจำนวนเต็มบวก

เช็กกลับ: สมมาตรกับปฏิสมมาตรไม่ใช่คำตรงข้าม ความสัมพันธ์เท่ากันในข้อ (d) มีทั้งสองสมบัติ

ข้อ 10 · การเป็นสับเซตบน P(X)

แก้สัญลักษณ์พิมพ์คลาดเคลื่อนของต้นฉบับเป็น $(A,B)\in R$ เมื่อ $A\subseteq B$ โดย X ไม่ว่าง

ตรวจทีละสมบัติ สะท้อน: $A\subseteq A$; ไม่สมมาตร: $\emptyset\subseteq X$ แต่ $X\not\subseteq\emptyset$ เพราะ X ไม่ว่าง; ปฏิสมมาตร: $A\subseteq B$ และ $B\subseteq A$ ให้ $A=B$; ถ่ายทอด: สมาชิกของ A อยู่ใน B และต่อไปอยู่ใน C จึง $A\subseteq C$

① ลูกศร



② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

	∅	{a}
∅	1	1
{a}	0	1

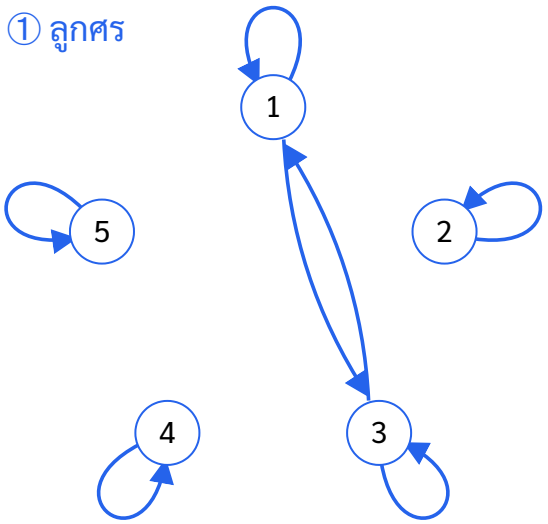
สะท้อน	สมมาตร	ปฏิสมมาตร	ถ่ายทอด	ลำดับบางส่วน
T	F	T	T	T

เช็กกลับ: รูปใช้ $X=\{a\}$ เพื่อให้เห็นตัวอย่าง แต่เหตุผลเรื่องสมาชิกใช้ได้กับ X ไม่ว่างทุกเซต

ข้อ 11 · เป็นความสัมพันธ์สมมูลหรือไม่

(a) ตรวจสะท้อน สมมาตร ถ่ายทอด ทั้งสามต้องผ่านจึงเป็นสมมูล ปฏิสมมาตรไม่ใช่เงื่อนไขของสมมูล

① ลูกศร



② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

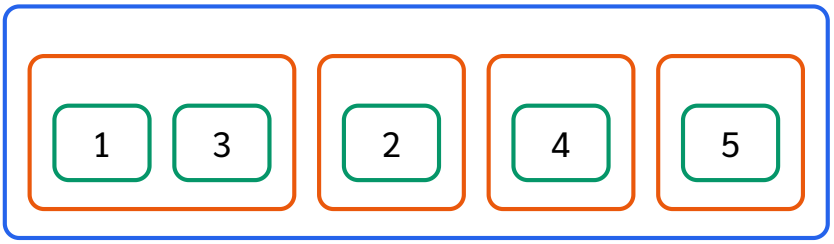
	1	2	3	4	5
1	1	0	1	0	0
2	0	1	0	0	0
3	1	0	1	0	0
4	0	0	0	1	0
5	0	0	0	0	1

① สมบัติ	② หลักฐานที่ตรวจ	③ ผล
สะท้อน	มีทุก (x,x)	ผ่าน
สมมาตร	ทุกลูกศรมีลูกศรกลับ	ผ่าน
ปฏิสมมาตร	มี (1,3),(3,1)	ไม่ผ่าน
ถ่ายทอด	ทุกทางสองทอดมีทางตรง	ผ่าน

ตอบ: เป็นสมมูล

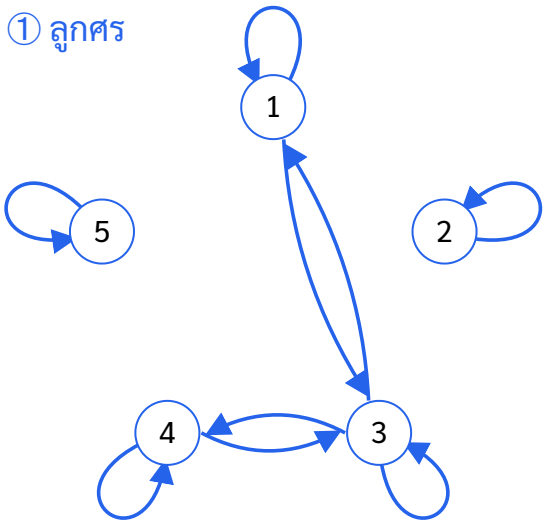
หาคลาส: เก็บปลายที่แต่ละ x ไปถึง คลาสที่ไม่ซ้ำกันคือ {1, 3}, {2}, {4}, {5}

① สมาชิกทั้งหมด → ② กลุ่มเดียวกัน → ③ คลาสไม่ซ้ำ



(b) ตรวจสะท้อน สมมาตร ถ่ายทอด ทั้งสามต้องผ่านจึงเป็นสมมูล ปฏิสมมาตรไม่ใช่เงื่อนไขของสมมูล

① ลูกศร



② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

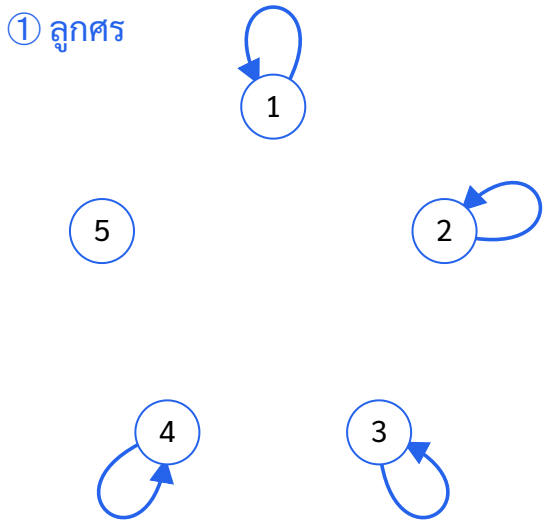
	1	2	3	4	5
1	1	0	1	0	0
2	0	1	0	0	0
3	1	0	1	1	0
4	0	0	1	1	0
5	0	0	0	0	1

① สมบัติ	② หลักฐานที่ตรวจ	③ ผล
สะท้อน	มีทุก (x,x)	ผ่าน
สมมาตร	ทุกลูกศรมีลูกศรกลับ	ผ่าน
ปฏิสมมาตร	มี (1,3),(3,1)	ไม่ผ่าน
ถ่ายทอด	1→3→4 ขาด 1→4	ไม่ผ่าน

ตอบ: ไม่เป็นสมมูล

(c) ตรวจสะท้อน สมมาตร ถ่ายทอด ทั้งสามต้องผ่านจึงเป็นสมมูล ปฏิสมมาตรไม่ใช่เงื่อนไขของสมมูล

① ลูกศร



② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

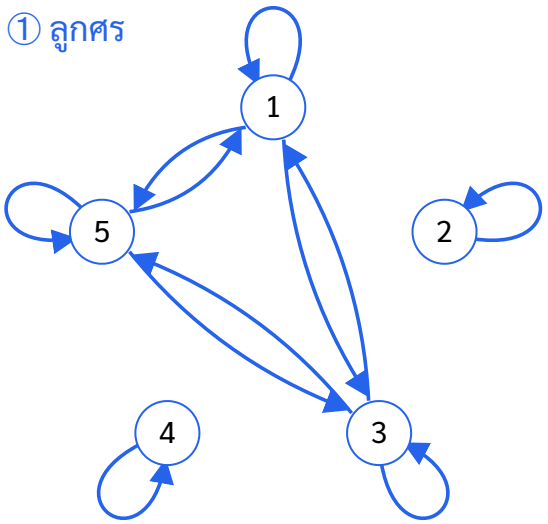
	1	2	3	4	5
1	1	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0
3	0	0	1	0	0
4	0	0	0	1	0
5	0	0	0	0	0

① สมบัติ	② หลักฐานที่ตรวจ	③ ผล
สะท้อน	ขาด (5,5)	ไม่ผ่าน
สมมาตร	ทุกลูกศรมีลูกศรกลับ	ผ่าน
ปฏิสมมาตร	ไม่มีต่างจุดยิงกลับกัน	ผ่าน
ถ่ายทอด	ทุกทางสองทอดมีทางตรง	ผ่าน

ตอบ: ไม่เป็นสมมูล

(d) ตรวจสะท้อน สมมาตร ถ่ายทอด ทั้งสามต้องผ่านจึงเป็นสมมูล ปฏิสมมาตรไม่ใช่เงื่อนไขของสมมูล

① ลูกศร



② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

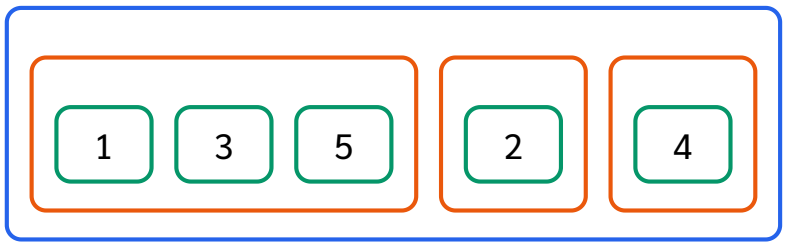
	1	2	3	4	5
1	1	0	1	0	1
2	0	1	0	0	0
3	1	0	1	0	1
4	0	0	0	1	0
5	1	0	1	0	1

① สมบัติ	② หลักฐานที่ตรวจ	③ ผล
สะท้อน	มีทุก (x,x)	ผ่าน
สมมาตร	ทุกลูกศรมีลูกศรกลับ	ผ่าน
ปฏิสมมาตร	มี (1,3),(3,1)	ไม่ผ่าน
ถ่ายทอด	ทุกทางสองทอดมีทางตรง	ผ่าน

ตอบ: เป็นสมมูล

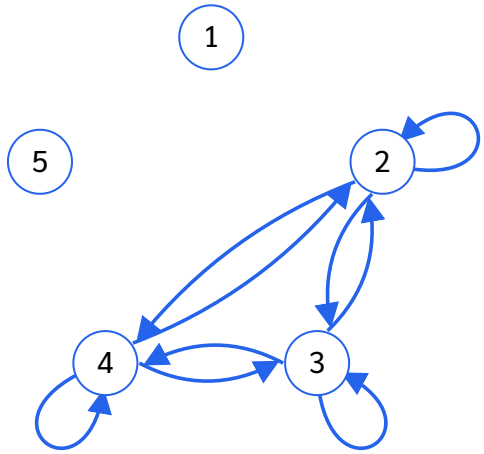
หาคลาส: เก็บปลายที่แต่ละ x ไปถึง คลาสที่ไม่ซ้ำกันคือ {1, 3, 5}, {2}, {4}

① สมาชิกทั้งหมด → ② กลุ่มเดียวกัน → ③ คลาสไม่ซ้ำ



(e) ตรวจสะท้อน สมมาตร ถ่ายทอด ทั้งสามต้องผ่านจึงเป็นสมมูล ปฏิสมมาตรไม่ใช่เงื่อนไขของสมมูล

① ลูกศร



② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

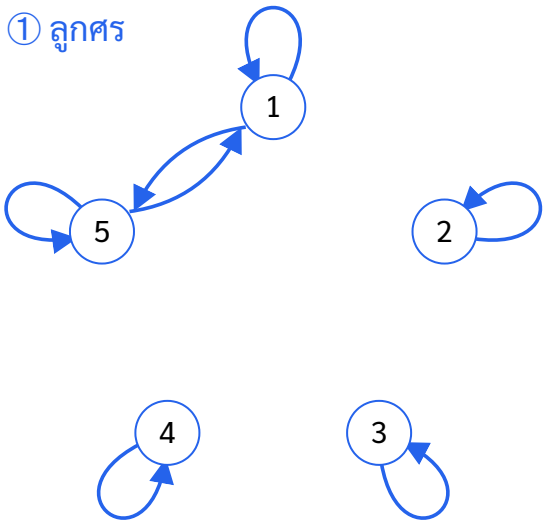
	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
2	0	1	1	1	0
3	0	1	1	1	0
4	0	1	1	1	0
5	0	0	0	0	0

① สมบัติ	② หลักฐานที่ตรวจ	③ ผล
สะท้อน	ขาด (1,1)	ไม่ผ่าน
สมมาตร	ทุกลูกศรมีลูกศรกลับ	ผ่าน
ปฏิสมมาตร	มี (2,3),(3,2)	ไม่ผ่าน
ถ่ายทอด	ทุกทางสองทอดมีทางตรง	ผ่าน

ตอบ: ไม่เป็นสมมูล

(f) ตรวจสะท้อน สมมาตร ถ่ายทอด ทั้งสามต้องผ่านจึงเป็นสมมูล ปฏิสมมาตรไม่ใช่เงื่อนไขของสมมูล

① ลูกศร



② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

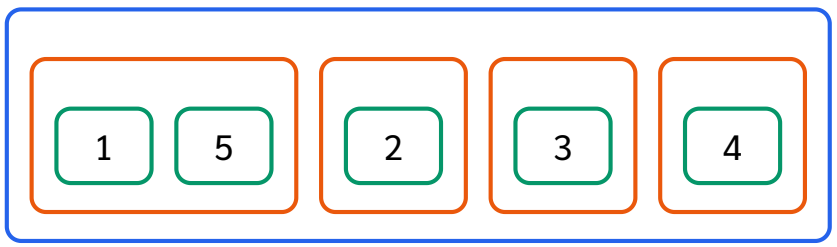
	1	2	3	4	5
1	1	0	0	0	1
2	0	1	0	0	0
3	0	0	1	0	0
4	0	0	0	1	0
5	1	0	0	0	1

① สมบัติ	② หลักฐานที่ตรวจ	③ ผล
สะท้อน	มีทุก (x,x)	ผ่าน
สมมาตร	ทุกลูกศรมีลูกศรกลับ	ผ่าน
ปฏิสมมาตร	มี (1,5),(5,1)	ไม่ผ่าน
ถ่ายทอด	ทุกทางสองทอดมีทางตรง	ผ่าน

ตอบ: เป็นสมมูล

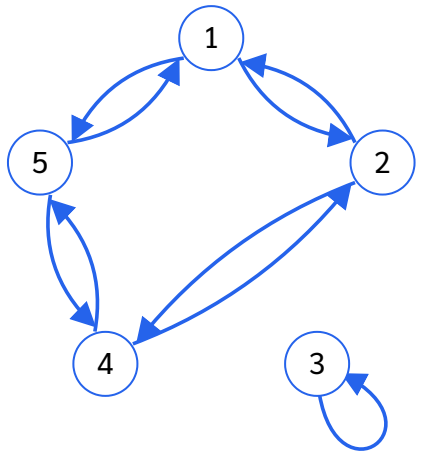
หาคลาส: เก็บปลายที่แต่ละ x ไปถึง คลาสที่ไม่ซ้ำกันคือ {1, 5}, {2}, {3}, {4}

① สมาชิกทั้งหมด → ② กลุ่มเดียวกัน → ③ คลาสไม่ซ้ำ



(g) ตรวจสะท้อน สมมาตร ถ่ายทอด ทั้งสามต้องผ่านจึงเป็นสมมูล ปฏิสมมาตรไม่ใช่เงื่อนไขของสมมูล

① ลูกศร



② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

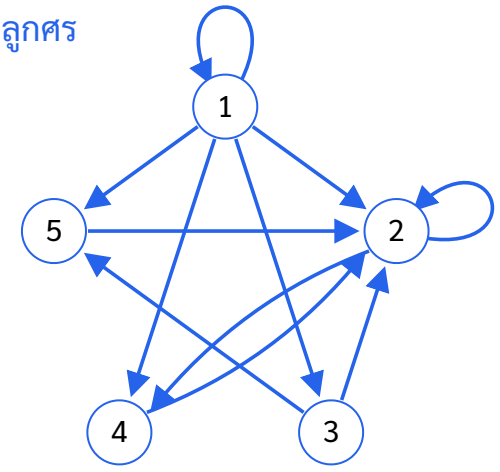
	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	1
2	1	0	0	1	0
3	0	0	1	0	0
4	0	1	0	0	1
5	1	0	0	1	0

① สมบัติ	② หลักฐานที่ตรวจ	③ ผล
สะท้อน	ขาด (1,1)	ไม่ผ่าน
สมมาตร	ทุกลูกศรมีลูกศรกลับ	ผ่าน
ปฏิสมมาตร	มี (1,2),(2,1)	ไม่ผ่าน
ถ่ายทอด	1→2→1 ขาด 1→1	ไม่ผ่าน

ตอบ: ไม่เป็นสมมูล

(h) ตรวจสะท้อน สมมาตร ถ่ายทอด ทั้งสามต้องผ่านจึงเป็นสมมูล ปฏิสมมาตรไม่ใช่เงื่อนไขของสมมูล

① ลูกศร



② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	1	0
3	0	1	0	0	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	0	0

① สมบัติ	② หลักฐานที่ตรวจ	③ ผล
สะท้อน	ขาด (3,3)	ไม่ผ่าน
สมมาตร	มี (1,2) ขาด (2,1)	ไม่ผ่าน
ปฏิสมมาตร	มี (2,4),(4,2)	ไม่ผ่าน
ถ่ายทอด	3→2→4 ขาด 3→4	ไม่ผ่าน

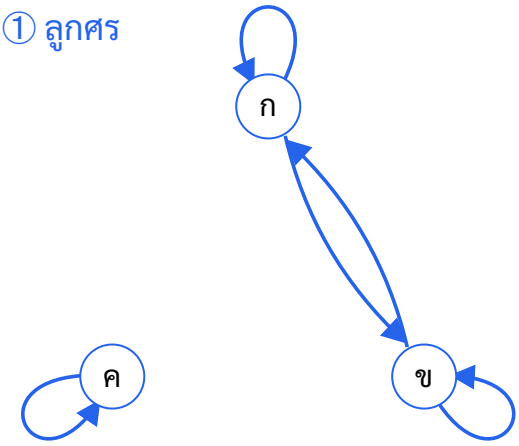
ตอบ: ไม่เป็นสมมูล

เช็กกลับ: ข้อ (b) ขาด 1→4 แม้มี 1→3→4; ข้อ (c) ขาดวงวน 5; ข้อ (e) ขาดวงวน 1 และ 5; ข้อ (g),(h) มีสมาชิกที่ไม่มีวงวน จึงตัดสินไม่เป็นสมมูลได้ทันที

ข้อ 12 · ความสัมพันธ์บนเซตของคน

(a) เป็นสมมูล สูงเท่ากัน: แต่ละคนสูงเท่าตนเอง สลับสองคนได้ และถ้าความสูงแรก=ที่สอง=ที่สาม ก็แรก=ที่สาม

① ลูกศร

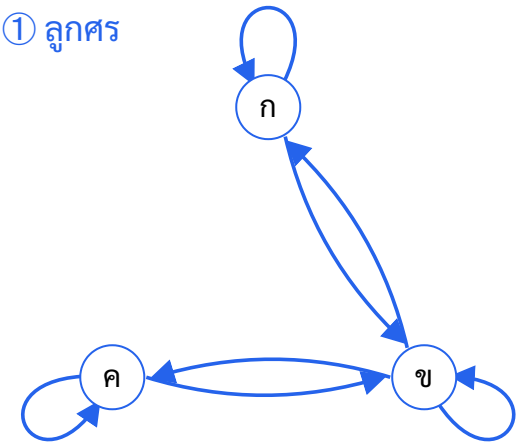


② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

	ก	ข	ค
ก	1	1	0
ข	1	1	0
ค	0	0	1

(b) ไม่เป็นสมมูล เคยอยู่ประเทศเดียวกัน: ก เคยอยู่ประเทศ A เท่านั้น; ข เคยอยู่ A และ B; ค เคยอยู่ B เท่านั้น จึง กRข และ ขRค แต่ไม่ กRค

① ลูกศร

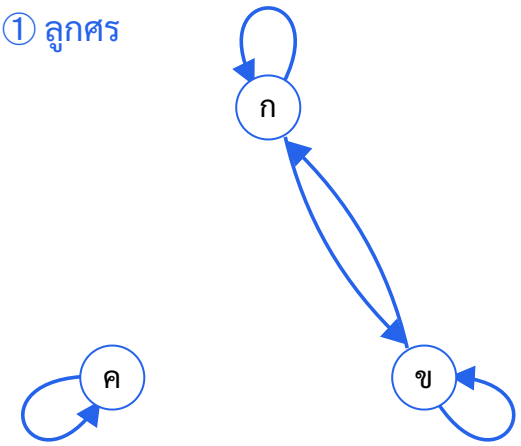


② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

	ก	ข	ค
ก	1	1	0
ข	1	1	1
ค	0	1	1

(c) เป็นสมมูล มีชื่อแรกเหมือนกัน: เป็นการเท่ากันของป้ายชื่อ จึงสะท้อน สมมาตร และถ่ายทอด

① ลูกศร

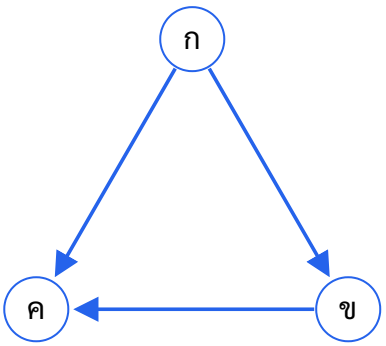


② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

	ก	ข	ค
ก	1	1	0
ข	1	1	0
ค	0	0	1

(d) ไม่เป็นสมมูล สูงกว่า: ไม่มีใครสูงกว่าตัวเอง จึงไม่สะท้อน อีกทั้งถ้าคนแรกสูงกว่าคนที่สอง จะกลับทิศไม่ได้

① ลูกศร

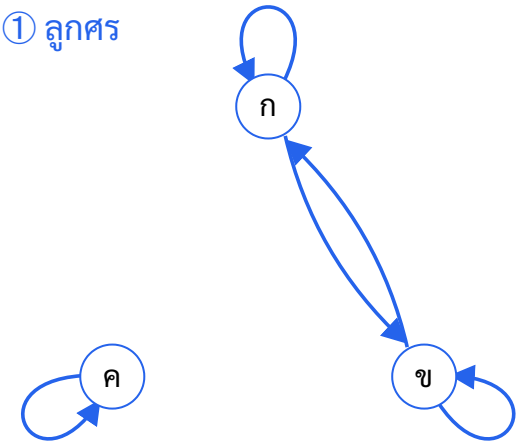


② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

	ก	ข	ค
ก	0	1	1
ข	0	0	1
ค	0	0	0

(e) เป็นสมมูล มีพ่อแม่ชุดเดียวกัน: เทียบชุดพ่อแม่ของแต่ละคน การเท่ากันของชุดสะท้อน สมมาตร และถ่ายทอด

① ลูกศร

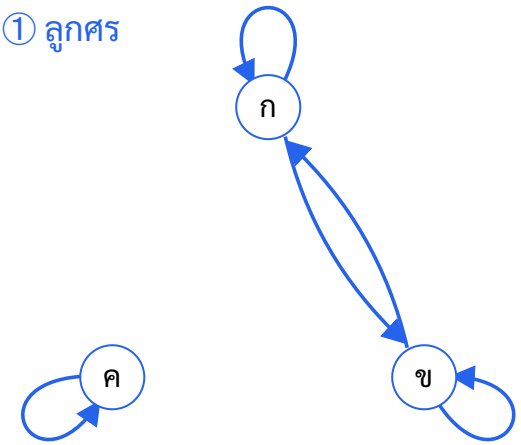


② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

	ก	ข	ค
ก	1	1	0
ข	1	1	0
ค	0	0	1

(f) เป็นสมมูล สีผมเหมือนกัน: ใช้ค่าสีผม ณ การเปรียบเทียบเดียวกัน การเท่ากันของค่านี้ให้ครบสามสมบัติ

① ลูกศร



② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

	ก	ข	ค
ก	1	1	0
ข	1	1	0
ค	0	0	1

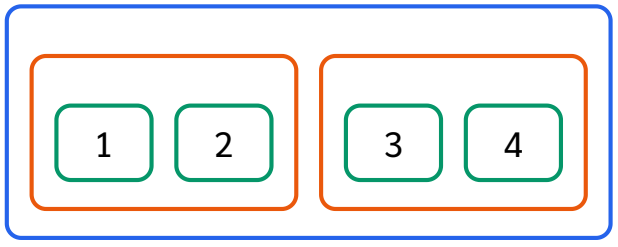
เช็กกลับ: ข้อ (b) การมีประเทศร่วมกันหนึ่งประเทศไม่เท่ากับการมี “ชุดประเทศที่เคยอยู่” เท่ากัน ส่วนข้อ (f) ต้องกำหนดค่าสีให้ทุกคนก่อน เช่น “ไม่มีผม” เป็นอีกค่าหนึ่ง หากจะรวมคนไม่มีผมในโดเมน

ข้อ 13 · สร้างความสัมพันธ์จากการแบ่งกลุ่ม

(a) {{1, 2}, {3, 4}}

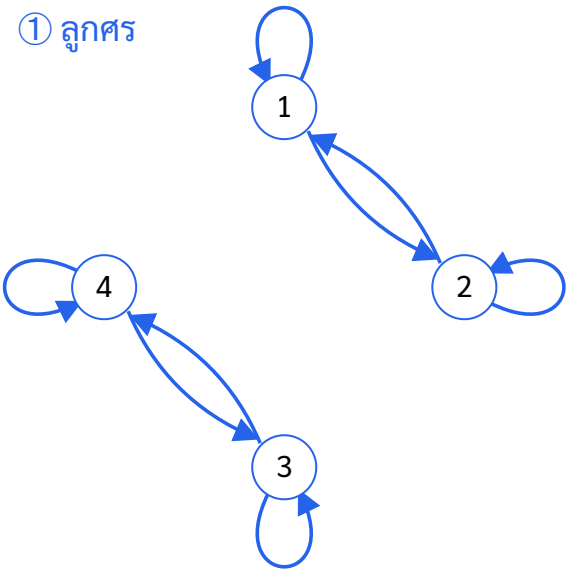
① **วางสมาชิกในกลุ่มของตน** แต่ละกลุ่มต้องไม่ว่าง กลุ่มไม่ซ้ำสมาชิก และรวมแล้วครบ {1,2,3,4}

① กลุ่มตั้งต้น



② **ต่อทุกคู่ภายในกลุ่ม รวมวงวน** R={(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)}

① ลูกศร



② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

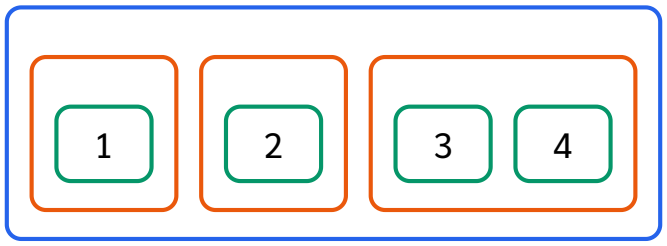
	1	2	3	4
1	1	1	0	0
2	1	1	0	0
3	0	0	1	1
4	0	0	1	1

③ คลาส	สมาชิกในคลาส
[1]	{1, 2}
[2]	{1, 2}
[3]	{3, 4}
[4]	{3, 4}

(b) {{1}, {2}, {3, 4}}

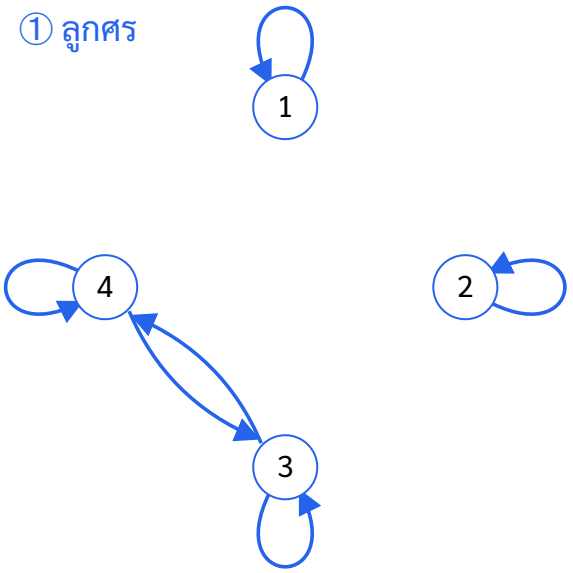
① **วางสมาชิกในกลุ่มของตน** แต่ละกลุ่มต้องไม่ว่าง กลุ่มไม่ซ้ำสมาชิก และรวมแล้วครบ {1,2,3,4}

① กลุ่มตั้งต้น



② **ต่อทุกคู่ภายในกลุ่ม รวมวงวน** R={(1, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)}

① ลูกศร



② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

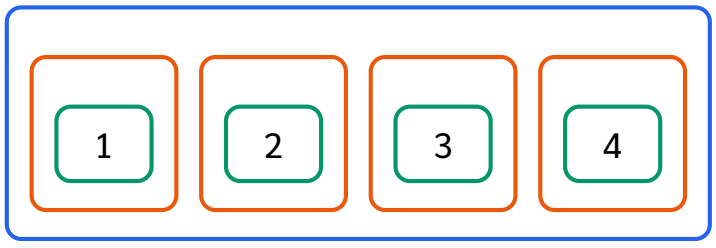
	1	2	3	4
1	1	0	0	0
2	0	1	0	0
3	0	0	1	1
4	0	0	1	1

③ คลาส	สมาชิกในคลาส
[1]	{1}
[2]	{2}
[3]	{3, 4}
[4]	{3, 4}

(c) {{1}, {2}, {3}, {4}}

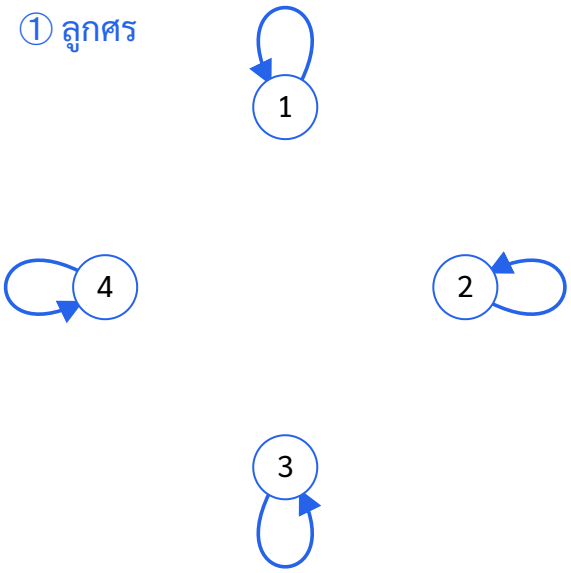
① **วางสมาชิกในกลุ่มของตน** แต่ละกลุ่มต้องไม่ว่าง กลุ่มไม่ซ้ำสมาชิก และรวมแล้วครบ {1,2,3,4}

① กลุ่มตั้งต้น



② **ต่อทุกคู่ภายในกลุ่ม รวมวงวน** R={(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)}

① ลูกศร



② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

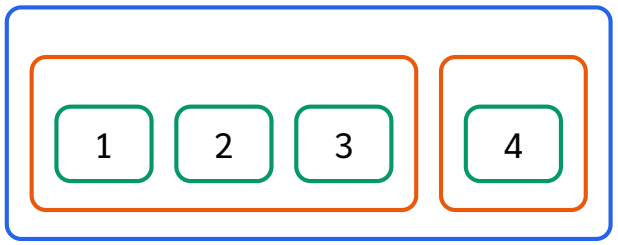
	1	2	3	4
1	1	0	0	0
2	0	1	0	0
3	0	0	1	0
4	0	0	0	1

③ คลาส	สมาชิกในคลาส
[1]	{1}
[2]	{2}
[3]	{3}
[4]	{4}

(d) {{1, 2, 3}, {4}}

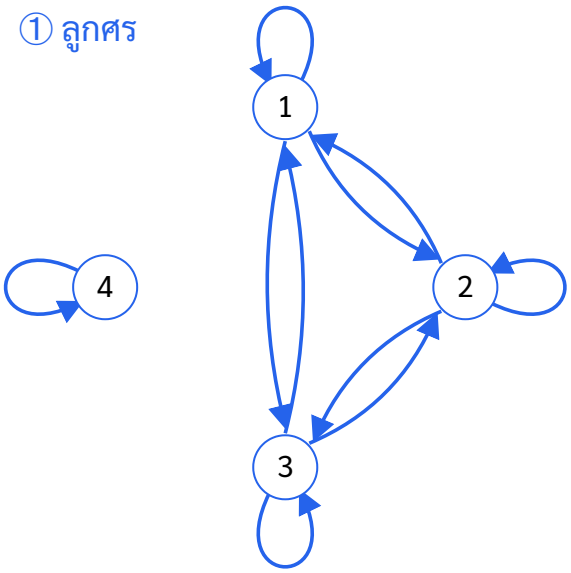
① **วางสมาชิกในกลุ่มของตน** แต่ละกลุ่มต้องไม่ว่าง กลุ่มไม่ซ้ำสมาชิก และรวมแล้วครบ {1,2,3,4}

① กลุ่มตั้งต้น



② ต่อทุกคู่ภายในกลุ่ม รวมวงวน R={(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 4)}

① ลูกศร



② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

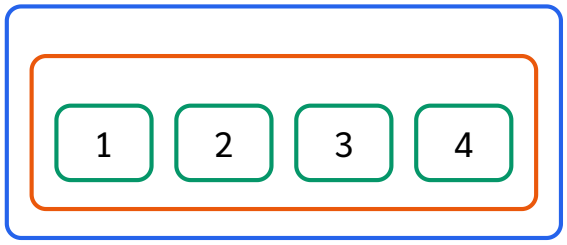
	1	2	3	4
1	1	1	1	0
2	1	1	1	0
3	1	1	1	0
4	0	0	0	1

③ คลาส	สมาชิกในคลาส
[1]	{1, 2, 3}
[2]	{1, 2, 3}
[3]	{1, 2, 3}
[4]	{4}

(e) {{1, 2, 3, 4}}

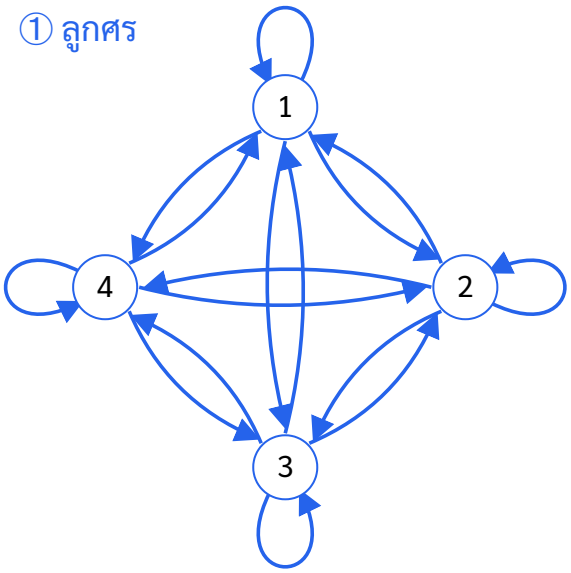
① วางสมาชิกในกลุ่มของตน แต่ละกลุ่มต้องไม่ว่าง กลุ่มไม่ซ้ำสมาชิก และรวมแล้วครบ {1,2,3,4}

① กลุ่มตั้งต้น



② ต่อทุกคู่ภายในกลุ่ม รวมวงวน R={(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)}

① ลูกศร



② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

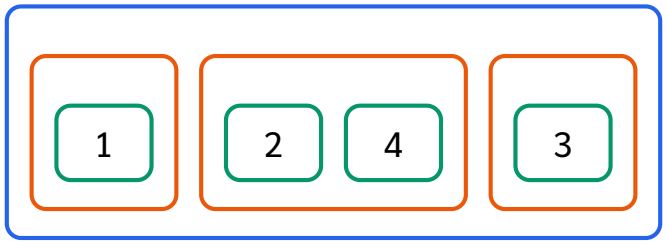
	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
3	1	1	1	1
4	1	1	1	1

③ คลาส	สมาชิกในคลาส
[1]	{1, 2, 3, 4}
[2]	{1, 2, 3, 4}
[3]	{1, 2, 3, 4}
[4]	{1, 2, 3, 4}

(f) {{1}, {2, 4}, {3}}

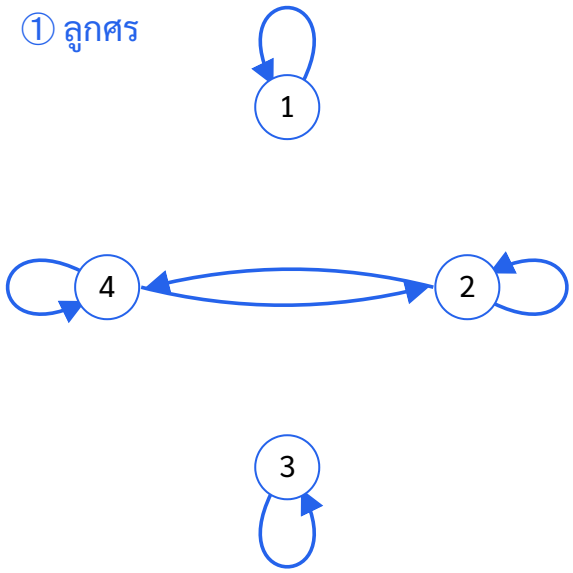
① วางสมาชิกในกลุ่มของตน แต่ละกลุ่มต้องไม่ว่าง กลุ่มไม่ซ้ำสมาชิก และรวมแล้วครบ {1,2,3,4}

① กลุ่มตั้งต้น



② ต่อทุกคู่ภายในกลุ่ม รวมวงวน R={(1, 1), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (4, 4)}

① ลูกศร



② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

	1	2	3	4
1	1	0	0	0
2	0	1	0	1
3	0	0	1	0
4	0	1	0	1

③ คลาส	สมาชิกในคลาส
[1]	{1}
[2]	{2, 4}
[3]	{3}
[4]	{2, 4}

เช็กกลับ: ห้ามต่อลูกศรข้ามกลุ่ม จำนวนคู่ต่อกลุ่มขนาด m คือ m^2 เพราะเลือกต้นและปลายได้อิสระ

ข้อ 14 · เติม {3,4} แล้วได้เซตเดียวกัน

X={1,2,3,4,5}, Y={3,4}, C={1,3}; กำหนด A R B เมื่อ AUY=BUY

(a) ตรวจสามสมบัติ สะท้อนเพราะ AUY=AUY; สมมาตรเพราะกลับข้างสมการได้; ถ่ายทอดเพราะ AUY=BUY และ BUY=DUY ให้ AUY=DUY

① เงื่อนไข/ขั้น	② ค่าหรือข้อความ	③ ได้อะไร
① สะท้อน	AUY=AUY	A R A
② สมมาตร	AUY=BUY	BUY=AUY
③ ถ่ายทอด	AUY=BUY=DUY	A R D

(b) หา [C] $C \cup Y=\{1,3,4\}$ ดังนั้นเซตในคลาสต้องมี 1 ต้องไม่มี 2,5 ส่วน 3,4 เลือกมีหรือไม่มีก็ได้ เพราะถูกเติมให้เหมือนกันตอนรวม Y

① A	② เติม Y={3,4}	③ A ∪ Y
{1}	เพิ่มส่วนที่ขาด	{1, 3, 4}
{1, 3}	เพิ่มส่วนที่ขาด	{1, 3, 4}
{1, 4}	เพิ่มส่วนที่ขาด	{1, 3, 4}
{1, 3, 4}	เพิ่มส่วนที่ขาด	{1, 3, 4}

[C]= {{1, 3, 4}, {1, 3}, {1, 4}, {1}}

(c) นับคลาสที่ต่างกัน คลาสถูกกำหนดด้วยสมาชิกนอก Y คือ {1,2,5} แต่ละตัวเลือกเข้า/ไม่เข้าได้ 2 ทาง จึงมี $2^3=8$ คลาส

① ดูนอก Y → ② เลือกสมาชิก → ③ กุญแจของแต่ละคลาส

∅	{1}	{2}	{5}	{1, 2}
{1, 5}	{2, 5}	{1, 2, 5}		

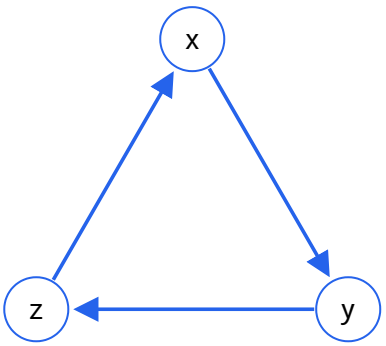
เช็กกลับ: มีทั้งหมด 32 เซต แบ่งเป็น 8 คลาส คลาสละ 4 เซต เพราะตัวเลือก 3,4 มีสี่แบบ จึงนับได้ครบ $8\times4=32$

ข้อ 15 · ใช้เงื่อนไขวนกลับเพื่อสร้างสมมาตรและถ่ายทอด

ให้ R สะท้อน และถ้า xRy กับ yRz แล้ว zRx ต้องพิสูจน์ว่าเป็นสมมูล

① **Assume สิ่งที่ให้มา** รู้ xRx ทุกตัว และกฎ “สองทอดแล้วกลับจากปลายไปต้น” แต่ยังไม่ได้รับสมมาตรหรือถ่ายทอด

① ลูกศร



② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

	x	y	z
x	0	1	0
y	0	0	1
z	1	0	0

② **Prove สมมาตรก่อน** สมมติ xRy เลือก z=y ได้ yRy จากสะท้อน ใช้กฎกับ xRy และ yRy จะได้ yRx

① ลูกศร

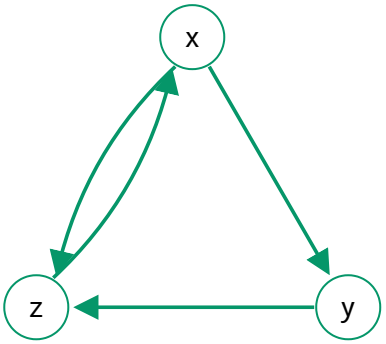


② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

	x	y
x	0	1
y	1	1

③ **Prove ถ่ายทอดต่อ** สมมติ xRy และ yRz กฎให้ zRx จากนั้นใช้สมมาตรที่เพิ่งพิสูจน์แล้ว กลับ zRx เป็น xRz

① ลูกศร



② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

	x	y	z
x	0	1	1
y	0	0	1
z	1	0	0

เช็กกลับ: สะท้อนได้จากโจทย์ สมมาตรพิสูจน์ในขั้น ② และถ่ายทอดพิสูจน์ในขั้น ③ จึงครบสามสมบัติ ห้ามใช้สมมาตรในขั้น ② ก่อนพิสูจน์มัน

ข้อ 16 · จัดคู่ตามผลต่าง a−b

X={1,...,10}; สมาชิกโดเมนคือคู่ (a,b) และ (a,b)R(c,d) เมื่อ a+d=b+c

(a) เปลี่ยนรูปเพื่ออ่านสิ่งที่เท่ากัน ลบ b+d ทั้งสองข้าง ได้ a−b=c−d ความสัมพันธ์จึงเปรียบเทียบผลต่างของคู่

① เงื่อนไข/ขั้น	② ค่าหรือข้อความ	③ ได้อะไร
① ก่อน	a+d=b+c	กฎตั้งต้น
② ลบ b+d	a−b=c−d	ผลต่างเท่ากัน
③ สมมูล	เท่ากันของผลต่าง	สะท้อน/สมมาตร/ถ่ายทอด

พิสูจน์ครบสามข้อ: a−b เท่าตนเองจึงสะท้อน; ถ้า a−b=c−d กลับสมการได้จึงสมมาตร; ถ้า a−b=c−d และ c−d=e−f เชื่อมสมการได้ a−b=e−f จึงถ่ายทอด

(b) เลือกตัวแทนคลาสละหนึ่งคู่ ผลต่างที่เป็นไปได้คือ −9 ถึง 9 ทุกค่าทำได้ด้วยตัวแทนในตาราง

① ผลต่าง	② ตัวแทน (a,b)	③ a−b
-9	(1, 10)	-9
-8	(1, 9)	-8
-7	(1, 8)	-7
-6	(1, 7)	-6
-5	(1, 6)	-5
-4	(1, 5)	-4
-3	(1, 4)	-3
-2	(1, 3)	-2
-1	(1, 2)	-1
0	(1, 1)	0
1	(2, 1)	1
2	(3, 1)	2
3	(4, 1)	3
4	(5, 1)	4
5	(6, 1)	5
6	(7, 1)	6
7	(8, 1)	7
8	(9, 1)	8
9	(10, 1)	9

เช็กกลับ: ทุกคู่มีผลต่างหนึ่งค่าแน่นอน ตัวแทนทั้ง 19 คู่มีผลต่างต่างกัน จึงไม่ซ้ำคลาสและไม่มีคลาสตกหล่น

ข้อ 17 · จัดคู่ตามอัตราส่วน a/b

โดเมน X×X โดย X={1,...,10}; กำหนด (a,b)R(c,d) เมื่อ ad=bc

(a) ใช้ว่า b,d เป็นบวก หาร ad=bc ด้วย bd≠0 ได้ a/b=c/d จึงเป็นการเท่ากันของอัตราส่วน

① เงื่อนไข/ขั้น	② ค่าหรือข้อความ	③ ได้อะไร
① ก่อน	ad=bc	b,d≠0
② หาร bd	a/b=c/d	อัตราส่วนเท่ากัน
③ เท่ากัน	สะท้อน/กลับข้าง/ต่อสมการ	สมมูล

สะท้อนเพราะ a/b=a/b; สมมาตรเพราะ a/b=c/d ให้ c/d=a/b; ถ่ายทอดเพราะ a/b=c/d และ c/d=e/f ให้ a/b=e/f แล้วคูณ bf ได้ af=be

(b) ลดรูปแต่ละคู่ หาร a และ b ด้วย ห.ร.ม. เดียวกันจนเป็นจำนวนที่ไม่มีตัวหารร่วมมากกว่า 1 เช่น (6,4)→(3,2) จึงเลือกคู่จำนวนที่เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์เป็นตัวแทน

① คู่เดิม	② หารด้วย ห.ร.ม.	③ ตัวแทน
(6,4)	÷2 ทั้งสองช่อง	(3,2)
(9,6)	÷3 ทั้งสองช่อง	(3,2)
(10,10)	÷10 ทั้งสองช่อง	(1,1)

ตัวแทนที่มีตัวหน้าคือ 1

(1, 1) (1, 2) (1, 3) (1, 4) (1, 5)
(1, 6) (1, 7) (1, 8) (1, 9) (1, 10)

ตัวแทนที่มีตัวหน้าคือ 2

(2, 1) (2, 3) (2, 5) (2, 7) (2, 9)

ตัวแทนที่มีตัวหน้าคือ 3

(3, 1) (3, 2) (3, 4) (3, 5) (3, 7)
(3, 8) (3, 10)

ตัวแทนที่มีตัวหน้าคือ 4

(4, 1) (4, 3) (4, 5) (4, 7) (4, 9)

ตัวแทนที่มีตัวหน้าคือ 5

(5, 1) (5, 2) (5, 3) (5, 4) (5, 6)

(5, 7) (5, 8) (5, 9)

ตัวแทนที่มีตัวหน้าคือ 6

(6, 1) (6, 5) (6, 7)

ตัวแทนที่มีตัวหน้าคือ 7

(7, 1) (7, 2) (7, 3) (7, 4) (7, 5)

(7, 6) (7, 8) (7, 9) (7, 10)

ตัวแทนที่มีตัวหน้าคือ 8

(8, 1) (8, 3) (8, 5) (8, 7) (8, 9)

ตัวแทนที่มีตัวหน้าคือ 9

(9, 1) (9, 2) (9, 4) (9, 5) (9, 7)

(9, 8) (9, 10)

ตัวแทนที่มีตัวหน้าคือ 10

(10, 1) (10, 3) (10, 7) (10, 9)

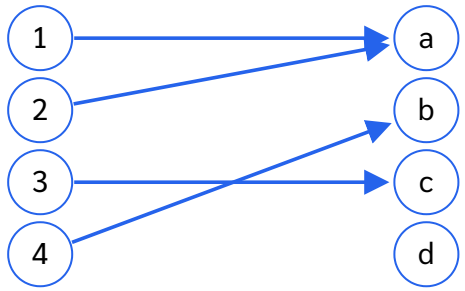
(c) ความหมายคุ้นเคย: คู่ทั้งสองแทนเศษส่วนที่มีค่าเท่ากัน เช่น 6/4=3/2

เช็กกลับ: ได้ 63 คลาส ทุกคู่ลดรูปได้หนึ่งตัวแทนในรายการ ตัวเศษและตัวส่วนหลังลดรูปยังอยู่ 1–10 และรูปอย่างต่ำไม่ซ้ำค่าเศษส่วน

ข้อ 18 · ตรวจว่าเป็นฟังก์ชัน แล้วจึงถาม 1–1 และทั่วถึง

(a) นับลูกศรออกจากทุก x R={(1, a), (2, a), (3, c), (4, b)}

① ลูกศร



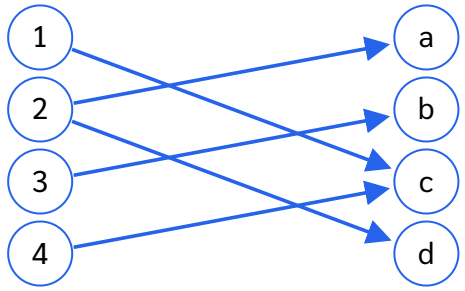
② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

	a	b	c	d
1	1	0	0	0
2	1	0	0	0
3	0	0	1	0
4	0	1	0	0

เป็นฟังก์ชัน: โดเมน {1,2,3,4}; เรนจ์ {a, b, c}; ไม่เป็น 1–1 เพราะ 1 กับ 2 มีภาพเดียวกัน; ไม่ทั่วถึง เพราะ d ไม่ถูกใช้

(b) นับลูกศรออกจากทุก x R={(1, c), (2, a), (2, d), (3, b), (4, c)}

① ลูกศร



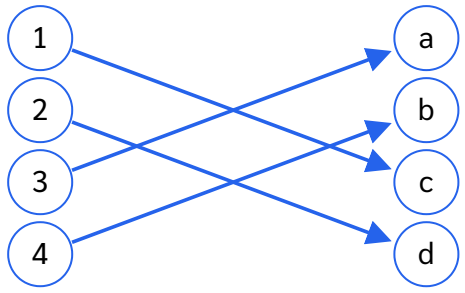
② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

	a	b	c	d
1	0	0	1	0
2	1	0	0	1
3	0	1	0	0
4	0	0	1	0

ไม่เป็นฟังก์ชันจาก X ไป Y: 2 มีลูกศรออกสองเส้นไป a และ d จึงหยุดก่อนจัดประเภท 1–1/ทั่วถึง

(c) นับลูกศรออกจากทุก x R={(1, c), (2, d), (3, a), (4, b)}

① ลูกศร



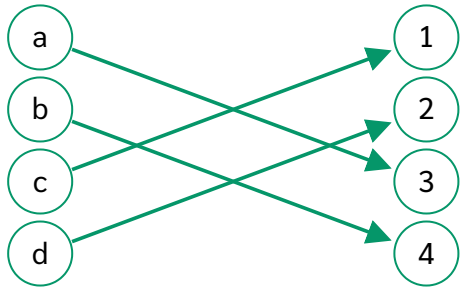
② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

	a	b	c	d
1	0	0	1	0
2	0	0	0	1
3	1	0	0	0
4	0	1	0	0

เป็นฟังก์ชัน: โดเมน {1,2,3,4}; เรนจ์ {a, b, c, d}; เป็น 1–1 เพราะไม่มีต้นต่างกันมาชนปลายเดียว; ทั่วถึง เพราะปลาย a,b,c,d ถูกใช้ครบ

กลับฟังก์ชันได้เพราะเป็นทั้งสองอย่าง f^{-1}={(a, 3), (b, 4), (c, 1), (d, 2)} โดเมน {a,b,c,d}; เรนจ์ {1,2,3,4}

① ลูกศร

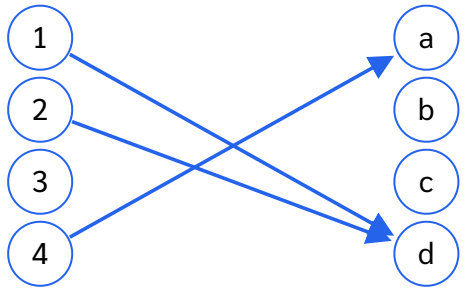


② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

	1	2	3	4
a	0	0	1	0
b	0	0	0	1
c	1	0	0	0
d	0	1	0	0

(d) นับลูกศรออกจากทุก x R={(1, d), (2, d), (4, a)}

① ลูกศร



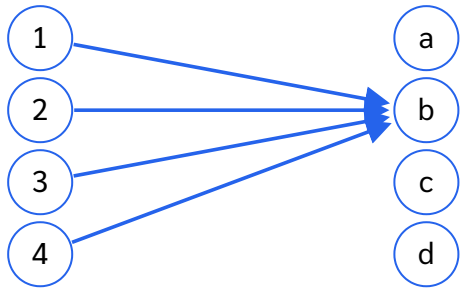
② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

	a	b	c	d
1	0	0	0	1
2	0	0	0	1
3	0	0	0	0
4	1	0	0	0

ไม่เป็นฟังก์ชันจาก X ไป Y: 3 ไม่มีลูกศรออก จึงหยุดก่อนจัดประเภท 1–1/ทั่วถึง

(e) นับลูกศรออกจากทุก x R={(1, b), (2, b), (3, b), (4, b)}

① ลูกศร



② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

	a	b	c	d
1	0	1	0	0
2	0	1	0	0
3	0	1	0	0
4	0	1	0	0

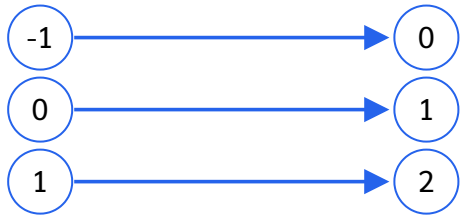
เป็นฟังก์ชัน: โดเมน {1,2,3,4}; เรนจ์ {b}; ไม่เป็น 1–1 เพราะ 1 กับ 2 มีภาพเดียวกัน; ไม่ทั่วถึง เพราะ d ไม่ถูกใช้

เช็กกลับ: ต้นหนึ่งตัวต้องมีปลายหนึ่งตัวเท่านั้นเป็นเงื่อนไขฟังก์ชัน ส่วนปลายหนึ่งตัวห้ามรับจากหลายต้นเป็นเงื่อนไข 1–1 ต้องไม่สลับสองคำถามนี้

ข้อ 19 · ฟังก์ชันจาก $\mathbb{Z}$ ไป $\mathbb{Z}$

(a) $f(n) = n + 1$ ถ้า f(a)=f(b) ได้ a+1=b+1 ลบ 1 แล้ว a=b จึง 1–1; ให้ m เป็นจำนวนเต็มปลายใดก็ได้ เลือก n=m−1 ซึ่งเป็นจำนวนเต็ม แล้ว f(n)=m จึงทั่วถึง

① ลูกศร



② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

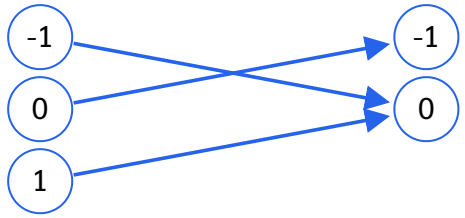
	0	1	2
-1	1	0	0
0	0	1	0
1	0	0	1

① 1–1	② ทั่วถึง $\mathbb{Z}$	③ ทั้งสอง
T	T	T

รูปยกค่าบางตัวในโดเมนเพื่อเห็นการชนหรือภาพที่ได้ โคโดเมนจริงยังเป็น $\mathbb{Z}$ ทั้งหมด การตัดสินทั่วถึงใช้เหตุผลทั่วไปด้านบน

(b) $f(n) = n^2 - 1$ f(−1)=0=f(1) ทั้งที่ −1≠1 จึงไม่ 1–1; f(n)≥−1 ทุก n ดังนั้นจำนวนเต็ม −2 ไม่มีต้นทาง จึงไม่ทั่วถึง

① ลูกศร



② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

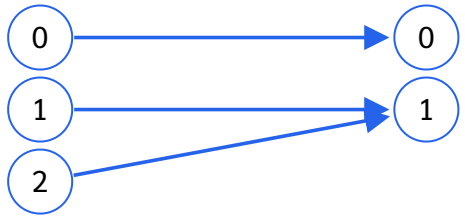
	-1	0
-1	0	1
0	1	0
1	0	1

① 1–1	② ทั่วถึง $\mathbb{Z}$	③ ทั้งสอง
F	F	F

รูปยกค่าบางตัวในโดเมนเพื่อเห็นการชนหรือภาพที่ได้ โคโดเมนจริงยังเป็น $\mathbb{Z}$ ทั้งหมด การตัดสินทั่วถึงใช้เหตุผลทั่วไปด้านบน

(c) $f(n) = \lceil n/2 \rceil$ f(1)=1=f(2) จึงไม่ 1–1; ให้ m เป็นจำนวนเต็มปลายใดก็ได้ เลือก n=2m แล้ว f(n)=⌈m⌉=m จึงทั่วถึง แม้ m ติดลบก็ใช้ได้

① ลูกศร



② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

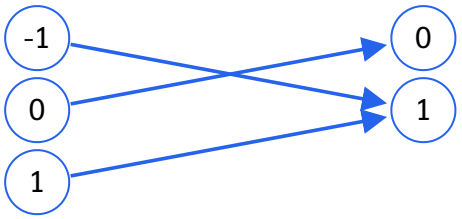
	0	1
0	1	0
1	0	1
2	0	1

① 1–1	② ทั่วถึง $\mathbb{Z}$	③ ทั้งสอง
F	T	F

รูปยกค่าบางตัวในโดเมนเพื่อเห็นการชนหรือภาพที่ได้ โคโดเมนจริงยังเป็น $\mathbb{Z}$ ทั้งหมด การตัดสินทั่วถึงใช้เหตุผลทั่วไปด้านบน

(d) $f(n) = |n|$ f(−1)=1=f(1) จึงไม่ 1–1; ค่าสัมบูรณ์ไม่ติดลบ ทำให้ −1 ไม่มีต้นทาง จึงไม่ทั่วถึง

① ลูกศร



② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

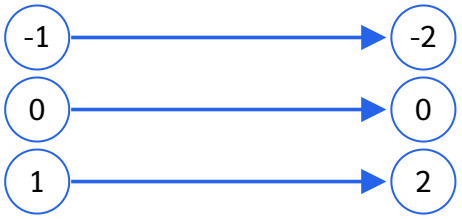
	0	1
-1	0	1
0	1	0
1	0	1

① 1–1	② ทั่วถึง $\mathbb{Z}$	③ ทั้งสอง
F	F	F

รูปยกค่าบางตัวในโดเมนเพื่อเห็นการชนหรือภาพที่ได้ โคโดเมนจริงยังเป็น $\mathbb{Z}$ ทั้งหมด การตัดสินทั่วถึงใช้เหตุผลทั่วไปด้านบน

(e) $f(n) = 2n$ ถ้า 2a=2b หาร 2 ได้ a=b จึง 1–1; ค่า 1 จะต้องมาจาก n=1/2 ซึ่งไม่เป็นจำนวนเต็ม จึงไม่ทั่วถึง

① ลูกศร



② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

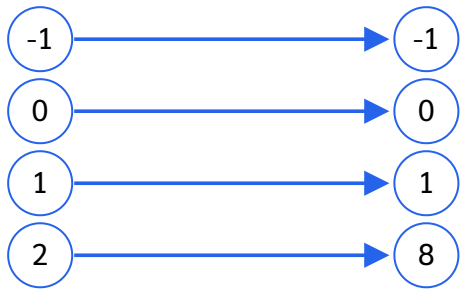
	-2	0	2
-1	1	0	0
0	0	1	0
1	0	0	1

① 1–1	② ทั่วถึง $\mathbb{Z}$	③ ทั้งสอง
T	F	F

รูปยกค่าบางตัวในโดเมนเพื่อเห็นการชนหรือภาพที่ได้ โคโดเมนจริงยังเป็น $\mathbb{Z}$ ทั้งหมด การตัดสินทั่วถึงใช้เหตุผลทั่วไปด้านบน

(f) $f(n) = n^3$ ถ้า $a^3=b^3$ จะได้ $(a-b)(a^2+ab+b^2)=0$; และ $a^2+ab+b^2=((a+b)^2+a^2+b^2)/2 \geq 0$ โดยจะเป็น 0 ได้ก็ต่อเมื่อ $a=b=0$ ดังนั้นถ้าวงเล็บหลังไม่เป็น 0 ต้องมี $a-b=0$ และถ้าวงเล็บหลังเป็น 0 ก็มี $a=b=0$ อยู่แล้ว จึง $a=b$ ทุกกรณี เป็น 1–1; ค่า 2 อยู่ระหว่าง $1^3=1$ กับ $2^3=8$ ไม่มีจำนวนเต็มยกกำลังสามให้ 2 จึงไม่ทั่วถึง

① ลูกศร



② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

	-1	0	1	8
-1	1	0	0	0
0	0	1	0	0
1	0	0	1	0
2	0	0	0	1

① 1–1	② ทั่วถึง $\mathbb{Z}$	③ ทั้งสอง
T	F	F

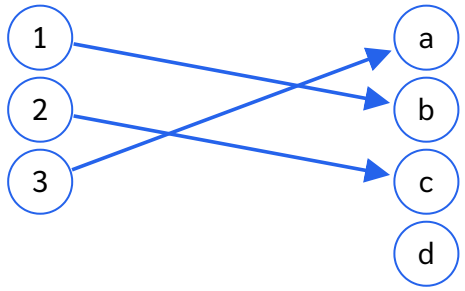
รูปยกค่าบางตัวในโดเมนเพื่อเห็นการชนหรือภาพที่ได้ โคโดเมนจริงยังเป็น $\mathbb{Z}$ ทั้งหมด การตัดสินทั่วถึงใช้เหตุผลทั่วไปด้านบน

เช็กกลับ: ข้อ (c) เครื่องหมาย $\lceil\ \rceil$ คือปัดขึ้น ไม่ใช่ปัดลง เช่น $\lceil 1/2 \rceil = 1$; ฟังก์ชันที่เพิ่มตลอดอย่าง n^3 ยังไม่จำเป็นต้องทั่วถึงจำนวนเต็ม

ข้อ 20 · ประกอบ f∘g ตามลูกศร

① เดิน g ก่อน $g=\{(1,b),(2,c),(3,a)\}$

① ลูกศร

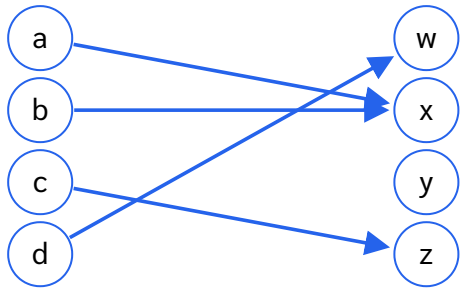


② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

	a	b	c	d
1	0	1	0	0
2	0	0	1	0
3	1	0	0	0

② ส่งผลของ g เข้า f f={(a,x),(b,x),(c,z),(d,w)}

① ลูกศร



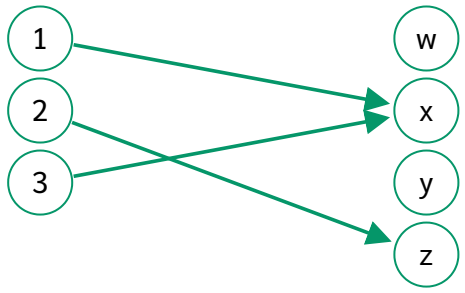
② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

	w	x	y	z
a	0	1	0	0
b	0	1	0	0
c	0	0	0	1
d	1	0	0	0

① ต้น	② หลัง g	③ หลัง f
1	b	x
2	c	z
3	a	x

③ เก็บต้นกับปลายสุดท้าย f∘g={(1, x), (2, z), (3, x)}

① ลูกศร



② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

	w	x	y	z
1	0	1	0	0
2	0	0	0	1
3	0	1	0	0

เช็กกลับ: ได้ {(1,x),(2,z),(3,x)} ตัวกลาง b,c,a ใช้เดินทางแต่ไม่ใช่ปลายของคำตอบ

ข้อ 21 · ประกอบสูตรบนจำนวนเต็มบวก

f(n)=2n+1, g(n)=3n−1 ผลของแต่ละฟังก์ชันยังเป็นจำนวนเต็มบวกเมื่อ n≥1 จึงประกอบได้

f∘f ทำตัวขวาก่อน แล้วแทนทั้งก้อนในตัวซ้าย

① งาน	② นิพจน์	③ เหตุผล
สูตรชั้นนอก	f(2n+1)	ทำตัวขวาแล้ว
แทนค่า	2(2n+1)+1	แทน n ทั้งก้อน
กระจาย	4n+2+1	คูณเข้าทุกพจน์
รวม	4n+3	รวมค่าคงตัว

g∘g ทำตัวขวาก่อน แล้วแทนทั้งก้อนในตัวซ้าย

① งาน	② นิพจน์	③ เหตุผล
สูตรชั้นนอก	g(3n−1)	ทำตัวขวาแล้ว
แทนค่า	3(3n−1)−1	แทน n ทั้งก้อน
กระจาย	9n−3−1	คูณเข้าทุกพจน์
รวม	9n−4	รวมค่าคงตัว

f∘g ทำตัวขวาก่อน แล้วแทนทั้งก้อนในตัวซ้าย

① งาน	② นิพจน์	③ เหตุผล
สูตรชั้นนอก	f(3n−1)	ทำตัวขวาแล้ว
แทนค่า	2(3n−1)+1	แทน n ทั้งก้อน
กระจาย	6n−2+1	คูณเข้าทุกพจน์
รวม	6n−1	รวมค่าคงตัว

g∘f ทำตัวขวาก่อน แล้วแทนทั้งก้อนในตัวซ้าย

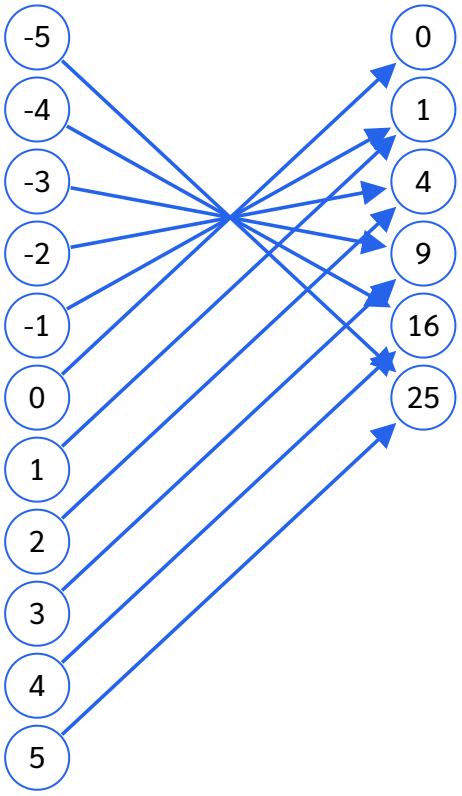
① งาน	② นิพจน์	③ เหตุผล
สูตรชั้นนอก	g(2n+1)	ทำตัวขวาแล้ว
แทนค่า	3(2n+1)−1	แทน n ทั้งก้อน
กระจาย	6n+3−1	คูณเข้าทุกพจน์
รวม	6n+2	รวมค่าคงตัว

เช็กกลับ: เมื่อ n=1 ได้ f∘f=7, g∘g=5, f∘g=5, g∘f=8 ซึ่งตรงกับเดินฟังก์ชันสองครั้ง ข้อสุดท้ายสองอันต่างกัน แสดงว่าลำดับสำคัญ

ข้อ 22 · ยกกำลังสองจาก −5 ถึง 5

① คำนวณแต่ละ x แล้วเก็บคู่ f={(-1, 1), (-2, 4), (-3, 9), (-4, 16), (-5, 25), (0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16), (5, 25)}

① ลูกศร



② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

	0	1	4	9	16	25
-5	0	0	0	0	0	1
-4	0	0	0	0	1	0
-3	0	0	0	1	0	0
-2	0	0	1	0	0	0
-1	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
2	0	0	1	0	0	0
3	0	0	0	1	0	0
4	0	0	0	0	1	0
5	0	0	0	0	0	1

② **ตรวจ 1–1** ไม่เป็น เพราะ -1 กับ 1 ต่างกันแต่ให้ 1 เหมือนกัน

① ต้นต่างกัน	② คำนวณ	③ ปลายชน
-1	$(-1)^2$	1
1	1^2	1

③ **ตรวจทั่วถึงโคโดเมน** $\mathbb{Z}$ ไม่ทั่วถึง เพราะ -1 เป็นจำนวนเต็มแต่ไม่มี $x^2=-1$ รูปแสดงเฉพาะเรนจ์ $\{0,1,4,9,16,25\}$ ไม่ได้เปลี่ยนโคโดเมนจาก $\mathbb{Z}$

① โคโดเมน $\mathbb{Z}$ → ② ค่า -1 → ③ ไม่มีลูกศรเข้า

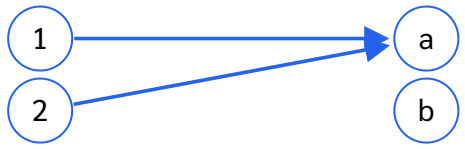
-1 ไม่มีต้นทาง

เช็กกลับ: มีต้น 11 ตัว แต่เรนจ์ 6 ค่า และทุกค่าที่ออกมาไม่ติดลบ จึงตอบเรื่องทั่วถึงโดยเทียบกับ $\mathbb{Z}$ ทั้งหมด

ข้อ 23 · นับฟังก์ชันจาก {1,2} ไป {a,b}

แบบ 1 $f=\{(1, a), (2, a)\}$; ไม่ 1–1 และไม่ทั่วถึง

① ลูกศร

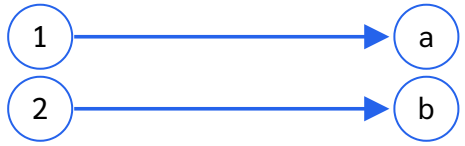


② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

	a	b
1	1	0
2	1	0

แบบ 2 $f=\{(1, a), (2, b)\}$; 1–1 และทั่วถึง

① ลูกศร

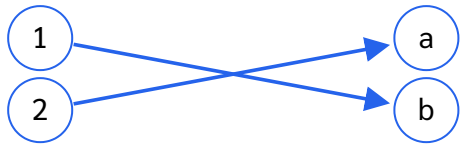


② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

	a	b
1	1	0
2	0	1

แบบ 3 f={(1, b), (2, a)}; 1–1 และทั่วถึง

① ลูกศร

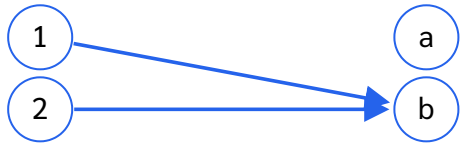


② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

	a	b
1	0	1
2	1	0

แบบ 4 f={(1, b), (2, b)}; ไม่ 1–1 และไม่ทั่วถึง

① ลูกศร



② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

	a	b
1	0	1
2	0	1

เช็กกลับ: แต่ละต้นเลือกปลายได้สองทางอิสระ จึงมี $2^2=4$ ฟังก์ชัน แบบ {(1,a),(2,b)} และ {(1,b),(2,a)} เป็นทั้ง 1–1 และทั่วถึง

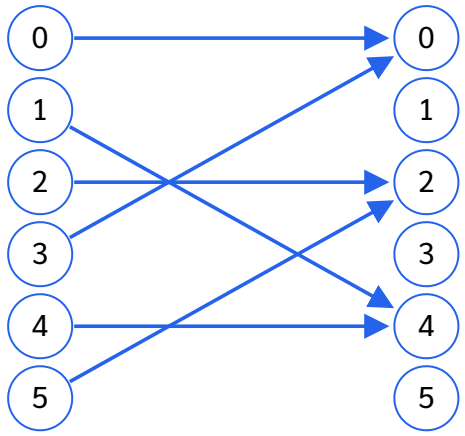
ข้อ 24 · คูณ 4 แล้วเอาเศษเมื่อหาร 6

① **คำนวณ 4x ก่อนหาเศษ** mod 6 เก็บเศษใน {0,1,2,3,4,5}

① x	② 4x	③ เศษเมื่อหาร 6
0	0	0
1	4	4
2	8	2
3	12	0
4	16	4
5	20	2

② วาดฟังก์ชันจากคู่ที่ได้ f={(0, 0), (1, 4), (2, 2), (3, 0), (4, 4), (5, 2)}

① ลูกศร



② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0	0
3	1	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	1	0
5	0	0	1	0	0	0

ไม่ 1–1: f(0)=0=f(3) แต่ 0≠3

ไม่ทั่วถึง: เรนจ์เป็น {0,2,4} ปลาย 1,3,5 ไม่มีลูกศรเข้า

เช็กกลับ: ทุกต้นมีหนึ่งปลายจึงเป็นฟังก์ชัน แต่การเป็นฟังก์ชันไม่ได้รับประกันว่าจะ 1–1 หรือทั่วถึง

ข้อ 25 · ข้อความเกี่ยวกับ g:X→Y และ f:Y→Z

หากจะหักล้าง ให้เขียน X,Y,Z และทุกค่าของฟังก์ชันให้ครบ หากจะพิสูจน์ ต้องเริ่มจากสมมติฐานที่ให้จริง ๆ ไม่หยิบข้อสรุปมาใช้ล่วงหน้า

(a) ถ้า g เป็น 1–1 แล้ว f∘g เป็น 1–1 · เท็จ เลือก X={1,2}, Y={a,b}, Z={0}; g(1)=a,g(2)=b เป็น 1–1 แต่ f(a)=f(b)=0 ทำให้ผลประกอบชนกัน

① ต้น	② ผ่าน g	③ ผ่าน f
1	a	0
2	b	0

① ลูกศร



② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

	0
1	1
2	1

(b) ถ้า f และ g ทั่วถึง แล้ว f∘g ทั่วถึง · จริง ให้ $z \in Z$ ใด ๆ เพราะ f ทั่วถึง จึงมี $y \in Y$ ที่ $f(y)=z$ เพราะ g ทั่วถึง จึงมี $x \in X$ ที่ $g(x)=y$ ดังนั้น $f(g(x))=f(y)=z$

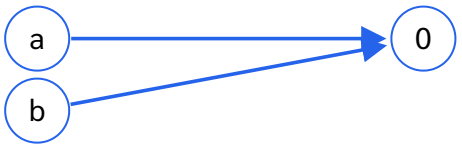
① เงื่อนไข/ขั้น	② ค่าหรือข้อความ	③ ได้อะไร
① รับปลาย	$z \in Z$ ใด ๆ	ต้องหาต้น x
② ย้อน f	มี y: $f(y)=z$	ใช้ f ทั่วถึง
③ ย้อน g	มี x: $g(x)=y$	ใช้ g ทั่วถึง

(c) ถ้า f,g เป็นทั้ง 1–1 และทั่วถึง ผลประกอบเป็นทั้งสอง · จริง เรื่องทั่วถึงใช้เหตุผลข้อ (b); พิสูจน์ 1–1 โดยสมมติ $f(g(x_1))=f(g(x_2))$ ใช้ f เป็น 1–1 ตัด f ได้ $g(x_1)=g(x_2)$ จากนั้นใช้ g เป็น 1–1 ได้ $x_1=x_2$

① เงื่อนไข/ขั้น	② ค่าหรือข้อความ	③ ได้อะไร
① Assume	$f(g(x_1))=f(g(x_2))$	ภาพปลายเท่ากัน
② ใช้ f 1–1	$g(x_1)=g(x_2)$	ภาพกลางเท่ากัน
③ ใช้ g 1–1	$x_1=x_2$	ถึงเป้าหมาย

(d) ถ้า f∘g เป็น 1–1 แล้ว f เป็น 1–1 · เท็จ เลือก $X=\{1\}, Y=\{a,b\}, Z=\{0\}$; $g(1)=a$; $f(a)=f(b)=0$ ตัวประกอบ f ชนกัน แต่ผลประกอบมีต้นเพียง 1 ตัว จึงเป็น 1–1

① ลูกศร



② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

	0
a	1
b	1

① ลูกศร



② แถวต้น → คอลัมน์ปลาย

	0
1	1

(e) ถ้า f∘g เป็น 1–1 แล้ว g เป็น 1–1 · จริง สมมติ $g(x_1)=g(x_2)$ ใช้ f กับสองข้างได้ $f(g(x_1))=f(g(x_2))$ แล้วใช้ผลประกอบเป็น 1–1 ได้ $x_1=x_2$

① เงื่อนไข/ขั้น	② ค่าหรือข้อความ	③ ได้อะไร
① Assume	$g(x_1)=g(x_2)$	เริ่มจากภาพของ g
② ใช้ f	$f(g(x_1))=f(g(x_2))$	ค่าเท่ากันเข้า f
③ ใช้ f∘g 1–1	$x_1=x_2$	พิสูจน์ g 1–1

(f) ถ้า f∘g ทั่วถึง แล้ว f ทั่วถึง · จริง ให้ $z\in Z$ ใด ๆ ผลประกอบทั่วถึงจึงมี $x\in X$ ที่ $f(g(x))=z$ ตั้ง $y=g(x)$ ซึ่งอยู่ใน Y แล้วได้ $f(y)=z$ จึงหาต้นทางใน Y ได้ทุก z

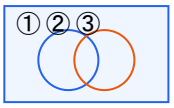
① เงื่อนไข/ขั้น	② ค่าหรือข้อความ	③ ได้อะไร
① รับ z	$z\in Z$ ใด ๆ	ต้องหา y
② ใช้ผลประกอบ	มี x: $f(g(x))=z$	สมมติฐาน
③ ตั้ง $y=g(x)$	$f(y)=z$	ถึงเป้าหมาย

เช็กกลับ: ข้อ (d) ผลประกอบเห็นเฉพาะสมาชิกของ Y ที่ g ส่งไปถึง จึงบังคับ f บน Y ทั้งหมดไม่ได้ ส่วนข้อ (f) ต้นทาง $y=g(x)$ มีอยู่จริงสำหรับทุก z

นิยาม · กฎ · ขั้นตอนทั้งขอบเขตสอบ

เปิดดูวิธีละเอียดในบทที่ 1–5 · ก่อนตอบระบุโดเมนและเงื่อนไข · หลังตอบแทนกลับ · รูปย่อ ① ตั้งต้น → ② ทำ → ③ ผล

1 · เซต



$x \in A$ = x เป็นสมาชิก · $A \subseteq B$ = ทุกสมาชิก A อยู่ B · $A \subsetneq B$ เพิ่มเงื่อนไข $A \neq B$

$A = B \iff A \subseteq B$ และ $B \subseteq A$ · ไม่นับสมาชิกซ้ำ · $|A|$ = จำนวนสมาชิก

$\mathcal{P}(A)$ = เซตของทุกสับเซต · ถ้า $|A| = n$ มี 2^n สับเซต และ $2^n - 1$ สับเซตแท้

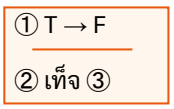
$A \cup B$: อยู่ A หรือ B · $A \cap B$: อยู่ทั้งคู่
$A - B$: อยู่ A แต่ไม่อยู่ B · $\bar{A} = U - A$
ไม่ทับกัน: $A \cap B = \varnothing$

$A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$ · ลำดับสำคัญ
$(a_1, \ldots, a_n)$: ลำดับสำคัญ · $A_1 \times \cdots \times A_n$ เลือกทีละตำแหน่ง
$|A \times B| = |A||B|$ สำหรับเซตจำกัด

กฎเซต สลับที่/เปลี่ยนหมู่ใช้กับ ∪,∩
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A \cup \varnothing = A,\ A \cap U = A$
$A \cup U = U,\ A \cap \varnothing = \varnothing$
$A \cup A = A,\ A \cap A = A,\ \overline{\bar{A}} = A$
$A \cup \bar{A} = U,\ A \cap \bar{A} = \varnothing$
$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B},\ \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
$A \cup (A \cap B) = A,\ A \cap (A \cup B) = A$

ลงมือ: ทำวงเล็บก่อน → ไล่สมาชิก U ทุกตัว → เก็บตัวที่ผ่าน → เช็ก ∈ กับ ⊆ ว่าถามคนละระดับ

2 · ตรรกะ



¬ กลับ T/F · ∧ จริงเมื่อทั้งคู่ T · ∨ เท็จเมื่อทั้งคู่ F
$p \to q$ เท็จกรณีเดียว T→F · $p \leftrightarrow q$ จริงเมื่อค่าเท่ากัน

$p \to q \equiv \neg p \vee q \equiv \neg q \to \neg p$
$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
$\neg\neg p \equiv p$ · สลับที่/เปลี่ยนหมู่ใช้กับ ∧,∨

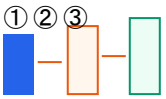
$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
สมมูล = ผลตรงทุกแถว · จริงเสมอ = T ทุกแถว
จำเป็น: ผล→เงื่อนไข · เพียงพอ: เงื่อนไข→ผล

Predicate: $P(x)$ ตัดสิน T/F ได้เมื่อระบุ x และโดเมน; เปลี่ยนโดเมนแล้วคำตอบอาจเปลี่ยน

∀/∃: ∀ ต้องผ่านทุกค่า · ∃ ต้องมีพยานหนึ่งค่า
$\neg\forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$
$\neg\exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$
อ่านซ้ายก่อน: พยานเลือกหลังเปลี่ยนตามค่าก่อนได้
$\forall x \exists y$ สลับเป็น $\exists y \forall x$ ไม่ได้ทั่วไป

ลงมือ: ระบุโดเมน → แยกวงเล็บ → ทำตารางครบ 2^n แถว หรือให้เหตุผลทั่วไป/พยาน/กรณีค้าน

3 · พิสูจน์



axiom = ข้อตกลงตั้งต้น · definition = ความหมาย
theorem = ข้อความที่พิสูจน์ · lemma = ผลช่วย
corollary = ผลตาม · assume = สมมติชั่วคราว

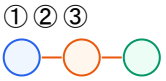
ตรง: Assume p → ใช้นิยาม/กฎ → ถึง q
แย้งสลับที่: Assume ¬q → ถึง ¬p
ขัดแย้ง: Assume p และ ¬q → ชนข้อเท็จจริง
แจงกรณี: แบ่งครบทุกกรณี → ทุกทางถึงเป้า
พิสูจน์ ∃: สร้างพยาน t → แทนกลับ → ตรวจว่า t อยู่โดเมน
หักล้าง ∀: พยานหนึ่งตัวผ่านเงื่อนไขแต่ไม่ผ่านผล

จำนวนคู่ $2a$ · จำนวนคี่ $2a+1$ $(a \in \mathbb{Z})$
หารลงตัว $d \mid n \iff n = dt\ (t \in \mathbb{Z})$
ตรรกยะ $a/b,\ a,b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0$

เหตุผลอ้างอิง: p, p→q ⇒ q; ¬q, p→q ⇒ ¬p
ข้อโต้แย้งถูก = ไม่มีแถวที่สมมติฐานจริงครบแต่ผลเท็จ
Resolution: $a \vee p,\ b \vee \neg p \Rightarrow a \vee b$
ตัดลูกศร → เขียน AND ของ OR → ตัดคู่ p/¬p
อย่าตัดตัวสองตัวที่ไม่ได้เป็นปฏิเสธกัน

อุปนัย ① ฐาน: พิสูจน์ $S(n_0)$ จริง
② IH: เลือก k ใด ๆ คงที่ $k \geq n_0$ แล้วสมมติ $S(k)$ เพื่อพิสูจน์สะพาน $S(k) \to S(k+1)$
③ Prove: เขียน $S(k+1)$ เป็นเป้าหมายที่ยังใช้ไม่ได้ → เริ่มจากด้านที่ต้องแปลง → วงเฉพาะก้อนเดิม → แทนด้วย IH → เก็บพจน์ใหม่ → จัดจนตรงเป้า
จบ: ฐานจริง + สะพานทุก k ⇒ จริงทุก $n \geq n_0$
ห้ามสมมติ $S(k+1)$ หรือทุก $S(n)$ เป็นเหตุผล

4 · ความสัมพันธ์

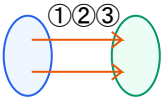


$R \subseteq X \times Y$ · $(x,y) \in R$ คือ x→y
เมทริกซ์: แถว x / คอลัมน์ y เป็น 1 เมื่อ xRy
โดเมน = ต้นที่ใช้ · เรนจ์ = ปลายที่ถึง

สะท้อน: xRx ทุก x · สมมาตร: xRy⇒yRx
ปฏิสมมาตร: xRy และ yRx⇒x=y
ถ่ายทอด: xRy และ yRz⇒xRz
ลำดับบางส่วน = สะท้อน+ปฏิสมมาตร+ถ่ายทอด
ลำดับทั้งหมด = เพิ่มว่าแต่ละคู่เทียบกันได้
Hasse: ลบวงวน/เส้นข้ามขั้น · อ่านทางขึ้น

$R^{-1} = \{(y,x) : (x,y) \in R\}$
$x(S \circ R)z \iff \exists y\ (xRy \wedge ySz)$
สมมูล = สะท้อน+สมมาตร+ถ่ายทอด
$[a] = \{x : xRa\}$ · คลาสไม่ซ้ำแบ่งโดเมนครบ
partition: กลุ่มไม่ว่าง ไม่ทับกัน รวมครบเซต

5 · ฟังก์ชัน



$f : X \to Y$: ทุก x มีปลายเดียว · เรนจ์ $f(X) \subseteq Y$ · 1–1: $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$ · ทั่วถึง: ทุก $y \in Y$ มี $x \in X$ ให้ $f(x) = y$ · bijective = ทั้ง 1–1 และทั่วถึง → มีผกผัน $f^{-1} : Y \to X$ · $(g \circ f)(x) = g(f(x))$: ทำ f ก่อน · f^{-1} กลับลูกศร ไม่ใช่ $1/f(x)$ · **เช็ก:** ต้นครบ/หนึ่งเส้น → มีปลายชน? → ปลายครบ Y?