GTS210 · MATHEMATICS 3 · สอบกลางภาค (เปิดตำรา + เครื่องคิดเลข)

# ชีทเปิดตำรา: ดูหน้าตาโจทย์ → เปิดหัวข้อ → ทำตามขั้น

แถบดำมุมขวาบนของทุกหน้าบอกว่าอยู่ **หัวข้อไหน** · ทุกหัวข้อมี **(ก) ขั้นตอนทำตามได้ทันที** · **(ข) กล่องสูตร** · **(ค) กับดักที่ข้อสอบชอบ** · **(ง) ตัวอย่างจากควิซแสดงทุกบรรทัด**

## ตารางค้นหาตามหน้าตาโจทย์ (อ่านคอลัมน์ซ้ายก่อน แล้วเปิดไปหน้าที่บอก)

| โจทย์ให้ ... | ถาม ... | ไปหัวข้อ / หน้า |
|---|---|---|
| ระบบ 2 สมการ 2 ตัวแปร (อาจมีตัวอักษร $a, b$ ปนอยู่) | คำตอบเดียว / ไม่มี / อนันต์ · ค่าของ $a$ ที่ทำให้... | หัวข้อ 1 · หน้า 2 |
| ระบบที่ขวามือเป็น 0 ทั้งหมด (เอกพันธ์, H-system) 2×2 หรือใหญ่กว่า | มีแค่คำตอบ $x = y = 0$ หรืออนันต์ · ค่าของ $a$ | หัวข้อ 6 · หน้า 16 |
| เวกเตอร์ $u, v, w$ เป็นตัวเลข | ตั้งฉาก? ความยาว? มุม? ระยะ? $u + v$? | หัวข้อ 2 · หน้า 5 |
| เมทริกซ์ $A$ ขนาด $m \times n$, $B$ ขนาด $p \times q$ | คูณได้ไหม · $C = AB$ ขนาดเท่าไร | หัวข้อ 3 · หน้า 7 |
| ระบบ 2–3 สมการ 2–3 ตัวแปร เป็นตัวเลขล้วน + ตัวเลือกเป็นเวกเตอร์ $x = (\ldots) + (\ldots)x_3$ | เลือกคำตอบที่ถูก · กี่ตัวแปรอิสระ · ไม่มีคำตอบ? | หัวข้อ 4 · หน้า 9 |
| สั่งว่า "Use Gauss Jordan Elimination" | หาคำตอบเป็นเวกเตอร์ | หัวข้อ 5 · หน้า 13 |
| ข้อความ "ระบบ $m$ สมการ $n$ ตัวแปร มี ... เสมอ" (ไม่มีตัวเลข) | ข้อความไหนจริง | หัวข้อ 4 (ตาราง 3 ผลลัพธ์) และ 6 |
| สั่ง "Use the inverse matrix" · ถาม $A^{-1}$ · ถาม invertible/singular · $(AB)^{-1}$, $(kA)^{-1}$ | หา $A^{-1}$ แล้ว $x = A^{-1}b$ · ข้อความไหนจริง | หัวข้อ 7 · หน้า 18 |
| มีคำว่า transpose $A^T$, symmetric, triangular, diagonal | ข้อความไหนจริง · แสดงว่า $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ | หัวข้อ 8 · หน้า 22 |
| สั่งหา det (2×2, 3×3, 4×4) ด้วย cofactors / GE แถว / GE คอลัมน์ | ค่า det | หัวข้อ 9 · หน้า 24 |
| ข้อความ $\det(AB)$, $\det(A^{-1})$, $\det(A^T)$, $\det(A+B)$, $\det(I)$ | ข้อความไหนจริง | หัวข้อ 9 (ข) · หน้า 24 |
| สั่ง "Use Cramer's Rule" · ถาม adjoint | คำตอบ $x_i = D_i/D$ | หัวข้อ 9 (ท้าย) · หน้า 24 |
| สมการพารามิเตอร์ $x = 3t + 1,\ y = 2t - 1$ · ระนาบ $5x + 3y - z + 1 = 0$ · เส้นตรง $L_1, L_2$ ใน 3 มิติ | เป็นเส้นหรือระนาบ · นอร์มัล · จุดอยู่บนระนาบไหม · ตัดกัน/ขนาน/ไขว้ · จุดตัด | หัวข้อ 10 · หน้า 30 |
| เมทริกซ์ **4×4–6×6** · ระบบ **4–6 ตัวแปร** · Cramer 4×4 · เส้น–เส้น / เส้น–ระนาบ / ระนาบ–ระนาบ | det (GE ก่อน) · เวกเตอร์คำตอบ $\bar{p} + s\bar{v}_1 + t\bar{v}_2$ · ตัด/ขนาน/ไขว้ · เส้นตัด | หัวข้อ 11 · หน้า 35 |
| ระบบ 3×3 มีตัวอักษร $a, b, c$ (โจทย์โบนัส) ถามเงื่อนไข | ค่า $a, b, c$ ที่ให้ เดียว / ไม่มี / อนันต์ | หัวข้อ 1 (ข้อ 6) + ภาคผนวก ข ข้อ 9 · หน้า 53 |
| โจทย์หน้าตาเหมือน Quiz 0–3 / ข้อสอบฝึกเป๊ะ ๆ | ลอกวิธี เปลี่ยนตัวเลข | ภาคผนวก ก หน้า 46 · ข หน้า 53 |
| จำสูตรไม่ได้ ต้องการสูตรทั้งหมดในหน้าเดียว | — | หน้าสุดท้าย · หน้า 62 |

**วิธีใช้ชีทนี้ใน 1 นาที**

**1)** ดูว่าโจทย์ "ให้อะไร" ตรงแถวไหนในตารางบน → เปิดหน้าที่บอก **2)** ทำตาม **ขั้นตอน (ก)** ทีละข้อ ห้ามข้าม จนถึงป้าย **หยุด** **3)** ก่อนเขียนคำตอบ อ่าน **กับดัก (ค)** ของหัวข้อนั้น 10 วินาที **4)** ข้อสอบ Problem 2–8 ต้อง "แสดงวิธีทำ" — ลอกโครงจากตัวอย่าง (ง) แล้วเปลี่ยนตัวเลข · **ตรวจกลับทุกครั้ง** ด้วยการแทนคำตอบลงสมการเดิม (ข้อสอบให้ 0 หรือติดลบถ้ามั่ว)

✓ = ตัวเลือกจริง · ✗ = เท็จ (มีเหตุผลหนึ่งบรรทัด) · กล่องฟ้า = สูตร · กล่องแดง = กับดัก · การ์ดขาว = ตัวอย่างทุกบรรทัด · AM = augmented matrix · GE/GJE = Gauss / Gauss–Jordan · H-system = ระบบเอกพันธ์ · ทุกตัวเลขคำนวณซ้ำด้วยโปรแกรม

# 1 ระบบ 2 สมการ 2 ตัวแปร: ใช้ $D$ แล้วแยก 3 กรณี

## (ก) ขั้นตอน — ทำตามนี้ทีละข้อ

**1** จัดระบบให้เป็นรูป $a_{11}x + a_{12}y = b_1$, $a_{21}x + a_{22}y = b_2$ (ย้าย $x$ ไว้หน้า $y$ ทั้งสองบรรทัด **เก็บเครื่องหมายลบไว้กับสัมประสิทธิ์** เช่น $ax - y = 1 \Rightarrow a_{12} = -1$)

**2** คำนวณ $D = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ (ทแยงหลัก ลบ ทแยงรอง)

**① จัดรูป กล่องสัมประสิทธิ์**

3 x −6 y = 1

8 x −16 y = 4

$a_{11}$ $a_{12}$ = แถวบน · $a_{21}$ $a_{22}$ = แถวล่าง

**② คูณไขว้: ทแยงหลัก ↘ ลบ ทแยงรอง ↗**

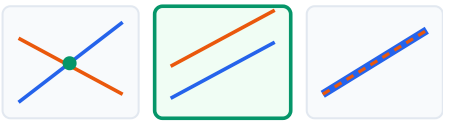
| 3 | −6 |
|---|---|
| 8 | −16 |

↘ ทแยงหลัก: 3·(−16) = −48

↗ ทแยงรอง: 8·(−6) = −48

**D = −48 − (−48) = 0**

**③ อ่านผล D**



D ≠ 0 เดียว (ตัด 1 จุด) | D = 0 ขนาน **ไม่มีคำตอบ** | D = 0 ทับกัน อนันต์

D = 0 ยังไม่จบ → แทน x = 0 เทียบ y (ขั้น 4–5)

รูป 1.1 · ตัวเลขจาก Quiz 1 ข้อ 5 ($3x - 6y = 1,\ 8x - 16y = 4$): ทแยงหลัก $3 \cdot (-16)$ ลบ ทแยงรอง $8 \cdot (-6)$ ได้ $D = 0 \Rightarrow$ ยังไม่จบ ต้องแยกขนาน (ไม่มี) กับทับกัน (อนันต์ เช่น Quiz 0 ข้อ 1) ในขั้น 4–5

**3** $D \neq 0 \Rightarrow$ **คำตอบเดียว** หยุด (ถ้าถามค่า: $x = \dfrac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{D}$, $y = \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{D}$)

**4** $D = 0 \Rightarrow$ **ยังไม่จบ** ต้องแยก "อนันต์" กับ "ไม่มี": แทน $x = 0$ ในสมการทั้งสอง ได้ $y = b_1/a_{12}$ และ $y = b_2/a_{22}$ (ถ้า $a_{12} = 0$ ให้แทน $y = 0$ แล้วเทียบ $x$ แทน)

**5** $y$ เท่ากัน ⇒ สองสมการคือเส้นเดียวกัน ⇒ **อนันต์** · $y$ ไม่เท่ากัน ⇒ ขนาน ⇒ **ไม่มีคำตอบ** หยุด

ทางเลือก: คูณสมการหนึ่งด้วยค่าคงที่ให้ซ้ายเท่ากับอีกสมการ แล้วดูว่าขวาเท่ากันไหม (เท่า = อนันต์, ไม่เท่า = ไม่มี)

**6** **มีพารามิเตอร์** $a, b$**:** $D$ เป็นพหุนามของ $a$ → แก้ $D = 0$ ได้ค่า $a$ "น่าสงสัย" (มักได้ $\pm$ สองค่า!) → แทน**ทีละค่า**กลับไปทำข้อ 4–5 · ค่า $a$ อื่น ๆ ⇒ คำตอบเดียว · ตอบเป็น 3 บรรทัด: **เดียวเมื่อ... / อนันต์เมื่อ... / ไม่มีเมื่อ...**

**7** **ระบบ 3×3 ที่มี** $a, b, c$ **(โบนัส):** ถ้าเป็นสามเหลี่ยม $\det$ = ผลคูณแนวทแยง → ค่า $a, b$ ที่ทำให้ $\det = 0$ คือค่าน่าสงสัย → แทนทีละค่าแล้วทำ GE (หัวข้อ 4) ดูว่าได้แถว $0 =$ ค่าคงที่ (ไม่มี) หรือ $0 = 0$ (อนันต์) — ตัวอย่างเต็มอยู่ภาคผนวก ข ข้อ 9

**สูตร**

$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ · $D \neq 0$: เดียว · $D = 0$: อนันต์หรือไม่มี (ต้องแทนจุดเช็ก) · ระบบเอกพันธ์ ($b_1 = b_2 = 0$): $D \neq 0 \Rightarrow$ มีแค่ $x = y = 0$ · $D = 0 \Rightarrow$ อนันต์ (ไม่มีทาง "ไม่มีคำตอบ")

เส้นสองเส้นใน 2 มิติ: $D \neq 0$ ตัดกัน 1 จุด · $D = 0$ ขนาน (ไม่มี) หรือทับกัน (อนันต์) · **"2 solutions" เป็นไปไม่ได้** — คำตอบมีแค่ 0, 1, ∞

**กับดักที่ข้อสอบชอบ**

- $D = 0$ **ไม่ใช่คำตอบ** — ต้องบอกต่อว่าอนันต์หรือไม่มี (Quiz 0 ข้อ 1 อนันต์, Quiz 1 ข้อ 5 ไม่มี — $D = 0$ ทั้งคู่)
- $D = a^2 + 1$ หรือ $a^2 + 6 \Rightarrow$ ไม่มีค่า $a$ จริงที่ทำให้เป็น 0 ⇒ **คำตอบเดียวทุก** $a$ · ตัวเลือก "Unique solution when $a = 6$" ถือว่า**ผิด** เพราะเงื่อนไข "เมื่อ" ทำให้ประโยคไม่จริง (เดียวทุก $a$ ไม่ใช่เฉพาะ 6) — เลือก "Unique solution" เฉย ๆ
- $D = a^2 - 9 = 0 \Rightarrow a = 3$ **และ** $a = -3$ — ตรวจทั้งสองค่า ตัวเลือกอาจมีแค่ค่าเดียว
- สลับลำดับ $a_{21}a_{12}$ ไม่ผิด แต่ห้ามเผลอทำ $a_{11}a_{21} - a_{12}a_{22}$ (คูณตามคอลัมน์ = ผิด)
- ตัวเลือก "The trivial solution $x = y = 0$" ใช้ได้เฉพาะระบบที่ขวาเป็น 0 ทั้งหมด — ถ้าขวามี 3, 6 อยู่ ตัวเลือกนี้ผิดทันที

## (ง) ตัวอย่างจากควิซ — ทุกบรรทัด

**Quiz 0 ข้อ 3:** $ax + 9y = 1,\ x + ay = 2$ **ไม่มีคำตอบเมื่อ** $a = ?$

$D = a \cdot a - 1 \cdot 9 = a^2 - 9 = 0 \Rightarrow a = 3$ หรือ $a = -3$

$a = 3$: แทน $x = 0$: สมการ 1 ⇒ $9y = 1, y = \frac{1}{9}$ · สมการ 2 ⇒ $3y = 2, y = \frac{2}{3}$ · ไม่เท่ากัน ⇒ **ไม่มีคำตอบ** (เช็กอีกทาง: สมการ 2 ×3 ⇒ $3x + 9y = 6$ ซ้ายเท่าสมการ 1 แต่ขวา $1 \neq 6$)

$a = -3$: $y = \frac{1}{9}$ กับ $y = \frac{2}{-3}$ ⇒ ไม่มีคำตอบเช่นกัน · $a = 4$: $D = 7$; $a = 1$: $D = -8$; $a = 2$: $D = -5$ ⇒ เดียว · **ตอบ** $a = 3$ (ตัวเลือกไม่มี $-3$)

**Quiz 1 ข้อ 5:** $3x - 6y = 1,\ 8x - 16y = 4$

$D = 3(-16) - 8(-6) = -48 + 48 = 0$ ⇒ ต้องเช็กต่อ

แทน $x = 0$: $-6y = 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{6}$ · $-16y = 4 \Rightarrow y = -\frac{4}{16} = -\frac{1}{4}$ · ไม่เท่ากัน ⇒ **ไม่มีคำตอบ**

เช็กอีกทาง: สมการ 1 × $\frac{8}{3} \Rightarrow 8x - 16y = \frac{8}{3} \neq 4 \Rightarrow$ ขัดกัน

**① คูณไขว้**

a → 9 (↘ a·a = a²)
1 → a (↗ 1·9 = 9)

**② D = a² − 9 = 0 ⇒ a = 3, −3**

**③ แทน a = 3, x = 0: y = 1/9 ≠ 2/3 ⇒ ไม่มี**

Quiz 0 ข้อ 3 — จุดตัดสิน: $D$ เป็นพหุนามของ $a$ ได้สองค่า ต้องแทนทีละค่า

**① คูณไขว้**

3 → −6 (↘ 3·(−16) = −48)
8 → −16 (↗ 8·(−6) = −48)

**② D = −48 − (−48) = 0**

**③ แทน x = 0: y = −1/6 ≠ −1/4 ⇒ ไม่มี**

Quiz 1 ข้อ 5 — จุดตัดสิน: $D = 0$ แล้วแทน $x = 0$ ได้ $y$ ไม่เท่ากัน ⇒ ขนาน

**Quiz 0 ข้อ 1:** $4x - 2y = 3,\ 8x - 4y = 6$

$D = 4(-4) - 8(-2) = -16 + 16 = 0$ · แทน $x = 0$:

$y = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$ และ $y = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2}$ เท่ากัน ⇒ **อนันต์**

(สมการ 1 ×2 = สมการ 2 ทั้งซ้ายและขวา)

**ข้อสอบฝึก โจทย์ 2:** $ax + y = b,\ x + ay = a$ **(มีพารามิเตอร์)**

$D = a \cdot a - 1 \cdot 1 = a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a = \pm 1 \cdot a \neq \pm 1$ **⇒ เดียว**

$a = 1$: $x + y = b$ และ $x + y = 1 \Rightarrow b = 1$ อนันต์, $b \neq 1$ ไม่มี

$a = -1$: $-x + y = b$ และ $x - y = -1$ (คูณ $-1$: $-x + y = 1$) $\Rightarrow b = 1$ อนันต์, $b \neq 1$ ไม่มี

**เดียว:** $a \neq \pm 1$ · **อนันต์:** $a = \pm 1, b = 1$ · **ไม่มี:** $a = \pm 1, b \neq 1$

**① คูณไขว้**

| | | |
|---|---|---|
| 4 ↘ | −2 | ↘ 4·(−4) = −16 |
| 8 ↗ | −4 | ↗ 8·(−2) = −16 |

**② D = −16 − (−16) = 0**

**③ แทน x = 0: y = −3/2 = −3/2 ⇒ อนันต์**

Quiz 0 ข้อ 1 — จุดตัดสิน: $D = 0$ และแทน $x = 0$ ได้ $y$ เท่ากัน ⇒ เส้นเดียวกัน

**① คูณไขว้**

| | | |
|---|---|---|
| a ↘ | 1 | ↘ a·a = a² |
| 1 ↗ | a | ↗ 1·1 = 1 |

**② D = a² − 1 = 0 ⇒ a = ±1**

**③ a = 1: x + y = b กับ x + y = 1 ⇒ b = 1 อนันต์, b ≠ 1 ไม่มี**

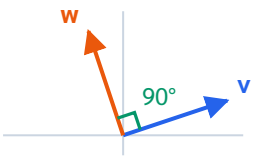
ข้อสอบฝึก โจทย์ 2 — จุดตัดสิน: ค่าน่าสงสัย $a = \pm 1$ แล้วเทียบ $b$

# 2 เวกเตอร์: ผลคูณจุด ความยาว มุม ตั้งฉาก

## (ก) ขั้นตอน

**1** เขียนเวกเตอร์ทุกตัวเป็นช่อง ๆ $u = (u_1, u_2, u_3)$ (มี 2 หรือ 3 ช่องตามโจทย์)

**2** ต้องการ "ตั้งฉาก / orthogonal / perpendicular" ⇒ คำนวณ $u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$ **ทุกคู่ที่ตัวเลือกถาม** · คู่ที่ได้ 0 คือคู่ตั้งฉาก หยุด



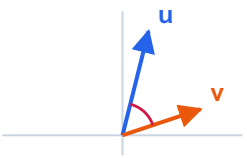

**① dot ทุกคู่ที่ตัวเลือกถาม**

v = (3, 1), w = (−1, 3)

v·w = 3·(−1) + 1·3

= −3 + 3 = 0

**= 0 ⇒ ตั้งฉาก ✓**




**② คู่ที่ไม่ได้ 0**

u = (1, 4), v = (3, 1)

u·v = 1·3 + 4·1

= 3 + 4 = 7

**≠ 0 ⇒ ไม่ตั้งฉาก ✗**

รูป 2.1 · Quiz 0 ข้อ 5: $v \cdot w = 0 \Rightarrow$ ตั้งฉาก (มุมฉากที่จุดกำเนิด) · $u \cdot v = 7 \neq 0 \Rightarrow$ ไม่ตั้งฉาก — ตั้งฉากตัดสินด้วย dot เป็นศูนย์เท่านั้น

**3** ต้องการ "ความยาว / norm $\|u\|$" ⇒ $\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$ (ถอดรากด้วย เทียบตัวเลือกก่อนถอดก็ได้: $\|u\| = \|v\| \iff u \cdot u = v \cdot v$)

**4** ต้องการ "มุม" ⇒ $\cos\alpha = \dfrac{u \cdot v}{\|u\|\,\|v\|}$ แล้ว $\alpha = \arccos(\dots)$ (เครื่องคิดเลข)

**① จับคู่ช่องเดียวกัน แล้วคูณ**

u v

1 × 3 = 3

4 × 1 = 4

3 + 4 = **7**

**u·v = 7 (ตัวเลขตัวเดียว)**

**② ||u||² = u·u จับคู่กับตัวเอง**

u u

1 × 1 = 1

4 × 4 = 16

1 + 16 = **17**

**||u|| = √17 = √17**

**③ มุม α**

dot จากขั้น ① ↓

$\cos\alpha = \dfrac{\mathbf{u\cdot v = 7}}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{10}}$

↑ ||u|| ||v|| จากขั้น ②

**α = arccos(7/√170)**

กด arccos บนเครื่องคิดเลข

รูป 2.2 · $u = (1, 4),\ v = (3, 1)$ จาก Quiz 0 ข้อ 5: ① คูณคู่ช่องเดียวกันแล้วบวก = dot · ② จับ $u$ กับตัวเองได้ $\|u\|^2$ (และ $\|v\|^2 = 9 + 1 = 10$) · ③ มุมคือ dot หารด้วยความยาวคูณกัน

**5** ต้องการ "ระยะระหว่าง $u, v$" ⇒ ลบทีละช่องก่อน $u - v$ แล้วหาความยาว

**6** ต้องการ "เวกเตอร์ตั้งฉากกับ $(a, b)$" ⇒ ใช้ $(-b, a)$ หรือ $(b, -a)$ · ต้องการ unit vector ⇒ หารด้วยความยาวของมัน (ได้ 2 ตัว: $\pm$)

**7** ต้องการ "$v + w = u$?" ⇒ บวกทีละช่องแล้วเทียบทุกช่อง

**สูตร**

$u \cdot v = \sum u_i v_i$ (**ได้ตัวเลข**) · $\|u\| = \sqrt{u \cdot u}$ · $d(u, v) = \|u - v\|$ · $u \cdot v = \|u\|\|v\| \cos\alpha$ · $u \perp v \iff u \cdot v = 0$ · $\alpha u = (\alpha u_1, \alpha u_2, \dots)$ · ใน 3 มิติ: $u \times v = (u_2v_3 - u_3v_2,\ u_3v_1 - u_1v_3,\ u_1v_2 - u_2v_1)$ ตั้งฉากกับทั้ง $u, v$ (ใช้หานอร์มัลระนาบ หัวข้อ 10)

**กับดักที่ข้อสอบชอบ**

- $u \cdot v$ เป็นตัวเลขตัวเดียว ไม่ใช่เวกเตอร์ · ตั้งฉาก = dot เป็น 0 **ไม่ใช่** "ความยาวเท่ากัน" หรือ "บวกกันได้ศูนย์"
- ต้องเช็กทุกคู่: โจทย์ให้ $u, v, w$ สามตัว ตัวเลือกถาม $u \cdot v, u \cdot w, v \cdot w$ คนละคู่ — คู่เดียวที่เป็น 0 คือคำตอบ
- เปรียบเทียบความยาวโดยไม่ถอดราก: $\|u\|^2 = 17$, $\|v\|^2 = 10$ ไม่เท่า ⇒ ความยาวไม่เท่า
- เครื่องหมายลบใน $(-1, 3)$: $u \cdot w = 1(-1) + 4(3) = -1 + 12 = 11$ ไม่ใช่ 13

## (ง) ตัวอย่างจากควิซ

**Quiz 0 ข้อ 5:** $u = (1, 4),\ w = (-1, 3),\ v = (3, 1)$ **— ข้อความไหนจริง (ตัวเลือก:** $u \perp v$ · $u \perp w$ · $v \perp w$ · $\|u\| = \|v\|$ · $v + w = u$**)**

$u \cdot v = 1 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 3 + 4 = 7 \neq 0$ ✗ · $u \cdot w = 1(-1) + 4 \cdot 3 = -1 + 12 = 11 \neq 0$ ✗ · $v \cdot w = 3(-1) + 1 \cdot 3 = -3 + 3 = 0$ ✓

$\|u\|^2 = 1 + 16 = 17$, $\|v\|^2 = 9 + 1 = 10$ ⇒ ไม่เท่า ✗ · $v + w = (3 - 1,\ 1 + 3) = (2, 4) \neq (1, 4)$ ✗ ·

**ตอบ $v \cdot w = 0$ ($v \perp w$)**

ถ้าถามมุมระหว่าง $u, v$: $\cos\alpha = \dfrac{7}{\sqrt{17}\sqrt{10}} = \dfrac{7}{\sqrt{170}}$ แล้วกด $\arccos$ · ระยะ $d(u, v) = \|(1 - 3, 4 - 1)\| = \|(-2, 3)\| = \sqrt{13}$

**① จับคู่ช่องเดียวกัน แล้วคูณ**

| u | | w | |
|---|---|---|---|
| 1 | × | −1 | = −1 |
| 4 | × | 3 | = 12 |

(−1) + 12 = **11**

**u·w = 11 (ตัวเลขตัวเดียว)**

**② จับคู่ช่องเดียวกัน แล้วคูณ**

| v | | w | |
|---|---|---|---|
| 3 | × | −1 | = −3 |
| 1 | × | 3 | = 3 |

(−3) + 3 = **0**

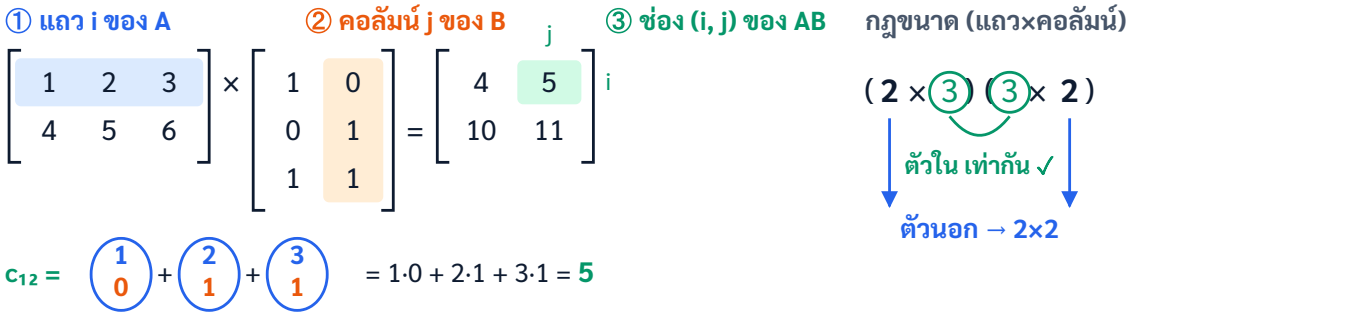
**v·w = 0 (ตัวเลขตัวเดียว)**

Quiz 0 ข้อ 5 — จุดตัดสิน: $u \cdot w = -1 + 12 = 11$ (ไม่ใช่ 13 — เครื่องหมายลบติดมากับช่องแรก) · $v \cdot w = -3 + 3 = 0$ คู่เดียวที่เป็นศูนย์ ⇒ ตอบ $v \perp w$

# 3 คูณเมทริกซ์: คูณได้ไหม และผลลัพธ์ขนาดเท่าไร

## (ก) ขั้นตอน

1. เขียนขนาดเป็น **แถว × คอลัมน์**: $A$ เป็น $m \times n$, $B$ เป็น $p \times q$ ("3 columns and 2 rows" = $2 \times 3$)
2. $AB$ คูณได้ ก็ต่อเมื่อ $n = p$ (จำนวนคอลัมน์ของตัวหน้า = จำนวนแถวของตัวหลัง — "ตัวใน" ต้องเท่า)
3. ไม่เท่า ⇒ ตอบ "not compatible under multiplication, $C$ does not exist" **หยุด**
4. เท่า ⇒ $C = AB$ ขนาด $m \times q$ ("ตัวนอก") **หยุด** ถ้าถามแค่ขนาด
5. ถ้าต้องคูณจริง: ช่อง $c_{ij}$ = (แถว $i$ ของ $A$) · (คอลัมน์ $j$ ของ $B$) ผลคูณจุด — ทำทีละช่อง เขียนผลบวกทุกพจน์




รูป 3.1 · ตัวเลขจากตัวอย่าง (ง): แถว 1 ของ $A$ (ฟ้า) จับคู่กับคอลัมน์ 2 ของ $B$ (ส้ม) ทีละช่อง คูณแล้วบวก ได้ช่อง $(1,2)$ ของ $AB$ = 5 (เขียว) · กฎขนาด: ตัวใน $3 = 3$ คูณได้ ตัวนอกให้ $2 \times 2$

**สูตร / กฎที่ใช้บ่อย**

$(m \times n)(n \times q) = m \times q$ · $A + B$ ต้องขนาดเท่ากัน บวกทีละช่อง · $kA$ คูณทุกช่อง · $(AB)C = A(BC)$ · $A(B + C) = AB + AC$ · $AI = IA = A$ · $AB \neq BA$ **โดยทั่วไป** · **ตัดออกไม่ได้**: $AB = AC$ ไม่ได้แปลว่า $B = C$ · $(AB)^T = B^T A^T$ · $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ · $\det(AB) = \det A \det B$ · ระบบ $Ax = b$: $A$ คือ $m \times n$, $x$ คือ $n \times 1$, $b$ คือ $m \times 1$

**กับดักที่ข้อสอบชอบ**

- $A$ เป็น $2 \times 2$, $B$ เป็น $3 \times 2$: $AB$ **คูณไม่ได้** ($2 \neq 3$) แม้ว่า $BA$ จะคูณได้ ($3 \times 2 \cdot 2 \times 2 = 3 \times 2$) — โจทย์ถาม $C = AB$ ก็ตอบตาม $AB$
- ตัวเลือกล่อ "$C$ has 2 rows and 3 columns" มาจากการเอา $2 \times 2$ กับ $\times 3$ มาชนกันผิดตัว — ให้เช็ก "ตัวใน" ก่อนเสมอ
- ห้ามใช้กฎตัดออก/สลับที่: $AB = BA$ ผิด, $AB = AC \Rightarrow B = C$ ผิด

## (ง) ตัวอย่าง

**Quiz 1 ข้อ 4: $A$ มี 2 แถว 2 หลัก, $B$ มี 3 แถว 2 หลัก, $C = AB$?**

คอลัมน์ของ $A$ = 2 · แถวของ $B$ = 3 · $2 \neq 3 \Rightarrow$

**คูณไม่ได้ — $C$ does not exist**

(ถ้า $B$ เป็น $2 \times 3$ จึงจะได้ $C$ ขนาด $2 \times 3$)

**① เขียนขนาด แถว×คอลัมน์ แล้วเทียบตัวใน**

( **2** × 2 ) ( 3 × **2** )

ตัวใน ไม่เท่า ✗

Quiz 1 ข้อ 4 — จุดตัดสิน: $A$ เป็น $2 \times 2$, $B$ เป็น $3 \times 2$ ตัวใน $2 \neq 3 \Rightarrow$ $C = AB$ ไม่มี

**คูณจริง** $(2 \times 3)(3 \times 2) = 2 \times 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot1+2\cdot0+3\cdot1 & 1\cdot0+2\cdot1+3\cdot1 \\ 4\cdot1+5\cdot0+6\cdot1 & 4\cdot0+5\cdot1+6\cdot1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 10 & 11 \end{bmatrix}$$

j (บน 4, 5) · i (ข้าง 10, 11)

$c_{21} = \begin{matrix}4\\1\end{matrix} + \begin{matrix}5\\0\end{matrix} + \begin{matrix}6\\1\end{matrix}$ = 4·1 + 5·0 + 6·1 = **10**

คูณจริง — ช่อง $(2,1)$: แถว 2 ของ $A$ กับคอลัมน์ 1 ของ $B \Rightarrow 4+0+6=10$

# 4 Augmented matrix + Gauss elimination: 3 ผลลัพธ์ และการเขียนคำตอบเป็นเวกเตอร์

## (ก) ขั้นตอน

**1** เขียน augmented matrix $(A \mid b)$: แถวละสมการ คอลัมน์ละตัวแปรเรียง $x_1, x_2, x_3$ — **ตัวแปรที่หายไปใส่ 0** (เช่น $2x_2 + 3x_3 = 4 \Rightarrow$ แถว $0\ 2\ 3 \mid 4$)

**2** ทำใต้ช่องแรกของแถว 1 ให้เป็น 0: $R_i \leftarrow R_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} R_1$ (ถ้า $a_{11} = 0$ สลับแถวก่อน) — **เขียนป้าย op ทุกครั้ง** ข้อสอบให้คะแนนวิธีทำ

① ก่อน

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 3 & 8 \\ 6 & -12 & 9 & 12 \end{array}\right]$$

② ทำทีละแถว (ป้าย op ทุกครั้ง)

$R_2 \to R_2 - 3R_1$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $R_2$: | 6 | −12 | 9 | 12 |
| $-3 \cdot R_1$: | 6 | −12 | 9 | 24 |
| = $R_2$ ใหม่: | 0 | 0 | 0 | −12 |

③ หลัง

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{array}\right]$$

④ แถวใหม่ 0 0 0 | −12 อ่านว่า 0 = −12 ⇒ ไม่มีคำตอบ

รูป 4.1 · Quiz 2 ข้อ 1: $R_2 \to R_2 - 3R_1$ — เขียนแถวเงา $3 \cdot R_1$ (เทา) ใต้ $R_2$ แล้วลบทีละช่อง แถวใหม่ (เขียว) วางแทนที่ $R_2$ · แถว 1 ไม่เปลี่ยน

**3** ทำซ้ำกับคอลัมน์ถัดไป ใช้แถวถัดไปเป็นแถวหลัก (ทำเฉพาะแถวที่อยู่ล่างกว่า) จนได้รูปขั้นบันได

**4** ทุกครั้งที่ได้แถวใหม่ ดูซ้ายมือ: **ซ้าย 0 หมด ขวา** $\neq 0$ $(0 = -12) \Rightarrow$ **ไม่มีคำตอบ** หยุด · ซ้าย 0 ขวา 0 ⇒ ทิ้งแถวนั้น (สมการหายไป 1)

① แถว 0 0 0 | c (c ≠ 0)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & c \end{array}\right]$$

0 = c ขัดกัน ⇒ ไม่มีคำตอบ

② แถว 0 0 0 | 0

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

สมการหาย 1 ⇒ ตัวแปรอิสระ ⇒ อนันต์

③ ขั้นบันไดเต็ม (pivot ครบ)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{array}\right]$$

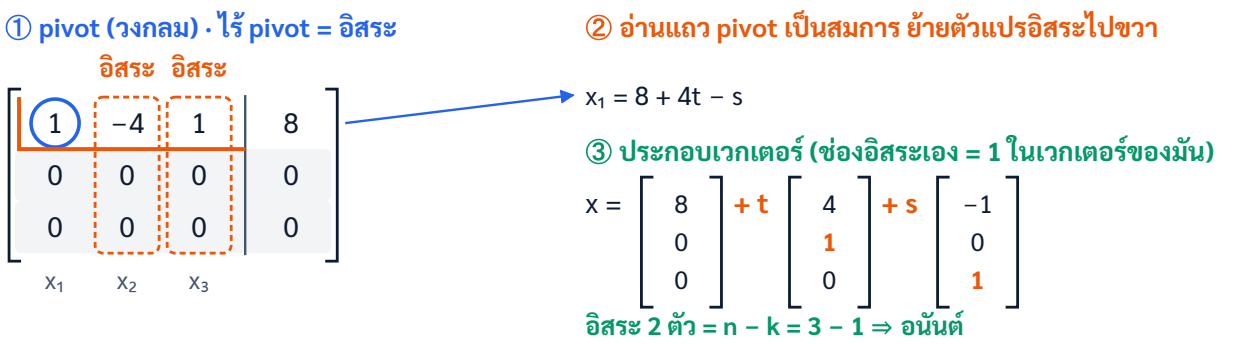
แทนย้อนกลับ ⇒ คำตอบเดียว

รูป 4.2 · สามหน้าตาหลัง GE (ทิ้งแถว 0 = 0 แล้ว): ดูแถวล่างสุดก่อนเสมอ — ซ้ายศูนย์หมดแต่ขวาไม่ศูนย์ = ขัดกัน · ซ้ายขวาศูนย์หมด = สมการหาย · pivot ครบ = เดียว

**5** นับ $k$ = จำนวนแถวที่เหลือ (ไม่ใช่ศูนย์) และ $n$ = จำนวนตัวแปร · $k = n \Rightarrow$ **คำตอบเดียว**: แทนย้อนกลับจากแถวล่างขึ้นบน หยุด

**6** $k < n \Rightarrow$ **อนันต์ มี** $n - k$ **ตัวแปรอิสระ** · ตัวแปรอิสระ = ตัวแปรของ**คอลัมน์ที่ไม่มี pivot** (pivot = ตัวแรกที่ไม่ใช่ 0 ของแต่ละแถว) — ตั้งชื่อ $x_2 = t,\ x_3 = s$ ย้ายไปขวา

**7** แก้ตัวแปร pivot ย้อนขึ้นบน แล้วเขียนเวกเตอร์ **แยกส่วน**: $x = \underbrace{(\ldots)}_{\text{ค่าคงที่}} + t\ \underbrace{(\ldots)}_{\text{สัมประสิทธิ์ของ } t} + s(\ldots)$ (ช่องของตัวแปรอิสระเองใส่ 1 ในเวกเตอร์ของมัน, 0 ในเวกเตอร์อื่น)




รูป 4.3 · Quiz 2 ข้อ 5 หลัง GE: pivot มีแค่คอลัมน์ 1 ⇒ $x_2 = t,\ x_3 = s$ อิสระ · แถว pivot อ่านเป็น $x_1 = 8 + 4t - s$ · ประกอบเวกเตอร์: ส่วนค่าคงที่ + $t$(สัมประสิทธิ์ของ $t$) + $s$(...) ช่องของตัวแปรอิสระเองเป็น 1

**8** ตรวจ: แทนส่วนค่าคงที่ในสมการเดิมต้องได้ $b$ ทุกแถว · แทนเวกเตอร์ของ $t$ (และ $s$) ต้องได้ 0 ทุกแถว · ตัวเลือกที่ถูกต้องมี **จำนวนพารามิเตอร์** $= n - k$ และ **เวกเตอร์ยาว** $n$ **ช่อง**

**3 ผลลัพธ์ของ GE (สรุปจากชีท)**

| หน้าตาหลัง GE (ทิ้งแถว 0 หมดแล้ว) | ผล | ต่อยังไง |
|---|---|---|
| เกิดแถว $0\ 0\ 0 \mid c$ กับ $c \neq 0$ | **ไม่มีคำตอบ** (inconsistent) | จบ ตอบ "no solutions" |
| สามเหลี่ยม: แถวเท่าตัวแปร ($k = n$), ทแยงไม่มี 0 | **คำตอบเดียว** | แทนย้อนกลับ |
| แถวน้อยกว่าตัวแปร ($k < n$) ไม่มีแถวขัดกัน | **อนันต์**, $n - k$ ตัวแปรอิสระ | ตัวแปรคอลัมน์ไร้ pivot เป็น $t, s$ แล้วแทนย้อนกลับ |

จำนวนสมการ $m$ กับตัวแปร $n$ บอกอะไรได้บ้าง: $m < n$ ⇒ **ไม่มีทางคำตอบเดียว** (อนันต์หรือไม่มี) · $m \geq n$ ⇒ เป็นได้ทั้ง 3 แบบ · จำนวนคำตอบมีแค่ $0, 1, \infty$

**กับดักที่ข้อสอบชอบ**

- ตัวเลือกเวกเตอร์ **2 ช่อง** ทั้งที่ระบบมี 3 ตัวแปร (เช่น $x = \binom{0}{1}x_2 + \binom{1}{1}$) ⇒ ผิดทันทีไม่ต้องคิด · ตัวเลือกที่**ไม่มีส่วนค่าคงที่**ทั้งที่ $b \neq 0$ (เช่น $x = (1,0,1)x_1 + (2,1,0)x_2$) ⇒ ผิด (แทน $x_1 = x_2 = 0$ ได้ $0 \neq b$)
- สองแถวสัดส่วนกันทางซ้าย ($6, -12, 9 = 3 \times (2, -4, 3)$) ⇒ ดูขวา: $12 \neq 3 \times 8 = 24$ ⇒ ไม่มีคำตอบ · ถ้าขวาเป็นสัดส่วนเดียวกัน ⇒ แถวหาย ⇒ อนันต์
- แถว $0 = 0$ **ไม่ใช่** "ไม่มีคำตอบ" — มันคือสมการที่หายไป ⇒ ตัวแปรอิสระเพิ่ม
- ตัวแปรอิสระ**เลือกตามใจไม่ได้**: ตัวแปรที่แถวขั้นบันไดกำหนดค่าไว้แล้ว (เช่น $x_3 = 0$ จากแถว $0\ 0\ -2 \mid 0$) เป็นอิสระไม่ได้ (ชีท สัปดาห์ 2 ตัวอย่าง 9)
- จำนวนตัวแปรอิสระ = $n - k$ ไม่ใช่ "จำนวนแถวศูนย์" ตรง ๆ (ต้องนับ pivot ในระบบที่ไม่จัตุรัสด้วย) · "3 สมการ 2 ตัวแปร" ก็อาจมี**คำตอบเดียว**ได้ (Quiz 2 ข้อ 2)
- ตัวเลือกสูตร $x_1 = 1 + 4x_3 + 4x_2$ ที่ให้ค่าไม่ตรงคำตอบจริง ($9 \neq 3$) — ตรวจโดยแทนค่ากลับเสมอ

## (ง) ตัวอย่างจากควิซ — ทุกบรรทัด

**Quiz 2 ข้อ 1:** $2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 8,\ 6x_1 - 12x_2 + 9x_3 = 12$ → **ไม่มีคำตอบ**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 3 & 8 \\ 6 & -12 & 9 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{array}\right) \Rightarrow \text{แถวล่างอ่านว่า } 0 = -12 \text{ ขัดกัน} \Rightarrow$$

**ไม่มีคำตอบ**

$(6 - 3\cdot 2 = 0,\ -12 - 3(-4) = 0,\ 9 - 3\cdot 3 = 0,\ 12 - 3\cdot 8 = -12)$ · ตัวเลือกอื่น: $x = (4,1,0)x_2 + (-1,0,1)x_3 + (8,0,0)$ ✗ แทน $(8,0,0)$ ได้ $(16,48) \neq (8,12)$ · เวกเตอร์ 2 ช่อง ✗ · ไม่มีส่วนค่าคงที่ ✗

**① pivot (วงกลม) · ไร้ pivot = อิสระ**

| | | | |
|---|---|---|---|
| (2) | −4 | 3 | 8 |
| 0 | 0 | 0 | −12 |
| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | |

**แถวสีแดง: 0 = −12 ขัดกัน ⇒ ไม่มีคำตอบ**

Quiz 2 ข้อ 1 — จุดตัดสิน: หลัง $R_2 \to R_2 - 3R_1$ แถวล่างซ้ายเป็นศูนย์หมดแต่ขวาเป็น $-12$ ⇒ ขัดกัน

**Quiz 2 ข้อ 5:** $x_1 - 4x_2 + x_3 = 8,\ 3x_1 - 12x_2 + 3x_3 = 24,\ 2x_1 - 8x_2 + 2x_3 = 16$ → **อนันต์ 2 ตัวแปรอิสระ**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 8 \\ 3 & -12 & 3 & 24 \\ 2 & -8 & 2 & 16 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2 \leftarrow R_2 - 3R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow k = 1,\ n = 3 \Rightarrow \text{อิสระ } 3 - 1 = 2 \text{ ตัว}$$

pivot อยู่คอลัมน์ 1 เท่านั้น ⇒ $x_2 = t,\ x_3 = s$ อิสระ · $x_1 = 8 + 4t - s$ · $x = \begin{pmatrix} 8 + 4t - s \\ t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ **ตัวเลือก 2**

ตรวจ: $A(8,0,0) = (8,24,16)$ ✓ · $A(4,1,0) = (4-4, 12-12, 8-8) = (0,0,0)$ ✓ · $A(-1,0,1) = (0,0,0)$ ✓ · พารามิเตอร์ 2 ตัว = $n - k$ ✓

**① ก่อน**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | −4 | 1 | 8 |
| 3 | −12 | 3 | 24 |
| 2 | −8 | 2 | 16 |

**② ทำทีละแถว (ป้าย op ทุกครั้ง)**

**$R_2 \to R_2 - 3R_1$**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $R_2$: 3 | −12 | 3 | 24 |
| − 3·$R_1$: 3 | −12 | 3 | 24 |
| = $R_2$ ใหม่: 0 | 0 | 0 | 0 |

**$R_3 \to R_3 - 2R_1$**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $R_3$: 2 | −8 | 2 | 16 |
| − 2·$R_1$: 2 | −8 | 2 | 16 |
| = $R_3$ ใหม่: 0 | 0 | 0 | 0 |

**③ หลัง**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | −4 | 1 | 8 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |

**④ เหลือแถวไม่ศูนย์ k = 1 จาก n = 3 ตัวแปร ⇒ อิสระ 2 ตัว (ดูรูป 4.3)**

Quiz 2 ข้อ 5 — จุดตัดสิน: แถว 2 และ 3 เป็น 3 เท่าและ 2 เท่าของแถว 1 ทั้งซ้ายและขวา ⇒ ลบแล้วเป็นศูนย์ทั้งแถว (สมการหาย 2)

**Quiz 3 ข้อ 2:** $2x_2+3x_3=4,\ x_1+3x_3=3,\ 2x_1+4x_3=6$ → **เดียว** $(3,2,0)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0&2&3&4\\1&0&3&3\\2&0&4&6\end{array}\right)\quad R_3\leftarrow R_3-2R_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0&2&3&4\\1&0&3&3\\0&0&-2&0\end{array}\right)$$

แถว 3: $-2x_3=0\Rightarrow x_3=0$ · แถว 2: $x_1=3-3(0)=3$ · แถว 1: $2x_2=4-3(0)\Rightarrow x_2=2$ · 3 pivot = 3 ตัวแปร ⇒ $x=(3,2,0)$ **เดียว** · ตรวจ: $2(2)+0=4$ ✓ $3+0=3$ ✓ $6+0=6$ ✓ · สูตรล่อ $x_1=1+4x_3+4x_2=1+0+8=9\neq 3$ ✗

**Quiz 2 ข้อ 2:** $3x_1-2x_2=5,\ 2x_1-4x_2=-2,\ 4x_1-4x_2=4$ **(3 สมการ 2 ตัวแปร)**

$$\left(\begin{array}{cc|c}3&-2&5\\2&-4&-2\\4&-4&4\end{array}\right)\quad R_3\leftarrow R_3-R_2$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}3&-2&5\\2&-4&-2\\2&0&6\end{array}\right)$$

แถว 3: $2x_1=6\Rightarrow x_1=3$ · แถว 2: $-4x_2=-2-2(3)=-8\Rightarrow x_2=2$ · ตรวจแถว 1: $9-4=5$ ✓ ⇒ $x=(3,2)$ **เดียว** · $(2,1)$: $6-2=4\neq 5$ ✗

Quiz 1 ข้อ 3 (สามเหลี่ยมให้มาแล้ว): $x_3=3\Rightarrow x_2=2-3=-1\Rightarrow x_1=1-(-1)-2(3)=-4\Rightarrow(-4,-1,3)$ เดียว

**① ก่อน**

$$\left[\begin{array}{ccc|c}0&2&3&4\\1&0&3&3\\2&0&4&6\end{array}\right]$$

**② ทำทีละแถว (ป้าย op ทุกครั้ง)**

**$R_3 \to R_3 - 2R_2$**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $R_3$: | 2 | 0 | 4 \| 6 |
| $-2\cdot R_2$: | 2 | 0 | 6 \| 6 |
| **= $R_3$ ใหม่:** | **0** | **0** | **−2 \| 0** |

**③ หลัง**

$$\left[\begin{array}{ccc|c}0&2&3&4\\1&0&3&3\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{-2}&\mathbf{0}\end{array}\right]$$

**④ แถว 3 ใหม่: $-2x_3=0\Rightarrow x_3=0$ แล้วแทนย้อนขึ้น: $x_1=3, x_2=2$**

Quiz 3 ข้อ 2 — จุดตัดสิน: $R_3\to R_3-2R_2$ ทำให้ช่องแรกของแถว 3 เป็น 0 เหลือ $-2x_3=0$ · pivot ครบ 3 ตัวแปร ⇒ เดียว $(3,2,0)$

**① ก่อน**

$$\left[\begin{array}{cc|c}3&-2&5\\2&-4&-2\\4&-4&4\end{array}\right]$$

**② ทำทีละแถว (ป้าย op ทุกครั้ง)**

**$R_3 \to R_3 - R_2$**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $R_3$: | 4 | −4 | 4 |
| $-1\cdot R_2$: | 2 | −4 | −2 |
| **= $R_3$ ใหม่:** | **2** | **0** | **6** |

**③ หลัง**

$$\left[\begin{array}{cc|c}3&-2&5\\2&-4&-2\\\mathbf{2}&\mathbf{0}&\mathbf{6}\end{array}\right]$$

**④ แถว 3 ใหม่: $2x_1=6\Rightarrow x_1=3$ · แถว 2: $-4x_2=-2-6\Rightarrow x_2=2$ · แถว 1 ตรวจ $9-4=5$ ✓**

Quiz 2 ข้อ 2 — จุดตัดสิน: 3 สมการ 2 ตัวแปร ก็มีคำตอบเดียวได้ เมื่อ $R_3-R_2$ ให้ $2x_1=6$ และแถว 1 ไม่ขัดกัน

# 5 Gauss–Jordan: ทำต่อจาก GE จนเหลือ 1 ตัวเดียวในคอลัมน์ pivot

## (ก) ขั้นตอน

**1** เขียน $(A \mid b)$ แล้วทำ GE ไปข้างหน้าเหมือนหัวข้อ 4 จนเป็นขั้นบันได (ใต้ pivot เป็น 0 หมด) — ถ้าเจอแถว $0 \mid c \neq 0$ ⇒ ไม่มีคำตอบ **หยุด**

**2** ทำ pivot ทุกตัวให้เป็น **1**: หารทั้งแถวด้วยค่า pivot (หารด้วยเลขลบ ⇒ ทุกช่องเปลี่ยนเครื่องหมาย รวมช่องขวา)




รูป 5.1 · ข้อสอบฝึก 5.2 ขั้นทำ pivot ให้เป็น 1: หารแถว 2 ด้วย $-2$ (คูณ $-\frac{1}{2}$) ทุกช่องเปลี่ยนเครื่องหมาย รวมช่องขวา (ที่นี่ขวาเป็น 0 จึงยัง 0)

**3** กำจัด**เหนือ** pivot ด้วย: ไล่จากคอลัมน์ pivot ขวาสุดไปซ้าย $R_i \leftarrow R_i - (\text{ค่าในช่อง})\, R_{\text{pivot}}$ สำหรับแถวที่อยู่**บน**

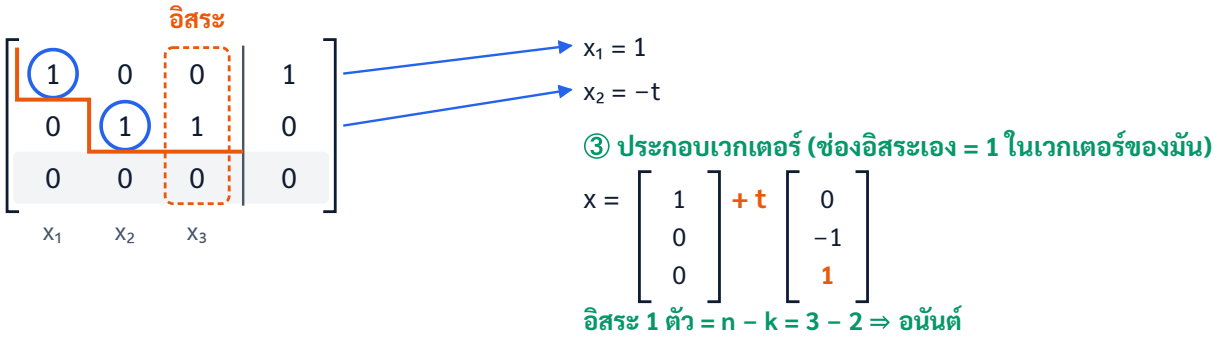



รูป 5.2 · ข้อสอบฝึก 5.2 ขั้นกำจัดเหนือ pivot: ช่อง (1,2) มีค่า 1 จึงทำ $R_1 \to R_1 - 1 \cdot R_2$ — คอลัมน์ 2 เหลือ 1 ตัวเดียว ส่วนคอลัมน์ 3 (ไร้ pivot) ก็เปลี่ยนตามไปด้วย

**4** จบเมื่อทุกคอลัมน์ pivot มี 1 ตัวเดียว ที่เหลือเป็น 0 (RREF) — ตัดแถว $0 = 0$ ทิ้ง

**5** อ่านคำตอบ: ได้ $I$ ทางซ้าย ⇒ **คำตอบ = คอลัมน์ขวา** **หยุด**

**6** มีคอลัมน์ไม่มี pivot ⇒ ตัวแปรนั้นอิสระ $= t$ · อ่าน**ทั้งแถว**: แถว $0\ 1\ 1 \mid 0$ คือ $x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -t$ (ไม่ใช่ $x_2 = 0$!) ⇒ เขียนเวกเตอร์ ค่าคงที่ $+ t(\ldots)$ · ตรวจโดยแทน $t$ สักค่า **หยุด**




รูป 5.3 · RREF ของข้อสอบฝึก 5.2: คอลัมน์ 3 ไร้ pivot ⇒ $x_3 = t$ · แถว 2 อ่านทั้งแถว $x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -t$ (ไม่ใช่ 0) · เวกเตอร์ = ค่าคงที่ $(1,0,0) + t(0,-1,1)$

**สรุป 3 ผลลัพธ์ของ GJE (ชีท สัปดาห์ 2)**

ซ้ายเป็นเมทริกซ์**ทแยง/หน่วย** ⇒ เดียว อ่านจากคอลัมน์ขวา · ซ้าย**ไม่ทแยง/ไม่จัตุรัส** (มีคอลัมน์ไร้ pivot) ⇒ อนันต์ ย้ายตัวแปรอิสระไปขวา · เกิดแถว $0 = c \neq 0$ ⇒ ไม่มีคำตอบ · GJE ยังใช้หา $A^{-1}$ ด้วย $(A \mid I) \to (I \mid A^{-1})$ (หัวข้อ 7)

**กับดักที่ข้อสอบชอบ**

- โจทย์สั่ง "Use Gauss **Jordan**" แล้วหยุดแค่ขั้นบันได (GE) = ทำไม่ครบ — ต้องกำจัดเหนือ pivot และทำ pivot เป็น 1 ด้วย
- เฉลยเป็นเวกเตอร์ต้องแยก "ส่วนคงที่" กับ "ส่วน $x_3$": $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ — ช่องของ $x_3$ เองในเวกเตอร์ทิศคือ $+1$
- ตัวเลือกล่อ $(0,1,1)x_3 + (1,0,0)$ (เครื่องหมายผิด): แทน $x_3 = 1$ ได้ $(1,1,1) \to 1 - 1 - 1 = -1 \neq 1$ ✗ · ตัวเลือกไม่มีส่วนคงที่ $(0,-1,1)x_3$: แทน $x_3 = 0$ ได้ $x_1 = 0 \neq 1$ ✗

## (ง) ตัวอย่างจากข้อสอบฝึก 5.2 — ทุกบรรทัด

$x_1 + x_2 + x_3 = 1,\ x_1 - x_2 - x_3 = 1,\ x_1 = 1$ **(Use Gauss Jordan)**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{R_2 \leftarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2/(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

pivot ที่คอลัมน์ 1, 2 · คอลัมน์ 3 ไม่มี ⇒ $x_3 = t$ อิสระ

แถว 1: $x_1 = 1$ · แถว 2: $x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -t$ · $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ · ตรวจ $x_3 = 2$: $(1, -2, 2)$:

$1 - 2 + 2 = 1$ ✓, $1 + 2 - 2 = 1$ ✓, $x_1 = 1$ ✓ · $n - k = 3 - 2 = 1$ ตัวแปรอิสระ ✓

① ก่อน

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

② ทำทีละแถว (ป้าย op ทุกครั้ง)

$R_2 \to R_2 - R_1$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $R_2$: | 1 | −1 | −1 | 1 |
| − 1·$R_1$: | 1 | 1 | 1 | 1 |
| = $R_2$ ใหม่: | 0 | −2 | −2 | 0 |

$R_3 \to R_3 - R_1$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $R_3$: | 1 | 0 | 0 | 1 |
| − 1·$R_1$: | 1 | 1 | 1 | 1 |
| = $R_3$ ใหม่: | 0 | −1 | −1 | 0 |

③ หลัง

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

ข้อสอบฝึก 5.2 ขั้นแรก (GE ไปข้างหน้า): ใต้ pivot แถว 1 ต้องเป็น 0 ⇒ ลบแถว 1 ออกจากแถว 2 และ 3 (ค่าในช่องแรกเป็น 1 จึงคูณ 1)

**① ก่อน**

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

**② ทำทีละแถว (ป้าย op ทุกครั้ง)**

**$R_2 \to (-1/2)\cdot R_2$**

| | | | |
|---|---|---|---|
| เดิม: | 0 | −2 | −2 \| 0 |
| **= ใหม่:** | **0** | **1** | **1 \| 0** |

**$R_3 \to R_3 + R_2$**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $R_3$: | 0 | −1 | −1 \| 0 |
| + 1·$R_2$: | 0 | 1 | 1 \| 0 |
| **= $R_3$ ใหม่:** | **0** | **0** | **0 \| 0** |

**③ หลัง**

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

**④ แถว 3 กลายเป็น 0 = 0 ⇒ สมการหาย 1 ⇒ ตัวแปรอิสระ 1 ตัว · ต่อด้วยรูป 5.2 แล้วอ่านคำตอบตามรูป 5.3**

ข้อสอบฝึก 5.2 ขั้นสอง: ทำ pivot แถว 2 เป็น 1 แล้ว $R_3 \to R_3 + R_2$ (ช่อง (3,2) เป็น $-1$ จึงบวก) — ซ้ายขวาเป็นศูนย์หมด

# 6 ระบบเอกพันธ์ $Ax = 0$ : มีแค่ 2 กรณี (ไม่มีทาง "ไม่มีคำตอบ")

## (ก) ขั้นตอน

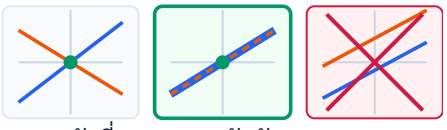
1. เช็กว่าเอกพันธ์จริง: ขวามือเป็น 0 **ทุกสมการ** · ถ้าใช่ $x = 0$ (trivial) เป็นคำตอบเสมอ ⇒ ตัวเลือก "no solutions" ตัดทิ้งทันที
2. ถ้า**จำนวนตัวแปร** $n$ > **จำนวนสมการ** $m$ ⇒ **อนันต์** แน่นอน (ชีท สัปดาห์ 3 Proposal 2) หยุด
3. ถ้าจัตุรัส ($n = m$): คำนวณ $\det A$ · $\det \neq 0$ ⇒ **มีแค่ trivial** $x = 0$ · $\det = 0$ ⇒ **อนันต์** หยุด (2×2 ใช้ $D = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$)

① คูณไขว้: ทแยงหลัก ↘ ลบ ทแยงรอง ↗




↘ ทแยงหลัก: a·a = a²
↗ ทแยงรอง: 1·9 = 9
**D = a² − 9**

② อ่านผล D



D ≠ 0 ตัดที่ 0 trivial เท่านั้น | D = 0 ทับกัน **อนันต์** | ขนาน? เป็นไปไม่ได้ ✗

ผ่านจุดกำเนิดทั้งคู่ ⇒ D = 0 คืออนันต์ทันที

รูป 6.1 · Quiz 0 ข้อ 4 ($ax + 9y = 0,\ x + ay = 0$): เส้นทั้งสองผ่านจุดกำเนิดเสมอ จึงมีแค่ 2 กรณี — $D \neq 0$ ตัดกันที่ $(0,0)$ จุดเดียว (trivial) · $D = 0$ ทับกัน (อนันต์) · ขนานเป็นไปไม่ได้ ⇒ $D = a^2 - 9 = 0$ คืออนันต์ทันที ไม่ต้องแทนจุดเช็ก

4. กรณีอื่น ($n \leq m$ ไม่จัตุรัส): ทำ GE กับ $A$ (ไม่ต้องเขียนคอลัมน์ 0) · ไม่มีคอลัมน์ไร้ pivot ⇒ trivial เท่านั้น · มี ⇒ อนันต์ ($n - k$ ตัวแปรอิสระ)
5. ถามค่า $a$ ที่ทำให้ "อนันต์" (2×2): แก้ $D(a) = 0$ — สำหรับระบบเอกพันธ์ นี่คือ**เงื่อนไขจำเป็นและพอเพียง** ไม่ต้องแทนจุดเช็กต่อเหมือนหัวข้อ 1 หยุด

**สูตร / ข้อความที่จริงเสมอ**

$Ax = 0$ มี $x = 0$ เสมอ ⇒ "at least one solution" จริงทุกกรณี · $n > m$ ⇒ อนันต์ · จัตุรัส: $\det A \neq 0 \iff$ trivial เท่านั้น $\iff$ $A$ invertible · $\det A = 0 \iff$ อนันต์ (มี nontrivial) · ผลบวก/ผลคูณด้วยค่าคงที่ของคำตอบ ยังเป็นคำตอบ

**กับดักที่ข้อสอบชอบ (ข้อความล่อจาก Quiz 2 ข้อ 3, Quiz 3 ข้อ 5, ข้อสอบฝึก Q3)**

- "4 สมการ 2 ตัวแปร มีอนันต์**หรือไม่มี**คำตอบ" ✗ — เอกพันธ์ไม่มีทางไม่มีคำตอบ · "4×4 มี**คำตอบเดียวเสมอ**" ✗ — ถ้าแถวซ้ำกัน $\det = 0$ ก็อนันต์
- "$\det \neq 0$ ⇒ อนันต์" ✗ กลับด้าน ($\det \neq 0$ ⇒ trivial ตัวเดียว) · "ตัวแปร**น้อยกว่า**สมการ ⇒ อนันต์" ✗ (เช่น $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 0$ มีแค่ trivial) · "ตัวแปร = สมการ ⇒ เดียว" ✗ (ต้องดู det)
- "ทุก H-system มีอนันต์" ✗ ($Ix = 0$ มีแค่ 0) · "H-system มี 2 คำตอบได้" ✗ (0,1,∞ เท่านั้น) · "det ของ H-system ไม่เป็นศูนย์เสมอ / เมทริกซ์สมมาตรเสมอ" ✗ (ระบบเอกพันธ์ว่าด้วย $b = 0$ ไม่เกี่ยวกับหน้าตา $A$)
- Quiz 2 ข้อ 3 มีข้อความจริง**สองข้อ**: "3 สมการ 4 ตัวแปร มีอนันต์เสมอ" ($n > m$) และ "3 สมการ 3 ตัวแปร มีอย่างน้อยหนึ่งคำตอบ" (trivial) — ข้อที่ให้ข้อมูลมากกว่าคือข้อแรก ถ้าบังคับเลือกข้อเดียว

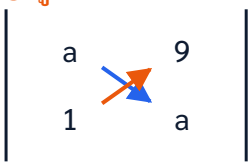
## (ง) ตัวอย่างจากควิซ

**Quiz 0 ข้อ 4:** $ax + 9y = 0,\ x + ay = 0$ **อนันต์เมื่อ** $a = ?$

เอกพันธ์ ⇒ อนันต์ $\iff D = 0$: $D = a^2 - 9 = 0$ ⇒ $a = \pm 3$ · ตัวเลือกมี $-3$ ⇒ $a = -3$

ตรวจ $a = -3$: $(x, y) = (3, 1)$: $-9 + 9 = 0$ ✓, $3 - 3 = 0$ ✓ (มีคำตอบไม่ใช่ศูนย์ ⇒ อนันต์) · $a = -4$: $D = 7$; $a = -2$: $D = -5$; $a = -1$: $D = -8$ ⇒ trivial เท่านั้น ✗

① คูณไขว้




↘ a·a = a²
↗ 1·9 = 9

② D = a² − 9 = 0 ⇒ a = ±3

③ เอกพันธ์: D = 0 ⇒ อนันต์ทันที
ตัวเลือกมี −3 ⇒ ตอบ a = −3

Quiz 0 ข้อ 4 — จุดตัดสิน: ขวาเป็น 0 ทั้งคู่ จึงใช้แค่ $D = 0$ ไม่ต้องแทนจุดเช็กแบบหัวข้อ 1

**Quiz 3 ข้อ 5: เลือกข้อความจริง**

- ✗ $\det \neq 0$ ⇒ อนันต์ — กลับด้าน: ได้ trivial ตัวเดียว
- ✗ #ตัวแปร = #สมการ ⇒ เดียว — $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x = 0$ อนันต์
- ✗ #ตัวแปร < #สมการ ⇒ อนันต์ — $x = 0, y = 0, x + y = 0$ มีแค่ 0
- ✗ ทุก H-system อนันต์ — $Ix = 0$
- ✓ #ตัวแปร > #สมการ ⇒ อนันต์เสมอ

# 7 เมทริกซ์ผกผัน: มีไหม · หายังไง · ใช้แก้ระบบ

## (ก) ขั้นตอน

**1** **มีไหม?** ต้องจัตุรัสก่อน · คำนวณ $\det A$ (หัวข้อ 9; สามเหลี่ยม/ทแยง = ผลคูณแนวทแยง) · $\det A = 0 \Rightarrow$ **singular ไม่มี** $A^{-1}$ หยุด · $\det A \neq 0 \Rightarrow$ มี (ค่าอะไรก็ได้ที่ไม่ใช่ 0 เช่น 3.2)

**2** **2×2 ทางลัด:** $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ — สลับทแยงหลัก, เปลี่ยนเครื่องหมายทแยงรอง, หารด้วย $D$

หยุด

① สลับ a ↔ d ② ใส่ลบให้ b, c ③ หารทุกช่องด้วย D = ad − bc

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

d −b
−c a

D = 1·4 − 2·3 = −2
÷ −2 ⇒ $A^{-1}$ = $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

ลืมหาร D บ่อยที่สุด — ทำครบ 3 อย่างเสมอ

รูป 7.1 · ตัวอย่าง (ง): $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ — ① สลับ 1 กับ 4 (ลูกศรโค้ง) ② ใส่ลบให้ 2 และ 3 ③ หารทุกช่องด้วย $D = -2$ ได้ $A^{-1}$ (เขียว)

**3** **3×3 วิธี GJE:** เขียน $(A \mid I)$ แล้วทำ Gauss–Jordan (หัวข้อ 5) จนซ้ายเป็น $I \Rightarrow$ ขวาคือ $A^{-1}$ · ถ้าซ้ายเกิดแถวศูนย์ทั้งแถว $\Rightarrow$ singular

① เขียน (A | I) ② row ops เดียวกันทั้งสองฝั่ง ③ ซ้ายเป็น I ⇒ ขวาคือ $A^{-1}$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_1 \to R_1 - 2R_2]{\substack{R_2 \to R_2 - 3R_1 \\ R_2 \to (-1/2)R_2}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right]$$

ตรวจ $AA^{-1} = I$ อย่างน้อย 2 ช่อง

รูป 7.2 · กวาด $(A \mid I)$ ด้วยตัวเลขจากตัวอย่าง (ง): ทำ row ops ชุดเดียวกันกับทั้งสองฝั่งของเส้น จนฝั่งซ้ายเป็น $I$ — ฝั่งขวาที่เหลือคือ $A^{-1}$ ตรงกับทางลัด 2×2

① เขียน (A | I) ② row ops เดียวกันทั้งสองฝั่ง ③ ซ้ายเกิดแถวศูนย์

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

ซ้ายเป็น I ไม่ได้ ⇒ singular ไม่มี $A^{-1}$

รูป 7.3 · กรณีล้มเหลว (จากกับดัก): $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ทำ $R_2 - R_1$ แล้วฝั่งซ้ายได้แถวศูนย์ทั้งแถว ⇒ ทำให้เป็น $I$ ไม่ได้ ⇒ singular ($\det = 0$)

**4** **3×3 วิธี cofactor:** หา $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ ทั้ง 9 ตัว → $\operatorname{adj} A = C^T$ (ทรานสโพสของเมทริกซ์ cofactor) → $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$

**5** **ตรวจ** $AA^{-1} = I$ อย่างน้อย 2 ช่อง (ช่องทแยงต้องได้ 1 ช่องอื่นได้ 0)

**6** **แก้ระบบ "Use the inverse matrix":** $x = A^{-1}b$ — คูณ $A^{-1}$ (3×3) กับ $b$ (คอลัมน์) · ทางลัดลดเศษส่วน: คำนวณ $\operatorname{adj} A \cdot b$ ก่อนแล้วค่อยหาร $\det A$ · แทนกลับสมการเดิม หยุด

**สูตร**

$AA^{-1} = A^{-1}A = I \cdot A^{-1}$ มีตัวเดียว (unique) · $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ **(สลับลำดับ)** · $(A_1A_2\cdots A_n)^{-1} = A_n^{-1}\cdots A_1^{-1}$ · $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$ $(k \neq 0)$ · $(A^{-1})^{-1} = A$ · $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ · $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ · $\det(A^{-1}) = 1/\det A$ · ทแยง $\operatorname{diag}(d_1,\ldots)^{-1} = \operatorname{diag}(1/d_1,\ldots)$ · UT/LT invertible $\iff$ แนวทแยงไม่มี 0 และผกผันยังเป็น UT/LT

**① ใส่: ถุงเท้า (B) ก่อน แล้วรองเท้า (A) = AB**



B A

AB = ทำ B ก่อน แล้ว A (อ่านจากขวาไปซ้าย)

**② ถอด = ทำย้อน: รองเท้าออกก่อน ($A^{-1}$) แล้วถุงเท้า ($B^{-1}$)**

**③ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$**



$A^{-1}$ ก่อน $B^{-1}$ ทีหลัง

$A^{-1}B^{-1}$ ✗ ลำดับผิด (ถอดถุงเท้าทั้งที่ยังใส่รองเท้า)

รูป 7.4 · ทำไม $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ต้องสลับลำดับ: $AB$ = ใส่ $B$ ก่อนแล้ว $A$ (ตัวขวาทำก่อน) · การถอด (ผกผัน) ต้องย้อนลำดับ: ถอด $A$ ก่อนแล้วค่อยถอด $B$

**5 ข้อความสมมูล (ชีท สัปดาห์ 5):** $A$ invertible $\iff$ $\det A \neq 0$ $\iff$ $Ax = 0$ มีแค่ trivial $\iff$ GJE ลด $A$ เป็น $I$ ได้ $\iff$ $Ax = b$ มีคำตอบเดียว (ทุก $b$)

**กับดักที่ข้อสอบชอบ (ข้อความล่อจาก Quiz 3 ข้อ 1, ข้อสอบฝึก Q2)**

- "ทุกเมทริกซ์จัตุรัส/ทุก $n \times n$ มี inverse" ✗ (เมทริกซ์ศูนย์) · "ทุก symmetric มี inverse" ✗ ($\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ สมมาตร แต่ $\det = 0$) · "ทุก diagonal / ทุก triangular มี inverse" ✗ (มี 0 บนแนวทแยง ⇒ $\det = 0$) · "แนวทแยงไม่มี 0 ⇒ invertible เสมอ" ✗ (ตัวอย่างเดิม $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ ทแยงเป็น 1,1 แต่ singular)
- ข้อความจริงคือ "$\det A \neq 0$ ⇒ **invertible**" และ "$\det A = 3.2$ ⇒ invertible" (ทศนิยมไม่ใช่ปัญหา ขอแค่ไม่ใช่ 0)
- $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ ✗ ต้องสลับ · $(kA)^{-1} = kA^{-1}$ ✗ ต้อง $\frac{1}{k}$ · $(A+B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$
- ทางลัด 2×2 ต้องทำ**ครบ 3 อย่าง**: สลับ $a \leftrightarrow d$ · ใส่ลบให้ $b, c$ · หาร $D$ (ลืมหารบ่อยสุด)

## (ง) ตัวอย่างจากข้อสอบฝึก — ทุกบรรทัด

**ข้อสอบฝึก 5.1:** $x_1 + x_2 - x_3 = 1,\ x_2 + x_3 = 0,\ x_1 - x_2 - x_3 = 1$ **(Use the inverse matrix)** → $x = (1, 0, 0)$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ · $\det A$ (กางแถว 1) $= 1\,[1(-1) - 1(-1)] - 1\,[0(-1) - 1 \cdot 1] + (-1)\,[0(-1) - 1 \cdot 1] = 1(0) - 1(-1) + (-1)(-1) = 0 + 1 + 1 = 2 \neq 0 \Rightarrow$ มี $A^{-1}$

**① เลือกแถว 1 (ฟ้า)**

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$

เครื่องหมาย $(-1)^{i+j}$

$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$

**② ปิดแถว 1 คอลัมน์ 1**

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$

$= 1\cdot(-1) - 1\cdot(-1) = 0$

$+ 1\cdot 0 = 0$

**② ปิดแถว 1 คอลัมน์ 2**

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

$M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$

$= 0\cdot(-1) - 1\cdot 1 = -1$

$- 1\cdot(-1) = 1$

**② ปิดแถว 1 คอลัมน์ 3**

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

$M_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$

$= 0\cdot(-1) - 1\cdot 1 = -1$

$+ (-1)\cdot(-1) = 1$

**③ det = 0 + 1 + 1 = 2**

ข้อสอบฝึก 5.1 — $\det A$ กางแถว 1: แต่ละช่องของแถว 1 ปิดแถว-คอลัมน์ของมัน (เทา) เหลือ 2×2 (minor) · เครื่องหมายตามตาราง $+ - +$ · รวมได้ $2 \neq 0 \Rightarrow$ มี $A^{-1}$

cofactor ทั้ง 9 (เครื่องหมายสลับ $+ - +/ - + - / + - +$): $C_{11} = +[1(-1) - 1(-1)] = 0$, $C_{12} = -[0(-1) - 1(1)] = 1$, $C_{13} = +[0(-1) - 1(1)] = -1$ · $C_{21} = -[1(-1) - (-1)(-1)] = 2$, $C_{22} = +[1(-1) - (-1)(1)] = 0$, $C_{23} = -[1(-1) - 1(1)] = 2$ · $C_{31} = +[1(1) - (-1)(1)] = 2$, $C_{32} = -[1(1) - (-1)(0)] = -1$, $C_{33} = +[1(1) - 1(0)] = 1$

$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ทรานสโพส $\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ÷ $\det A = 2$ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

**① C (cofactor) แถว i**

$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

**② adj A = Cᵀ คอลัมน์ i**

$\xrightarrow{\ T\ }$ $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

**③ ÷ 2 ทุกช่อง**

÷2 ⇒ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}$

ขนาด 3×3 → 3×3 · ทแยงหลักอยู่ที่เดิม

ข้อสอบฝึก 5.1 — adjoint คือทรานสโพสของเมทริกซ์ cofactor (แถวของ $C$ กลายเป็นคอลัมน์ สีเดียวกัน) แล้วหารทุกช่องด้วย $\det A = 2$ ได้ $A^{-1}$

$x = A^{-1}b = \frac{1}{2}\operatorname{adj} A\, b = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0\cdot 1 + 2\cdot 0 + 2\cdot 1 \\ 1\cdot 1 + 0 - 1\cdot 1 \\ -1\cdot 1 + 0 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{x = (1, 0, 0)}$ · ตรวจ: $1 + 0 - 0 = 1$ ✓ $0 + 0 = 0$ ✓ $1 - 0 - 0 = 1$ ✓ · ตรวจ $AA^{-1}$ ช่อง (1,1): $1\cdot 0 + 1\cdot\frac{1}{2} + (-1)(-\frac{1}{2}) = 1$ ✓

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{J} \\ \\ \text{i} \end{matrix}$$

$c_{11}$ = (0, 1) + (2, 0) + (2, 1) = 0·1 + 2·0 + 2·1 = **2**

ข้อสอบฝึก 5.1 — $x = A^{-1}b = \frac{1}{2}(\text{adj}\, A)\, b$: แถว 1 ของ adj จับคู่กับ $b$ ได้ 2 (แถว 2, 3 ได้ 0) แล้วหาร $\det A = 2 \Rightarrow x = (1, 0, 0)$

**2×2 ทางลัด:** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$D = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2 \cdot A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ · ตรวจ $AA^{-1}$ แถว 1: $(1(-2) + 2 \cdot \frac{3}{2},\ 1 \cdot 1 + 2(-\frac{1}{2})) = (1, 0)$ ✓ · $(2A)^{-1} = \frac{1}{2}A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{J} \\ \\ \text{i} \end{matrix}$$

$c_{11}$ = (1, −2) + (2, 3/2) = 1·(−2) + 2·(3/2) = **1**

2×2 ทางลัด — ตรวจ $AA^{-1}$ ช่อง (1,1): แถว 1 ของ $A$ กับคอลัมน์ 1 ของ $A^{-1}$ ได้ 1 (ช่องทแยงต้องได้ 1 ช่องอื่น 0)

# 8 ทรานสโพส $A^T$ · เมทริกซ์สมมาตร · ทแยง/สามเหลี่ยม

## (ก) ขั้นตอน

**1** $A^T$: แถวที่ $i$ ของ $A$ กลายเป็นคอลัมน์ที่ $i$ ($m \times n \to n \times m$) — เขียนแถวแรกลงเป็นคอลัมน์แรก ทีละแถว

① A แถว i ② Aᵀ คอลัมน์ i ③ ขนาดของ (AB)ᵀ

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{T}} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

ขนาด 2×2 → 2×2 · ทแยงหลักอยู่ที่เดิม

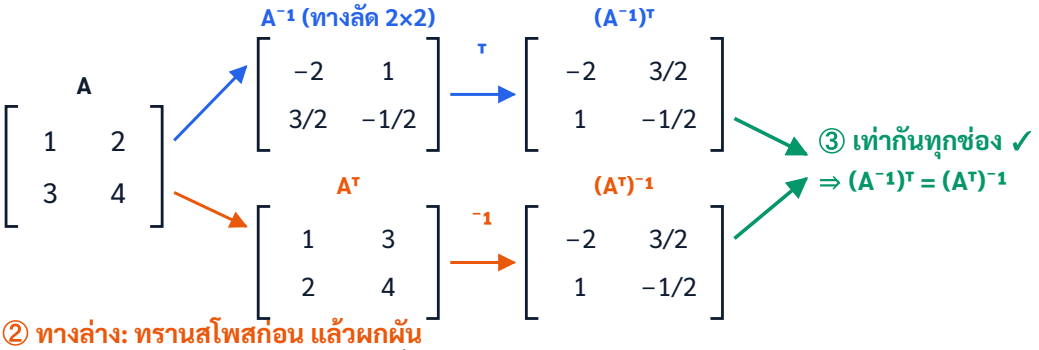
A 2×3, B 3×2 ⇒ AB 2×2
(AB)ᵀ เป็น 2×2
BᵀAᵀ = (2×3)(3×2) = 2×2 ✓
AᵀBᵀ = (3×2)(2×3) ✗ ตัวในไม่เท่า

รูป 8.1 · $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ จากโจทย์ 7: แถว 1 (ฟ้า) กลายเป็นคอลัมน์ 1, แถว 2 (ส้ม) เป็นคอลัมน์ 2 · เช็กขนาด $(AB)^T$ ด้วยตัวเลขหัวข้อ 3: $(2\times3)(3\times2) \Rightarrow B^TA^T = (2\times3)(3\times2)$ คูณได้ แต่ $A^TB^T$ ตัวในไม่เท่า

**2** สมมาตร? เช็ก $A = A^T$ คือ $a_{ij} = a_{ji}$ ทุกคู่ (สะท้อนข้ามแนวทแยงเท่ากัน) — ต้องจัตุรัส · ทแยง ⇒ สมมาตรเสมอ

**3** โจทย์ "illustrate $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$": (i) หา $A^{-1}$ ด้วยทางลัด 2×2 แล้วทรานสโพส (ii) หา $A^T$ แล้วหาผกผันด้วยทางลัด (iii) วางเทียบกัน ต้องเท่ากันทุกช่อง **หยุด**

① ทางบน: ผกผันก่อน แล้วทรานสโพส




② ทางล่าง: ทรานสโพสก่อน แล้วผกผัน

รูป 8.2 · โจทย์ 7: สองทางต้องมาบรรจบที่เมทริกซ์เดียวกัน — ทางบนผกผันก่อน (ทางลัด 2×2, $D = -2$) แล้วทรานสโพส · ทางล่างทรานสโพสก่อนแล้วผกผัน

**4** โจทย์ "illustrate $(AB)^T = B^TA^T$": คูณ $AB$ ก่อนแล้วทรานสโพส เทียบกับ $B^T$ คูณ $A^T$ (ลำดับสลับ)

**5** สามเหลี่ยม/ทแยง invertible? ดูแนวทแยง: มี 0 ⇒ singular · ไม่มี 0 ⇒ invertible ($\det$ = ผลคูณแนวทแยง)

**สูตร**

$(A^T)^T = A \cdot (A+B)^T = A^T + B^T \cdot (kA)^T = kA^T \cdot (AB)^T = B^TA^T$ **(สลับ)** $\cdot (A^{-1})^T = (A^T)^{-1} \cdot \det A^T = \det A$ · สมมาตร: $A, B$ สมมาตร ⇒ $A+B$, $kA$, $A^T$, $A^n$ สมมาตร · $A$ สมมาตร invertible ⇒ $A^{-1}$ สมมาตร · $AA^T$ และ $A^TA$ สมมาตรเสมอ (ทุก $A$ ไม่ต้องจัตุรัส) · $AB$ ของสองตัวสมมาตร**ไม่จำเป็น**สมมาตร · ผลคูณ UT·UT = UT, ผกผันของ UT = UT

**กับดักที่ข้อสอบชอบ**

- $(AB)^T = A^T B^T$ ✗ ลำดับต้องสลับ (ขนาดไม่ตรงด้วยซ้ำถ้าไม่จัตุรัส)
- สมมาตร ⇒ invertible ✗ · ทแยง ⇒ invertible ✗ · สามเหลี่ยมล่างทุกตัว invertible ✗ — ต้องดูว่าแนวทแยงมี 0 ไหม
- ตอนทรานสโพสเมทริกซ์ที่มีเศษส่วน อย่าสลับเครื่องหมาย/ตัวเลข: $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (ทแยงหลักอยู่ที่เดิม)

## (ง) ตัวอย่างจากข้อสอบฝึก โจทย์ 7 — ทุกบรรทัด

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ **แสดงว่า** $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

**ซ้าย:** $\det A = 4 - 6 = -2 \cdot A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ · ทรานสโพส ⇒ $(A^{-1})^T = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

**ขวา:** $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\det A^T = 4 - 6 = -2 \cdot (A^T)^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

**เท่ากันทุกช่อง ⇒** $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ · ตัวล่อ: $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ คือ $A^{-1}$ ยังไม่ทรานสโพส · $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

ลืมหาร $-2$

① สลับ a ↔ d ② ใส่ลบให้ b, c ③ หารทุกช่องด้วย D = ad − bc

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

d −c −b a

D = 1·4 − 3·2 = −2

÷ −2 ⇒ $A^{-1}$ = $\begin{bmatrix} -2 & 3/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}$

ลืมหาร D บ่อยที่สุด — ทำครบ 3 อย่างเสมอ

โจทย์ 7 ฝั่งขวา — ผกผันของ $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ด้วยทางลัด: สลับ 1 กับ 4 · ใส่ลบให้ 3 และ 2 · หาร $D = 4 - 6 = -2$ ⇒ ตรงกับ $(A^{-1})^T$ ฝั่งซ้าย

# 9 ดีเทอร์มิแนนต์: cofactor · GE แถว/คอลัมน์ · สมบัติ · adj · Cramer

## (ก) ขั้นตอน — เลือกทางตามขนาด/คำสั่งโจทย์

**1** **2×2:** $ad - bc$ หยุด · **สามเหลี่ยม/ทแยง:** ผลคูณแนวทแยง หยุด · มีแถวหรือคอลัมน์เป็น 0 หมด / สองแถว(คอลัมน์)เป็นสัดส่วนกัน ⇒ $\det = 0$ หยุด

**2** **3×3 ด้วย cofactor:** เลือกแถวหรือคอลัมน์ที่มี 0 มากที่สุด · $\det A = \sum_j a_{ij}C_{ij}$ โดย $C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ และ $M_{ij}$ = det ของ 2×2 ที่เหลือหลัง**ตัดแถว** $i$ **คอลัมน์** $j$ · ตารางเครื่องหมาย $\begin{matrix}+&-&+\\-&+&-\\+&-&+\end{matrix}$ · เขียนทั้ง 3 พจน์แล้วบวก

**① เลือกแถว 1 (ฟ้า)**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

เครื่องหมาย $(-1)^{i+j}$

$$\begin{matrix}+&-&+\\-&+&-\\+&-&+\end{matrix}$$

**② ปิดแถว 1 คอลัมน์ 1**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$

$= 2\cdot4 - 2\cdot0 = 8$

$+ 1\cdot8 = 8$

**② ปิดแถว 1 คอลัมน์ 2**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$

$= 2\cdot4 - 2\cdot1 = 6$

$- 2\cdot6 = -12$

**② ปิดแถว 1 คอลัมน์ 3**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$

$= 2\cdot0 - 2\cdot1 = -2$

$+ 2\cdot(-2) = -4$

**③ det = 8 + (−12) + (−4) = −8**

รูป 9.1 · โจทย์ 3 กางแถว 1: แต่ละช่องของแถว 1 (ฟ้า) ปิดแถวและคอลัมน์ของตัวเอง (เทา) เหลือ 2×2 = minor · ใส่เครื่องหมายตามตาราง $+\,-\,+$ (ตัวกลางติดลบ!) · บวกสามพจน์ $8 - 12 - 4 = -8$

**3** **GE แบบแถว:** ใช้ $R_i \leftarrow R_i - kR_j$ (**ไม่เปลี่ยน det**) ทำใต้ทแยงให้เป็น 0 ⇒ det = ผลคูณแนวทแยง · ถ้า**สลับแถว** คูณ $-1$ ต่อครั้ง · ถ้า**ดึงตัวประกอบ** $k$ **ออกจากแถว** ต้องเขียน $k$ ไว้หน้า det

**① ก่อน**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

**② ทำทีละแถว (ป้าย op ทุกครั้ง)**

$R_2 \to R_2 - 2R_1$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $R_2$: | 2 | 2 | 2 |
| $-2\cdot R_1$: | 2 | 4 | 4 |
| = $R_2$ ใหม่: | 0 | −2 | −2 |

$R_3 \to R_3 - R_1$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $R_3$: | 1 | 0 | 4 |
| $-1\cdot R_1$: | 1 | 2 | 2 |
| = $R_3$ ใหม่: | 0 | −2 | 2 |

**③ หลัง**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

**④ R − kR ไม่เปลี่ยน det · ต่อด้วย $R_3 \to R_3 - R_2$ ได้ 0 0 4 ⇒ det = 1·(−2)·4 = −8**

รูป 9.2 · โจทย์ 3 วิธี GE แถว: ทำใต้ทแยงให้เป็น 0 ด้วย $R_i - kR_j$ (det ไม่เปลี่ยน) จนเป็นสามเหลี่ยม แล้วคูณแนวทแยง

**① สลับสองแถว** $R_1 \leftrightarrow R_2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$= -2$ → $= 2$

**det × (−1)**

**② คูณแถวเดียวด้วย 5** $R_1 \to 5\cdot R_1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$= -2$ → $= -10$

**det × 5**

**③ บวกพหุคูณของแถวอื่น** $R_2 \to R_2 - 3R_1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$= -2$ → $= -2$

**det เท่าเดิม**

ดึงตัวประกอบออกจากแถว = ทำกลับของ ② ⇒ ต้องเขียนตัวประกอบไว้หน้า det

รูป 9.3 · ผลของ row op ต่อ det (ตัวเลขจาก Quiz 3 ข้อ 4 หมายเหตุ: $\det\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix} = -2$): สลับแถว ⇒ เปลี่ยนเครื่องหมาย · คูณแถวด้วย 5 ⇒ det ×5 · บวกพหุคูณของแถวอื่น ⇒ เท่าเดิม

**4** **GE แบบคอลัมน์:** เหมือนข้อ 3 แต่ทำ $C_i \leftarrow C_i - kC_j$ (ทำขวาของทแยงให้เป็น 0)

① ก่อน

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

② ทำทีละคอลัมน์ (ค่าเรียงบน→ล่าง)

$C_2 \to C_2 - 2C_1$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $C_2$: | 2 | 2 | 0 |
| $-2 \cdot C_1$: | 2 | 4 | 2 |
| = $C_2$ ใหม่: | 0 | −2 | −2 |

$C_3 \to C_3 - 2C_1$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $C_3$: | 2 | 2 | 4 |
| $-2 \cdot C_1$: | 2 | 4 | 2 |
| = $C_3$ ใหม่: | 0 | −2 | 2 |

③ หลัง

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

④ ต่อด้วย $C_3 \to C_3 - C_2$ ⇒ สามเหลี่ยมล่าง $1 \cdot (-2) \cdot 4 = -8$ (ค่าเท่าวิธีแถว)

รูป 9.4 · โจทย์ 3 วิธี GE คอลัมน์: $C_2 \to C_2 - 2C_1$, $C_3 \to C_3 - 2C_1$ ทำขวาของทแยงให้เป็น 0 — ในช่องทำงานเขียนค่าของคอลัมน์เรียงจากบนลงล่าง

**5** **4×4 (ห้ามใช้กฎ 3×3/Sarrus):** กางตามแถว/คอลัมน์ที่มี 0 มากสุด ⇒ เหลือ 3×3 ตัวเดียว · ดึงตัวประกอบร่วมออกจากแต่ละแถวเพื่อให้เลขเล็ก (คูณสะสมไว้หน้า) · ทำต่อด้วยข้อ 2–3 · คูณตัวประกอบสะสมกลับ

① กางแถว 1 (0 ทิ้งได้)

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 109 & 7 & 14 & 14 \\ 2 & 9 & 18 & 27 \\ 46 & 12 & 144 & 12 \end{vmatrix}$$

② ปิดแถว 1 คอลัมน์ 1

$$\Rightarrow +2 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 14 & 14 \\ 9 & 18 & 27 \\ 12 & 144 & 12 \end{vmatrix}$$

③ ดึงตัวประกอบร่วมออกจากแต่ละแถว (7, 9, 12)

$$\begin{vmatrix} 7 & 14 & 14 \\ 9 & 18 & 27 \\ 12 & 144 & 12 \end{vmatrix} = 7 \cdot 9 \cdot 12 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 12 & 1 \end{vmatrix} = 1512 \cdot \det S$$

det = $2 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 12 \cdot \det S$ = **$1512 \cdot \det S$**

รูป 9.5 · โจทย์ 4 (4×4): แถว 1 มี 0 สามตัว จึงเหลือพจน์เดียว $+2 \cdot M_{11}$ (ตัวเลข 109, 2, 46 หายไปกับคอลัมน์ 1) · ดึง 7, 9, 12 ออกจากแต่ละแถวของ minor ⇒ $2 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 12 = 1512$ คูณ $\det S$

**6** โจทย์สั่ง "ใช้ 3 วิธี" ⇒ ทำครบทั้ง cofactor, GE แถว, GE คอลัมน์ และ**ค่าต้องตรงกัน** — ไม่ตรง = มีที่ผิด หาให้เจอ

**7** **Cramer (โจทย์สั่ง):** (i) $D = \det A$ ต้อง $\neq 0$ (ถ้า 0 ใช้ไม่ได้ → ไป GE) (ii) $D_i$ = det ของ $A$ ที่**แทนคอลัมน์ $i$ ด้วย $b$** (iii) $x_i = D_i / D$ (iv) แทนกลับ **หยุด**

① D = det A

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

D = −1

b

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

② แทนคอลัมน์ 1 ด้วย b

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$D_1 = 1$

$x_1 = \frac{1}{-1} = -1$

② แทนคอลัมน์ 2 ด้วย b

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$D_2 = -1$

$x_2 = \frac{-1}{-1} = 1$

② แทนคอลัมน์ 3 ด้วย b

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$D_3 = -1$

$x_3 = \frac{-1}{-1} = 1$

③ x = (−1, 1, 1) แล้วแทนกลับสมการเดิม

รูป 9.6 · โจทย์ 6: $D = -1 \neq 0$ ใช้ Cramer ได้ · $D_i$ = det ของ $A$ ที่แทนคอลัมน์ $i$ ด้วย $b$ (ส้ม) · $x_i = D_i / D$ — ต้องหาร $D$ ทุกตัว (ไม่หารจะได้ $(1, -1, -1)$ ผิด)

**8** **ผกผันด้วย cofactor:** $\text{adj}\, A = C^T$, $A^{-1} = \text{adj}\, A / \det A$ (ตัวอย่างเต็มหัวข้อ 7)

**สูตร / สมบัติ (ต้องใช้ตอบข้อความจริง-เท็จ)**

สลับสองแถว(คอลัมน์) ⇒ det เปลี่ยนเครื่องหมาย · คูณแถวเดียวด้วย $k$ ⇒ $k\det$ · $R_i \leftarrow R_i + kR_j$ ⇒ **ไม่เปลี่ยน** · $\det(kA) = k^n \det A$ $(n \times n)$ · $\det(AB) = \det A \ \det B$ · $\det(A^2) = (\det A)^2$ · $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$ · $\det A^T = \det A$ · $\det I = 1$ · $\det(A+B) \neq \det A + \det B$ โดยทั่วไป · $A$ invertible $\iff \det A \neq 0$ · ระบบ $n \times n$ มีคำตอบเดียว $\iff \det A \neq 0$ · $\det A = 0$ ⇒ $Ax = b$ อนันต์หรือไม่มี (ต้อง GE ต่อ)

**① แถว 0 0 0 | c (c ≠ 0)**

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & c \end{array}\right]$$

**0 = c ขัดกัน ⇒ ไม่มีคำตอบ**

**② แถว 0 0 0 | 0**

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

**สมการหาย 1 ⇒ ตัวแปรอิสระ ⇒ อนันต์**

**③ ขั้นบันไดเต็ม (pivot ครบ)**

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & * & * & * \\ 0 & \boxed{1} & * & * \\ 0 & 0 & \boxed{1} & * \end{array}\right]$$

**แทนย้อนกลับ ⇒ คำตอบเดียว**

$\det A = 0$ ตัดสินได้แค่ว่า 'ไม่ใช่คำตอบเดียว' — ต้องทำ GE ต่อเพื่อดูว่าเป็นแถว $0\,0\,0 \,|\, c$ (ไม่มี) หรือ $0\,0\,0 \,|\, 0$ (อนันต์) · $\det A \neq 0$ ⇒ ขั้นบันไดเต็ม ⇒ เดียว

**กับดักที่ข้อสอบชอบ**

- ลืมเครื่องหมาย cofactor ตัวกลาง: $-a_{12}M_{12}$ — ข้อสอบฝึกโจทย์ 3 ถ้าบวกหมดจะได้ $8 + 12 - 4 = 16$ ✗ (ถูกคือ $8 - 12 - 4 = -8$)
- สลับแถวแล้วลืมคูณ $-1$ (โจทย์ 4: สลับ 1 ครั้ง $10 \to -10$) · ดึงตัวประกอบจากแถวแล้วลืมคูณคืน $(7 \cdot 9 \cdot 12)$
- กางแถวที่ไม่ใช่แถวที่มี 0 ⇒ งานเยอะและผิดง่าย — Quiz 3 ข้อ 4 กางแถว 3 เหลือพจน์เดียว $9 \cdot C_{33}$ · ตัวล่อ $-\frac{1}{3}$ คือลืมคูณ 9
- $\det A^2 = 2 \det A$ ✗ · $\det(A+B) = \det A \det B$ ✗ · $\det(AB) = \det A / \det B$ ✗ · $\det A = \det A^{-1}$ ✗ (จริงเฉพาะ $\det A = \pm 1$) · ข้อความจริงคือ $\det I = 1$
- Cramer: ค่าที่ได้จาก $D_i$ ต้อง**หารด้วย** $D$ — โจทย์ 6 ถ้าไม่หารจะได้ $(1, -1, -1)$ ✗ (ถูกคือ $(-1, 1, 1)$ เพราะ $D = -1$)

## (ง) ตัวอย่างจากข้อสอบฝึก/ควิซ — ทุกบรรทัด

**ข้อสอบฝึก โจทย์ 3:** $\det\begin{pmatrix}1&2&2\\2&2&2\\1&0&4\end{pmatrix} = -8$ **สามวิธี**

**1) cofactor แถว 1:** $1\cdot\begin{vmatrix}2&2\\0&4\end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix}2&2\\1&4\end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix}2&2\\1&0\end{vmatrix} = 1(8-0) - 2(8-2) + 2(0-2) = 8 - 12 - 4 = -8$

**2) GE แถว:** $\begin{pmatrix}1&2&2\\2&2&2\\1&0&4\end{pmatrix}$ $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$, $R_3 \leftarrow R_3 - R_1$ $\begin{pmatrix}1&2&2\\0&-2&-2\\0&-2&2\end{pmatrix}$ $R_3 \leftarrow R_3 - R_2$ $\begin{pmatrix}1&2&2\\0&-2&-2\\0&0&4\end{pmatrix} \Rightarrow$

$1\cdot(-2)\cdot 4 = -8$

**3) GE คอลัมน์:** $\begin{pmatrix}1&2&2\\2&2&2\\1&0&4\end{pmatrix}$ $C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1$, $C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1$ $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-2&-2\\1&-2&2\end{pmatrix}$ $C_3 \leftarrow C_3 - C_2$ $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-2&0\\1&-2&4\end{pmatrix} \Rightarrow$

$1\cdot(-2)\cdot 4 = -8$ $-8$ ทั้งสามวิธี

① ก่อน

$$\begin{bmatrix}1&2&2\\0&-2&-2\\0&-2&2\end{bmatrix}$$

② ทำทีละแถว (ป้าย op ทุกครั้ง)

$R_3 \to R_3 - R_2$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $R_3$: | 0 | −2 | 2 |
| $-1\cdot R_2$: | 0 | −2 | −2 |
| = $R_3$ ใหม่: | **0** | **0** | **4** |

③ หลัง

$$\begin{bmatrix}1&2&2\\0&-2&-2\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{4}\end{bmatrix}$$

④ สามเหลี่ยมบน ⇒ det = 1·(−2)·4 = −8 ตรงกับ cofactor (รูป 9.1) และคอลัมน์ (รูป 9.4)

โจทย์ 3 — ขั้นสุดท้ายของ GE แถว: $R_3 \to R_3 - R_2$ (ช่อง (3,2) เท่ากับช่อง (2,2) จึงคูณ 1) ได้แถว 0 0 4

**ข้อสอบฝึก โจทย์ 4:** $\det\begin{pmatrix}2&0&0&0\\109&7&14&14\\2&9&18&27\\46&12&144&12\end{pmatrix} = -15120$ **(cofactor + GE เท่านั้น)**

กางแถว 1 (มี 0 สามตัว): $= 2\cdot\begin{vmatrix}7&14&14\\9&18&27\\12&144&12\end{vmatrix}$ (ตัวเลข 109, 2, 46 ในคอลัมน์ 1 ถูกตัดทิ้งไปกับคอลัมน์) · ดึง 7 จากแถว 1, 9 จากแถว 2, 12 จากแถว 3: $= 2\cdot 7\cdot 9\cdot 12\cdot\begin{vmatrix}1&2&2\\1&2&3\\1&12&1\end{vmatrix} = 1512\cdot\det S$

$S = \begin{pmatrix}1&2&2\\1&2&3\\1&12&1\end{pmatrix}$ $R_2 \leftarrow R_2 - R_1$, $R_3 \leftarrow R_3 - R_1$ $\begin{pmatrix}1&2&2\\0&0&1\\0&10&-1\end{pmatrix}$ สลับ $R_2 \leftrightarrow R_3$ (det × −1) $\begin{pmatrix}1&2&2\\0&10&-1\\0&0&1\end{pmatrix} \Rightarrow$

$\det S = -(1\cdot 10\cdot 1) = -10$

$\det = 1512 \times (-10) =$ $-15120$ · เช็ก $\det S$ ด้วย cofactor แถว 1: $1(2\cdot 1 - 3\cdot 12) - 2(1\cdot 1 - 3\cdot 1) + 2(1\cdot 12 - 2\cdot 1) = -34 + 4 + 20 = -10$ ✓ · ตัวล่อ $+15120$ ลืมสลับแถว · $-7560$ ลืมตัว 2 หน้า

**① ก่อน**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 12 & 1 \end{bmatrix}$$

**② ทำทีละแถว (ป้าย op ทุกครั้ง)**

**$R_2 \to R_2 - R_1$**

$R_2$: 1 2 3

$-1\cdot R_1$: 1 2 2

**= $R_2$ ใหม่: 0 0 1**

**$R_3 \to R_3 - R_1$**

$R_3$: 1 12 1

$-1\cdot R_1$: 1 2 2

**= $R_3$ ใหม่: 0 10 −1**

**$R_2 \leftrightarrow R_3$**

**③ หลัง**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 10 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**④ สลับแถว 1 ครั้ง ⇒ det S = −(1·10·1) = −10 ⇒ det = 1512 × (−10) = −15120**

โจทย์ 4 — $\det S$ ด้วย GE: ลบแถว 1 ออกจากแถว 2, 3 แล้วช่อง (2,2) เป็น 0 จึงต้องสลับ $R_2 \leftrightarrow R_3$ (det เปลี่ยนเครื่องหมาย 1 ครั้ง)

**ข้อสอบฝึก โจทย์ 6 (Cramer):** $x_1 + x_2 + x_3 = 1,\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ x_1 + x_3 = 0$

$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1(1-0) - 1(2-1) + 1(0-1) = 1 - 1 - 1 = -1 \neq 0$ ✓ ใช้ได้

$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ (สามเหลี่ยมบน) · $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ กางคอลัมน์ 2 (มี 1 ตัวเดียว): $= -1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(2-1) = -1$ · $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ กางแถว 3: $= +1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1$

$x = \left(\frac{1}{-1}, \frac{-1}{-1}, \frac{-1}{-1}\right) = \boxed{(-1, 1, 1)}$ · ตรวจ: $-1 + 1 + 1 = 1$ ✓ $-2 + 1 + 1 = 0$ ✓ $-1 + 1 = 0$ ✓

**Quiz 3 ข้อ 4:** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ **เลือกข้อความจริง**

กางแถว 3 (มี 0 สองตัว): $\det A = 9 \cdot C_{33} = 9 \cdot (+1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 9(5-8) = 9(-3) = -27$ · เช็กแถว 1: $1(45-0) - 2(36-0) + 3(0) = 45 - 72 = -27$ ✓

$\det A^{-1} = \frac{1}{-27} = -\frac{1}{27} \cdot \boxed{\det(A^{-1}) = -\frac{1}{27}}$ · ตัวล่อ: $\det A = 11, -2, 21$ ✗ · $\det A^{-1} = \frac{1}{11}, -\frac{1}{21}$ ✗ · $-\frac{1}{3}$ ✗ (ลืมคูณ 9)

ผลของ row op บน $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $(\det = -2)$: สลับแถว ⇒ $+2$ · แถว 1 ×5 ⇒ $-10$ · $R_2 \leftarrow R_2 - 3R_1$ ⇒ $-2$ (เท่าเดิม) · $\det A^T = -2 \cdot \det A^2 = 4 \cdot \det A^{-1} = -\frac{1}{2}$

**① เลือกคอลัมน์ 2 (ฟ้า)**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

เครื่องหมาย $(-1)^{i+j}$

| | | |
|---|---|---|
| + | − | + |
| − | + | − |
| + | − | + |

**② ปิดแถว 1 คอลัมน์ 2**

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

= 2·1 − 1·1 = 1

**− 1·1 = −1**

**② ปิดแถว 2 คอลัมน์ 2**

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

= 1·1 − 1·1 = 0

**+ 0·0 = 0**

**② ปิดแถว 3 คอลัมน์ 2**

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

= 1·1 − 1·2 = −1

**− 0·(−1) = 0**

**③ det = (−1) + 0 + 0 = −1**

โจทย์ 6 — $D_2$ กางคอลัมน์ 2 (แทนคอลัมน์ 2 ด้วย $b = (1, 0, 0)$ แล้วมี 0 สองตัว): เหลือพจน์เดียว $-1 \cdot (2-1) = -1$ · เลือกแถว/คอลัมน์ที่มี 0 มากสุดเสมอ

**① เลือกแถว 3 (ฟ้า)**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

เครื่องหมาย $(-1)^{i+j}$

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

**② ปิดแถว 3 คอลัมน์ 1**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$

$= 2\cdot6 - 3\cdot5 = -3$

$+ 0\cdot(-3) = 0$

**② ปิดแถว 3 คอลัมน์ 2**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$

$= 1\cdot6 - 3\cdot4 = -6$

$- 0\cdot(-6) = 0$

**② ปิดแถว 3 คอลัมน์ 3**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$

$= 1\cdot5 - 2\cdot4 = -3$

$+ 9\cdot(-3) = -27$

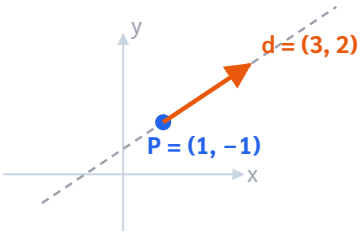
**③ det = 0 + 0 + (−27) = −27**

Quiz 3 ข้อ 4 — กางแถว 3 (มี 0 สองตัว): พจน์เดียว $+9 \cdot (5-8) = -27 \Rightarrow \det A^{-1} = 1/(-27)$ · ตัวล่อ $-\frac{1}{3}$ คือลืมคูณ 9

# 10 เส้นตรงและระนาบ: 3 รูปแบบของเส้น · ระนาบจาก 3 จุด · นอร์มัล · ขนาน/ตั้งฉาก/ไขว้/ตัดกัน

## (ก) ขั้นตอน — ดูว่าโจทย์ถามแบบไหน

**1** **"สมการพารามิเตอร์นี้คืออะไร"**: นับ**พารามิเตอร์** 1 ตัว $(t)$ ⇒ **เส้นตรง** · 2 ตัว $(t, s)$ ⇒ ระนาบ · นับ**ตัวแปร**: มีแค่ $x, y$ ⇒ 2 มิติ · มี $x, y, z$ ⇒ 3 มิติ หยุด (จุดคือค่าคงที่ ทิศคือสัมประสิทธิ์ของ $t$)




① จุด P (ฟ้า) = ค่าคงที่ · ทิศ d (ส้ม) = สัมประสิทธิ์ของ t

(1) พารามิเตอร์: x = 1 + 3t, y = −1 + 2t

(2) เวกเตอร์: r = (1, −1) + t(3, 2)

ตัด t ออก: 2x − 3y = 5 (ตรวจ t = 0: 2 + 3 = 5 ✓)

② พารามิเตอร์ 1 ตัว = เส้นเสมอ · 2 ตัว (t, s) = ระนาบ

รูป 10.1 · Q1: $x = 3t + 1,\ y = 2t - 1$ — พารามิเตอร์ตัวเดียว ⇒ เส้น · ตัวแปรแค่ $x, y$ ⇒ 2 มิติ · ค่าคงที่ $(1, -1)$ คือจุด (ฟ้า) สัมประสิทธิ์ของ $t$ คือทิศ $(3, 2)$ (ส้ม)

**2** **ระนาบ** $ax + by + cz + d = 0$: นอร์มัล $n = (a, b, c)$ **และทุกตัวคูณ** $k(a, b, c)$ เช่น $(-a, -b, -c)$ · จุดอยู่บนระนาบ $\iff$ แทนแล้วได้ **0 พอดี** · ผ่านจุดกำเนิด $\iff$ $d = 0$

① นอร์มัล = สัมประสิทธิ์ (a, b, c) และตัวคูณทุกตัว

ระนาบ 5x + 3y − 1z + 1 = 0 ⇒ n = (5, 3, −1)

(5, 3, 1) ✗ ไม่ใช่ตัวคูณของ n (เครื่องหมายไม่ตาม)

(−5, −3, 1) = −1·n ✓ ใช้เป็นนอร์มัลได้

② จุดอยู่บนระนาบ ⇔ แทนแล้วได้ 0 พอดี

(0, 0, 0): 5·0 + 3·0 + (−1)·0 + 1 = 1 ✗ ไม่อยู่

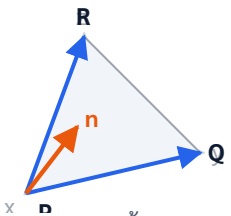
(5, 3, 1): 5·5 + 3·3 + (−1)·1 + 1 = 34 ✗ ไม่อยู่

(−3, 5, 0): 5·(−3) + 3·5 + (−1)·0 + 1 = 1 ✗ ไม่อยู่

ผ่านจุดกำเนิด ⇔ d = 0 (ที่นี่ d = 1 ⇒ ไม่ผ่าน)

รูป 10.2 · Q5: นอร์มัลอ่านจากสัมประสิทธิ์ $(5, 3, -1)$ และตัวคูณทุกตัว — $(5, 3, 1)$ ไม่ใช่เพราะช่อง $z$ เครื่องหมายไม่ตาม · จุดอยู่บนระนาบเมื่อแทนแล้วได้ 0 พอดี · $d = +1 \neq 0$ จึงไม่ผ่านจุดกำเนิด

**3** **ระนาบผ่าน 3 จุด** $P, Q, R$: $v_1 = Q - P, v_2 = R - P \cdot n = v_1 \times v_2$ (สูตร cross หัวข้อ 2) · ระนาบ: $n_1(x - x_P) + n_2(y - y_P) + n_3(z - z_P) = 0$ กระจายออก · ตรวจแทนทั้ง 3 จุดต้องได้ 0 · (ชีทใช้ det ของ $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$ ให้ผลเดียวกัน) · **ระนาบจากจุด + นอร์มัล**: ข้ามไปสูตรเดียวกันเลย




① เวกเตอร์ขอบสองเส้นจาก P

$v_1$ = Q − P = (−1, 1, 0) $v_2$ = R − P = (−1, 0, 1)

② นอร์มัล n = $v_1$ × $v_2$ (รูปแบบลูกศรไขว้ ดูรูป cross)

n = (1, 1, 1)

③ ระนาบ n·(X − P) = 0 แล้วกระจาย

1(x − 1) + 1(y − 0) + 1(z − 0) = 0 ⇒ x + y + z = 1

ตรวจ: แทน P, Q, R ต้องได้ 0 ทั้งสามจุด

รูป 10.3 · ตัวอย่างสั้นใน (ง): $P(1, 0, 0), Q(0, 1, 0), R(0, 0, 1)$ — ลากขอบสองเส้นจาก $P$ (ฟ้า) ไขว้กันได้นอร์มัล (ส้ม) ตั้งฉากกับระนาบ แล้วเขียน $n \cdot (X - P) = 0$ กระจายเป็น $x + y + z = 1$

**① เขียน $v_1$ บน $v_2$ ล่าง**

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$v_1 \times v_2$ ตั้งฉากกับทั้งคู่
ช่องกลางติดลบ (สลับลำดับ)

**② ช่อง 1: ปิดคอลัมน์ 1**

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$+(\searrow - \nearrow) = [1\cdot 1 - 0\cdot 0]$
**= 1**

**② ช่อง 2: ปิดคอลัมน์ 2**

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$-(\searrow - \nearrow) = -[(-1)\cdot 1 - 0\cdot(-1)]$
**= 1**

**② ช่อง 3: ปิดคอลัมน์ 3**

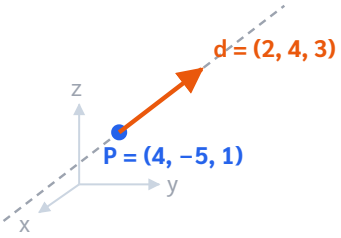
$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$+(\searrow - \nearrow) = [(-1)\cdot 0 - 1\cdot(-1)]$
**= 1**

**③ $v_1 \times v_2 = (1, 1, 1)$**

รูป 10.4 · รูปแบบลูกศรไขว้ของ cross product: ช่องที่ $k$ ปิดคอลัมน์ $k$ แล้วคูณไขว้ (↘ ลบ ↗) เหมือน $2 \times 2$ — ช่องกลางต้องกลับเครื่องหมาย · ได้ $v_1 \times v_2 = (1, 1, 1)$

**4** **เส้นตรง 3 มิติ — 3 รูปแบบ**: (1) พารามิเตอร์ $x = x_0 + at,\ y = y_0 + bt,\ z = z_0 + ct$ (2) เวกเตอร์ $r = P + t\,d$, $d = (a, b, c)$ (3) จุดตัดของ 2 ระนาบ $\{a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,\ a_2x + \ldots = 0\}$ · **(3)→(1)**: ทำ GE กับระบบ 2 สมการ 3 ตัวแปร ตัวแปรอิสระ $= t$ (ทิศ $= n_1 \times n_2$ ใช้เช็ก) · **(1)→(3)**: ตัด $t$ ออก · เส้นผ่าน 2 จุด: $d = Q - P$




**① จุด P (ฟ้า) = ค่าคงที่ · ทิศ d (ส้ม) = สัมประสิทธิ์ของ t**

(1) พารามิเตอร์: **x = 4 + 2t, y = −5 + 4t, z = 1 + 3t**

(2) เวกเตอร์: r = **(4, −5, 1)** + t**(2, 4, 3)**

(3) จุดตัดของ 2 ระนาบ: {**x+y+2z+11=0, x+y+z+9=0**}

ทิศของ (3) = $n_1 \times n_2$ = (1, 1, 2)×(1, 1, 1) = **(−1, 1, 0)**

(3)→(1): ทำ GE กับ 2 สมการ 3 ตัวแปร ให้ตัวแปรอิสระ = t · (1)→(3): ตัด t ออก

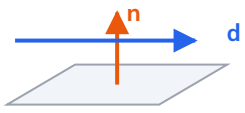
**② พารามิเตอร์ 1 ตัว = เส้นเสมอ · 2 ตัว (t, s) = ระนาบ**

รูป 10.5 · โจทย์ 8: $L_2$ ให้มาแบบพารามิเตอร์ ⇒ จุด $(4, -5, 1)$ ทิศ $(2, 4, 3)$ อ่านได้ทันที · $L_1$ ให้มาเป็น 2 ระนาบ ⇒ ทิศต้องคำนวณจาก $n_1 \times n_2 = (-1, 1, 0)$ ไม่ใช่ $n_1$ หรือ $n_2$

**5** **ระนาบ กับ ระนาบ**: $n_1 \parallel n_2$ $(n_1 = k\,n_2)$? **ใช่** ⇒ แทนจุดหนึ่งของระนาบ 1 ลงระนาบ 2: ได้ 0 ⇒ **ทับกัน** · ไม่ 0 ⇒ **ขนาน** · **ไม่ใช่** ⇒ ตัดกันเป็นเส้น (แก้ระบบข้อ 4) · ตั้งฉาก $\iff n_1 \cdot n_2 = 0$ หยุด

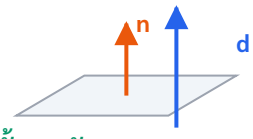
**6** **เส้น กับ ระนาบ**: $d \cdot n = 0$? **ใช่** ⇒ แทนจุดบนเส้นลงระนาบ: 0 ⇒ เส้น**อยู่ใน**ระนาบ · ไม่ 0 ⇒ **ขนาน** · **ไม่ใช่** ⇒ ตัดกัน 1 จุด: แทน $x(t), y(t), z(t)$ ลงสมการระนาบ แก้ $t$ แทนกลับ · ตั้งฉาก $\iff d \parallel n$ หยุด

**① n·d = 0**



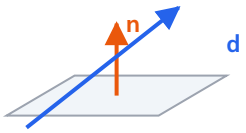

**ขนานกับระนาบ**
แทนจุดบนเส้นลงระนาบ:
0 = อยู่ใน

**② d = k·n**




**ตั้งฉากกับระนาบ**
ทิศเป็นตัวคูณของนอร์มัล

**③ n·d ≠ 0**




**ตัดกัน 1 จุด**
แทน x(t), y(t), z(t) ลงระนาบ แก้ t

รูป 10.6 · เส้นกับระนาบ ดูจาก $n \cdot d$: เป็น 0 ⇒ ทิศนอนไปกับระนาบ (ขนานหรืออยู่ใน) · $d$ เป็นตัวคูณของ $n$ ⇒ ตั้งฉาก · อื่น ๆ ⇒ ทะลุระนาบ 1 จุด แก้ $t$

**7** **เส้น กับ เส้น**: $d_1 \parallel d_2$? **ใช่** ⇒ แทนจุดของ $L_1$ ใน $L_2$: อยู่ ⇒ ทับกัน · ไม่อยู่ ⇒ ขนาน · **ไม่ใช่** ⇒ **ตัดกันหรือไขว้ (skew)** ต้องแก้ระบบ: ถ้า $L_1$ ให้เป็น 2 ระนาบ และ $L_2$ พารามิเตอร์ ⇒ แทน $L_2$ ลงทั้งสองระนาบ ได้สมการเชิงเส้นของ $t$ สองอัน · $t$ **เท่ากัน** ⇒ ตัดกัน แทน $t$ กลับได้จุด · $t$ ไม่เท่ากัน ⇒ ไขว้ · (ทั้งคู่พารามิเตอร์: ตั้ง $x_1(t) = x_2(s)$ ฯลฯ 3 สมการ 2 ตัวแปร ⇒ มีคำตอบ = ตัดกัน, ไม่มี = ไขว้) หยุด

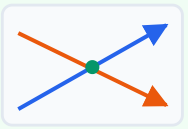
**① ขนาน**



$d_1 = k \cdot d_2$

แทนจุดของ $L_1$ ใน $L_2$:
อยู่ = ทับกัน · ไม่อยู่ = ขนาน

**② ตัดกัน**



$d_1 \nparallel d_2$, t เท่ากัน

t จากทั้งสองระนาบเท่ากัน
แทน t กลับได้จุดตัด

**③ ไขว้ (skew)**



$d_1 \nparallel d_2$, t ไม่เท่ากัน

ไม่ตัดกันและไม่ขนาน
มีเฉพาะใน 3 มิติ

**① เช็กทิศก่อนเสมอ ($d_1 \parallel d_2$ ?) · ② ไม่ขนาน ⇒ แก้ระบบหา t: เท่ากัน = ตัดกัน, ไม่เท่ากัน = ไขว้**

รูป 10.7 · เส้นกับเส้นใน 3 มิติมี 3 แบบ (โจทย์ 8 ตกกรณีตัดกัน): ไม่ขนานยังสรุปไม่ได้ ต้องแก้หา $t$ — ได้ค่าเดียวกันจากทั้งสองระนาบจึงตัดกัน ไม่เท่ากันคือไขว้

**สูตร**

2 มิติ: $ax + by + c = 0$ นอร์มัล $(a, b)$ ทิศ $(-b, a)$ · $u \times v = (u_2v_3 - u_3v_2,\ u_3v_1 - u_1v_3,\ u_1v_2 - u_2v_1)$ ตั้งฉากกับทั้งคู่ · $u \parallel v \iff u \times v = 0 \iff u = kv$ · $u \perp v \iff u \cdot v = 0$ · ระนาบจากจุด $P_0$ นอร์มัล $n$: $n \cdot (r - P_0) = 0$ · ระนาบ 2 อันตัดกัน ⇒ ระบบมี 1 ตัวแปรอิสระ (เส้น) · ทับกัน ⇒ 2 ตัวแปรอิสระ · ขนาน ⇒ ไม่มีคำตอบ · เส้น–ระนาบ: ระบบ $3 \times 3$ เดียว ⇒ ตัด, ไม่มี ⇒ ขนาน, อนันต์ ⇒ อยู่ใน

**กับดักที่ข้อสอบชอบ**

- **"ไม่ตัดกัน" ≠ "ขนาน"** — ใน 3 มิติเส้นที่ไม่ตัดกันอาจ**ไขว้** (ทิศไม่ขนานกันแต่ระบบไม่มีคำตอบ) · ต้องเช็กทิศก่อนเสมอ
- นอร์มัลของ $5x + 3y - z + 1 = 0$ คือ $(5, 3, -1)$ หรือ $(-5, -3, 1)$ — ตัวเลือก $(5, 3, 1)$ ✗ (เครื่องหมาย $z$ ไม่ตาม) · "ผ่านจุดกำเนิด" ✗ เพราะ $d = +1 \neq 0$
- จุดตัดเส้น–เส้น ต้องได้ $t$ **เท่ากันจากทั้งสองระนาบ** ได้แค่อันเดียวยังสรุปไม่ได้ · **เฉลยพิมพ์ในข้อสอบฝึกโจทย์ 8** $(2, -9, 2)$ **ผิด** — แทนในระนาบแรกได้ $2 - 9 + 4 + 11 = 8 \neq 0$ · ที่ถูกคือ $(2, -9, -2)$
- ทิศของเส้นที่นิยามด้วย 2 ระนาบ คือ $n_1 \times n_2$ **ไม่ใช่** $n_1$ หรือ $n_2$ · พารามิเตอร์ 1 ตัว = เส้นเสมอ ไม่ว่าจะมีกี่ตัวแปร ("สมการ 2 อันของ $t$" ยังเป็นเส้นเดียว ไม่ใช่ "two lines")

## (ง) ตัวอย่างจากข้อสอบฝึก — ทุกบรรทัด

**โจทย์ 8:** $L_1 : \{x + y + 2z + 11 = 0,\ x + y + z + 9 = 0\}$ **กับ** $L_2 : x = 2t + 4,\ y = 4t - 5,\ z = 3t + 1$ **ตัดกันไหม ที่ไหน**

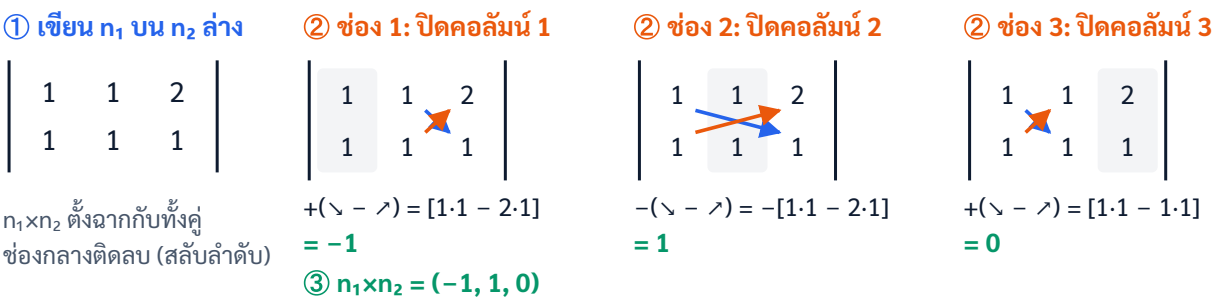
**ทิศ:** $d_1 = n_1 \times n_2 = (1,1,2) \times (1,1,1) = (1\cdot 1 - 2\cdot 1,\ 2\cdot 1 - 1\cdot 1,\ 1\cdot 1 - 1\cdot 1) = (-1,1,0) \cdot d_2 = (2,4,3)$ · ไม่เป็นตัวคูณกัน ⇒ ไม่ขนาน ⇒ ตัดกันหรือไขว้

**แทน $L_2$ ลงระนาบแรก:** $(2t+4) + (4t-5) + 2(3t+1) + 11 = 2t + 4t + 6t + 4 - 5 + 2 + 11 = 12t + 12 = 0 \Rightarrow t = -1$

**แทนลงระนาบสอง:** $(2t+4) + (4t-5) + (3t+1) + 9 = 9t + 9 = 0 \Rightarrow t = -1$ · **เท่ากัน** ⇒ ตัดกัน

แทน $t = -1$ ใน $L_2$: $x = 2(-1) + 4 = 2,\ y = 4(-1) - 5 = -9,\ z = 3(-1) + 1 = -2 \Rightarrow$ **จุดตัด** $(2, -9, -2)$ ·

ตรวจ: $2 - 9 - 4 + 11 = 0$ ✓ $2 - 9 - 2 + 9 = 0$ ✓ · (เฉลยที่พิมพ์มา $(2, -9, 2)$: $2 - 9 + 4 + 11 = 8 \neq 0$ ✗ พิมพ์ผิด)




โจทย์ 8 — ทิศของ $L_1$: $n_1 \times n_2$ ด้วยลูกศรไขว้ได้ $(-1,1,0)$ · เทียบกับ $d_2 = (2,4,3)$ ไม่เป็นตัวคูณกัน ⇒ ไม่ขนาน ⇒ ต้องแก้หา $t$




**③ ตัดกัน ⇒ แทน t = −1 ใน $L_2$ ได้จุด (2, −9, −2) แล้วแทนกลับทั้งสองระนาบต้องได้ 0**

โจทย์ 8 — จุดตัดสิน: แทน $x, y, z$ ของ $L_2$ ลงระนาบทั้งสองของ $L_1$ ได้ $t = -1$ เท่ากัน ⇒ ตัดกันที่ $(2, -9, -2)$ (เฉลยพิมพ์ $(2, -9, 2)$ ผิด แทนแล้วได้ 8)

**Q5: ระนาบ $5x + 3y - z + 1 = 0$**

✗ ผ่าน $(0,0,0)$: $0 + 0 - 0 + 1 = 1 \neq 0$

✗ นอร์มัล $(5,3,1)$: ไม่ใช่ $k(5,3,-1)$ (ช่อง $z$ เครื่องหมายผิด)

✓ นอร์มัล $(-5,-3,1) = -1 \cdot (5,3,-1)$

✗ $(5,3,1)$: $25 + 9 - 1 + 1 = 34 \neq 0$

✗ $(-3,5,0)$: $-15 + 15 - 0 + 1 = 1 \neq 0$

**Q1: $x = 3t + 1,\ y = 2t - 1$ คืออะไร**

พารามิเตอร์ 1 ตัว ⇒ เส้นตรง · ตัวแปรแค่ $x, y$ ⇒ 2 มิติ

⇒ **a line in 2D** · จุด $(1,-1)$ ทิศ $(3,2)$ · ตัด $t$: $2x - 3y = 2(3t+1) - 3(2t-1) = 5 \Rightarrow 2x - 3y = 5$ (ตรวจ $t = 0$: $2 + 3 = 5$ ✓)

**ระนาบผ่าน 3 จุด (ตัวอย่างสั้น):**

$P(1,0,0), Q(0,1,0), R(0,0,1)$: $v_1 = (-1,1,0),\ v_2 = (-1,0,1) \cdot n = v_1 \times v_2 = (1 \cdot 1 - 0,\ 0 - (-1)(1),\ 0 - (1)(-1)) = (1,1,1)$ · ระนาบ $1(x-1) + 1(y-0) + 1(z-0) = 0 \Rightarrow x + y + z = 1$ · ตรวจ $Q$: $0 + 1 + 0 = 1$ ✓

# 11 เมทริกซ์ใหญ่ 4×4 · 5×5 · 6×6 และระบบ 4–6 ตัวแปร

## (ก) ขั้นตอน — "GE ก่อน · cofactor เฉพาะแถวที่เกือบเป็น 0 หมด"

1. **det ขนาด $n \geq 4$ ทางหลัก = GE:** ใช้ $R_i \leftarrow R_i - kR_j$ (det ไม่เปลี่ยน) ทำใต้ทแยงให้เป็น 0 ทีละคอลัมน์ · pivot เป็น 0 หรือหารไม่ลงตัว ⇒ **สลับแถว** (นับจำนวนครั้ง) · จบ: det $= (-1)^{\text{จำนวนสลับ}} \times$ ผลคูณแนวทแยง **หยุด**
2. **cofactor ใช้เมื่อมีแถว/คอลัมน์ที่เกือบเป็น 0 หมด:** กางตามแถวนั้น ช่อง 0 ทิ้ง เหลือพจน์ $\pm a_{ij}M_{ij}$ ไม่กี่พจน์ · ตารางเครื่องหมาย 4×4 คือ $+\,-\,+-$ สลับกันทั้งแถวและคอลัมน์ · $M_{ij}$ เป็น 3×3 ⇒ กางต่อ (หัวข้อ 9) หรือ GE · ทำสองวิธีค่าต้อง**ตรงกัน**
3. **ระบบ $n$ ตัวแปร $m$ สมการ ($n = 4, 5, 6$):** เขียน AM ทำ GE/GJE ให้เป็น RREF · **วงกลมคอลัมน์ที่ไม่มี pivot** = ตัวแปรอิสระ ตั้งชื่อ $s, t, \ldots$ · อ่านแถว pivot เป็นสมการ ย้ายตัวแปรอิสระไปขวา · ประกอบเวกเตอร์**ทีละคอลัมน์**: $\bar{x} = \bar{p} + s\bar{v}_1 + t\bar{v}_2$ (ช่องของตัวแปรอิสระเองใส่ 1 ในเวกเตอร์ของมัน) · **ตรวจ 1 จุด**: แทน $s = t = 1$ ลงสมการเดิมทุกแถว **หยุด**
4. **Cramer 4×4 (เมื่อโจทย์สั่งเท่านั้น):** $D = \det A \neq 0$ · $D_i$ = det ของ $A$ ที่แทนคอลัมน์ $i$ ด้วย $\bar{b}$ · $x_i = D_i/D$ · ต้องหา det 4×4 ทั้งหมด $n + 1 = 5$ ตัว ⇒ **GE เร็วกว่า**เสมอเมื่อ $n \geq 4$ — ถ้าโจทย์ไม่บังคับ ใช้ GE
5. **เส้นกับเส้น (พารามิเตอร์ทั้งคู่):** เช็ก $\bar{d}_1 \times \bar{d}_2$ ก่อน: $= 0$ ⇒ ขนาน (แทนจุดของ $L_1$ ใน $L_2$: ได้ $t$ เดียวกันทุกพิกัด = ทับกัน) · $\neq 0$ ⇒ ตั้ง $P_1 + s\bar{d}_1 = P_2 + t\bar{d}_2$ ได้ 3 สมการ **แก้ 2 สมการหา $s, t$ แล้วแทนสมการที่ 3**: ตรง ⇒ ตัดกัน (แทน $s$ กลับได้จุด) · ไม่ตรง ⇒ ไขว้ **หยุด**
6. **เส้นกับระนาบ:** แทน $x(s), y(s), z(s)$ ลงระนาบ ⇒ $\bar{n} \cdot P + s(\bar{n} \cdot \bar{d}) = e \cdot \bar{n} \cdot \bar{d} \neq 0$ ⇒ แก้ $s$ ได้จุดตัด 1 จุด · $= 0$ ⇒ ขนาน (หรืออยู่ในถ้า $\bar{n} \cdot P = e$)
7. **ระนาบกับระนาบ:** ทิศของเส้นตัด $= \bar{n}_1 \times \bar{n}_2$ · จุดร่วม 1 จุด: ตั้ง $z = 0$ (หรือ $x = 0/y = 0$) แก้ระบบ 2×2 ที่เหลือ · เส้นตัด $=$ จุด $+t(\bar{n}_1 \times \bar{n}_2)$ · ตรวจแทนจุดในทั้งสองระนาบ **หยุด**

**สูตร / กฎที่ใช้ในหัวข้อนี้**

det: สลับแถว ⇒ $\times(-1)$ · $R_i - kR_j$ ⇒ เท่าเดิม · สามเหลี่ยม = ผลคูณทแยง · กางแถว $i$: $\det A = \sum_j (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$ (ช่อง 0 ทิ้ง) · ระบบ: จำนวนตัวแปรอิสระ $= n -$ จำนวน pivot · Cramer $n \times n$ ใช้ det $n + 1$ ตัว · เส้น–เส้น: $\bar{d}_1 \times \bar{d}_2 = 0$ ขนาน · เส้น–ระนาบ: $\bar{n} \cdot \bar{d} = 0$ ขนาน · ระนาบ–ระนาบ: ทิศเส้นตัด $\bar{n}_1 \times \bar{n}_2$

**กับดักที่ข้อสอบชอบ**

- ใช้กฎ Sarrus (3×3) กับ 4×4 — **ผิด** · ลืมคูณ $(-1)$ ตามจำนวนครั้งที่สลับแถว · ลืมเครื่องหมายลบของ $(-1)^{i+j}$ เมื่อ $i + j$ คี่ (คอลัมน์ 2, 4 ของแถว 1)
- ระบบ 5 ตัวแปร: เวกเตอร์คำตอบต้องยาว **5 ช่อง** และมีพารามิเตอร์เท่ากับจำนวนคอลัมน์ไร้ pivot · ช่องของตัวแปรอิสระในส่วนค่าคงที่ต้องเป็น 0
- เส้นสองเส้นใน 3 มิติ: แก้ $s, t$ จาก 2 สมการแล้ว**ไม่ตรวจสมการที่ 3** ⇒ อาจตอบ "ตัดกัน" ทั้งที่ไขว้ · ระนาบ–ระนาบ: จุดร่วมต้องอยู่**ทั้งสอง**ระนาบ (แทนตรวจทั้งคู่)

## (ง) ตัวอย่าง 11.1 — det 4×4 สองวิธี ค่าต้องตรงกัน

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2&0\\2&1&0&3\\0&3&1&1\\1&0&1&2\end{pmatrix}$$ — แถว 1 มี 0 สองตัว

**วิธี cofactor แถว 1:** $\det A=+1\cdot M_{11}-0+2\cdot M_{13}-0\cdot M_{11}=\begin{vmatrix}1&0&3\\3&1&1\\0&1&2\end{vmatrix}=1(2-1)-0+3(3-0)=1+9=10\cdot M_{13}=\begin{vmatrix}2&1&3\\0&3&1\\1&0&2\end{vmatrix}=2(6-0)-1(0-1)+3(0-3)=12+1-9=4\Rightarrow \det A=1\cdot 10+2\cdot 4=$ **18**

**① กางแถว 1 (0 ทิ้งได้)**

$$\begin{vmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{2}&\mathbf{0}\\2&1&0&3\\0&3&1&1\\1&0&1&2\end{vmatrix}$$

เครื่องหมาย $(-1)^{i+j}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| + | − | + | − |
| − | + | − | + |
| + | − | + | − |
| − | + | − | + |

**② ปิดแถว 1 คอลัมน์ 1**

$$\begin{bmatrix}\mathbf{1}&0&2&0\\2&1&0&3\\0&3&1&1\\1&0&1&2\end{bmatrix}\Rightarrow +1\cdot\begin{vmatrix}1&0&3\\3&1&1\\0&1&2\end{vmatrix}=+1\cdot 10=10$$

**② ปิดแถว 1 คอลัมน์ 3**

$$\begin{bmatrix}1&0&\mathbf{2}&0\\2&1&0&3\\0&3&1&1\\1&0&1&2\end{bmatrix}\Rightarrow +2\cdot\begin{vmatrix}2&1&3\\0&3&1\\1&0&2\end{vmatrix}=+2\cdot 4=8$$

**③ det = 10 + 8 = 18**

รูป 11.1 · กางแถว 1 ของ 4×4: ช่อง 0 ทิ้ง เหลือ $+1\cdot M_{11}$ และ $+2\cdot M_{13}$ (เครื่องหมายช่อง (1,3) เป็นบวกเพราะ $1+3$ คู่) · minor แต่ละตัวเป็น 3×3 ต้องกางต่อ

**① เลือกแถว 1 (ฟ้า)**

$$\begin{vmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{3}\\3&1&1\\0&1&2\end{vmatrix}$$

เครื่องหมาย $(-1)^{i+j}$

| | | |
|---|---|---|
| + | − | + |
| − | + | − |
| + | − | + |

**② ปิดแถว 1 คอลัมน์ 1**

$$\begin{bmatrix}\mathbf{1}&0&3\\3&1&1\\0&1&2\end{bmatrix}\quad M_{11}=\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}$$

$= 1\cdot 2-1\cdot 1=1$

$+\,1\cdot 1=1$

**② ปิดแถว 1 คอลัมน์ 2**

$$\begin{bmatrix}1&\mathbf{0}&3\\3&1&1\\0&1&2\end{bmatrix}\quad M_{12}=\begin{vmatrix}3&1\\0&2\end{vmatrix}$$

$= 3\cdot 2-1\cdot 0=6$

$-\,0\cdot 6=0$

**② ปิดแถว 1 คอลัมน์ 3**

$$\begin{bmatrix}1&0&\mathbf{3}\\3&1&1\\0&1&2\end{bmatrix}\quad M_{13}=\begin{vmatrix}3&1\\0&1\end{vmatrix}$$

$= 3\cdot 1-1\cdot 0=3$

$+\,3\cdot 3=9$

**③ det = 1 + 0 + 9 = 10**

รูป 11.2 · $M_{11}$ กางแถว 1 ของมันเอง: ช่องกลางเป็น 0 ทิ้ง $\Rightarrow 1\cdot 1+3\cdot 3=10$

**① เลือกแถว 1 (ฟ้า)**

$$\begin{vmatrix}\mathbf{2}&\mathbf{1}&\mathbf{3}\\0&3&1\\1&0&2\end{vmatrix}$$

เครื่องหมาย $(-1)^{i+j}$

| | | |
|---|---|---|
| + | − | + |
| − | + | − |
| + | − | + |

**② ปิดแถว 1 คอลัมน์ 1**

$$\begin{bmatrix}\mathbf{2}&1&3\\0&3&1\\1&0&2\end{bmatrix}\quad M_{11}=\begin{vmatrix}3&1\\0&2\end{vmatrix}$$

$= 3\cdot 2-1\cdot 0=6$

$+\,2\cdot 6=12$

**② ปิดแถว 1 คอลัมน์ 2**

$$\begin{bmatrix}2&\mathbf{1}&3\\0&3&1\\1&0&2\end{bmatrix}\quad M_{12}=\begin{vmatrix}0&1\\1&2\end{vmatrix}$$

$= 0\cdot 2-1\cdot 1=-1$

$-\,1\cdot(-1)=1$

**② ปิดแถว 1 คอลัมน์ 3**

$$\begin{bmatrix}2&1&\mathbf{3}\\0&3&1\\1&0&2\end{bmatrix}\quad M_{13}=\begin{vmatrix}0&3\\1&0\end{vmatrix}$$

$= 0\cdot 0-3\cdot 1=-3$

$+\,3\cdot(-3)=-9$

**③ det = 12 + 1 + (−9) = 4**

รูป 11.3 · $M_{13}$ กางแถว 1: $2\cdot 6-1\cdot(-1)+3\cdot(-3)=4\Rightarrow \det A=1\cdot 10+2\cdot 4=18$

**วิธี GE:** $R_2 - 2R_1$, $R_4 - R_1$, $R_3 - 3R_2$ แล้วช่อง (3,3) เป็น 13 หาร (4,3) $= -1$ ไม่ลงตัว ⇒ สลับ $R_3 \leftrightarrow R_4$ (นับ 1 ครั้ง) แล้ว $R_4 + 13R_3$ ⇒ สามเหลี่ยม ทแยง $1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 18 = -18$ ⇒ $\det A = (-1)^1 \times (-18) = \boxed{18}$ ตรงกับ cofactor ✓

**① ก่อน**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

**② ทำทีละแถว (ป้าย op ทุกครั้ง)**

**$R_2 \to R_2 - 2R_1$**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $R_2$: | 2 | 1 | 0 | 3 |
| $-2 \cdot R_1$: | 2 | 0 | 4 | 0 |
| **= $R_2$ ใหม่:** | **0** | **1** | **−4** | **3** |

**$R_4 \to R_4 - R_1$**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $R_4$: | 1 | 0 | 1 | 2 |
| $-1 \cdot R_1$: | 1 | 0 | 2 | 0 |
| **= $R_4$ ใหม่:** | **0** | **0** | **−1** | **2** |

**$R_3 \to R_3 - 3R_2$**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $R_3$: | 0 | 3 | 1 | 1 |
| $-3 \cdot R_2$: | 0 | 3 | −12 | 9 |
| **= $R_3$ ใหม่:** | **0** | **0** | **13** | **−8** |

**$R_3 \leftrightarrow R_4$**

**$R_4 \to R_4 + 13R_3$**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $R_4$: | 0 | 0 | 13 | −8 |
| $+13 \cdot R_3$: | 0 | 0 | −13 | 26 |
| **= $R_4$ ใหม่:** | **0** | **0** | **0** | **18** |

**③ หลัง**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-4} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{18} \end{bmatrix}$$

**④ ทแยง 1·1·(−1)·18 = −18 · สลับ 1 ครั้ง ⇒ det = +18**

รูป 11.4 · GE ทั้งห้าขั้นในรูปเดียว: ทำใต้ทแยงเป็น 0 ทีละคอลัมน์ · สลับแถวเมื่อหารไม่ลงตัว (ที่นี่ pivot 13 กับ −1) แล้วคูณเครื่องหมายคืน

## (ง) ตัวอย่าง 11.2 — det 5×5 และ 6×6 ด้วย GE อย่างเดียว

$$B=\begin{pmatrix}1&0&0&2&0\\0&2&0&0&1\\3&0&1&0&0\\0&0&0&1&4\\0&1&0&0&3\end{pmatrix}\to \det B=5$$

$R_3-3R_1\Rightarrow(0,0,1,-6,0)$ · คอลัมน์ 2: pivot 2 หาร 1 ไม่ลงตัว ⇒ **สลับ** $R_2\leftrightarrow R_5$ (1 ครั้ง) แล้ว $R_5-2R_2\Rightarrow$ $(0,0,0,0,-5)$ · คอลัมน์ 3, 4 ใต้ทแยงเป็น 0 อยู่แล้ว ⇒ ทแยง $1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot(-5)=-5\Rightarrow\det B=(-1)^1(-5)=$ 5

**① ก่อน**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 2 | 0 |
| 0 | 2 | 0 | 0 | 1 |
| 3 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 4 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 3 |

**② ทำทีละแถว (ป้าย op ทุกครั้ง)**

**$R_3 \to R_3 - 3R_1$**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $R_3$: | 3 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $-\,3\cdot R_1$: | 3 | 0 | 0 | 6 | 0 |
| **= $R_3$ ใหม่:** | **0** | **0** | **1** | **−6** | **0** |

**$R_2 \leftrightarrow R_5$**

**$R_5 \to R_5 - 2R_2$**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $R_5$: | 0 | 2 | 0 | 0 | 1 |
| $-\,2\cdot R_2$: | 0 | 2 | 0 | 0 | 6 |
| **= $R_5$ ใหม่:** | **0** | **0** | **0** | **0** | **−5** |

**③ หลัง**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 2 | 0 |
| **0** | **1** | **0** | **0** | **3** |
| **0** | **0** | **1** | **−6** | **0** |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 4 |
| **0** | **0** | **0** | **0** | **−5** |

**④ ทแยง = −5 · สลับ 1 ครั้ง ⇒ det B = 5**

รูป 11.5 · 5×5: มี 0 เยอะจึงเหลืองานแค่ 3 ขั้น — สลับแถวเพื่อให้ pivot เป็น 1 (เลี่ยงเศษส่วน) แล้วคูณ $-1$ คืนตอนจบ

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \det C = -71$$

$R_3 - 2R_1 \Rightarrow (0,0,1,0,-4,1) \cdot R_5 - 4R_2 \Rightarrow (0,0,0,-12,1,0) \cdot R_5 + 12R_4 \Rightarrow (0,0,0,0,1,24) \cdot R_6 - 3R_5 \Rightarrow$

$(0,0,0,0,0,-71)$ · ไม่สลับ ⇒ ทแยง $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-71) =$ $-71$

**① ก่อน**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 3 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 |
| 0 | 4 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 1 |

**② ทำทีละแถว (ป้าย op ทุกครั้ง)**

**$R_3 \to R_3 - 2R_1$**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $R_3$: | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $-2 \cdot R_1$: | 2 | 0 | 0 | 0 | 4 | 0 |
| **= $R_3$ ใหม่:** | **0** | **0** | **1** | **0** | **−4** | **1** |

**$R_5 \to R_5 - 4R_2$**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $R_5$: | 0 | 4 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $-4 \cdot R_2$: | 0 | 4 | 0 | 12 | 0 | 0 |
| **= $R_5$ ใหม่:** | **0** | **0** | **0** | **−12** | **1** | **0** |

**$R_5 \to R_5 + 12R_4$**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $R_5$: | 0 | 0 | 0 | −12 | 1 | 0 |
| $+12 \cdot R_4$: | 0 | 0 | 0 | 12 | 0 | 24 |
| **= $R_5$ ใหม่:** | **0** | **0** | **0** | **0** | **1** | **24** |

**$R_6 \to R_6 - 3R_5$**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $R_6$: | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 1 |
| $-3 \cdot R_5$: | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 72 |
| **= $R_6$ ใหม่:** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **−71** |

**③ หลัง**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 3 | 0 | 0 |
| **0** | **0** | **1** | **0** | **−4** | **1** |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 |
| **0** | **0** | **0** | **0** | **1** | **24** |
| **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **−71** |

**④ ไม่มีการสลับ ⇒ det C = ผลคูณทแยง = −71**

รูป 11.6 · 6×6 ด้วย GE 4 ขั้น: ทำทีละคอลัมน์ ใช้แถว pivot ล่าสุดเสมอ (ขั้นที่ 3 ใช้ $R_4$ ที่ยังไม่เปลี่ยน ขั้นที่ 4 ใช้ $R_5$ ใหม่)

## (ง) ตัวอย่าง 11.3 — ระบบ 4 และ 5 ตัวแปร → รูปเวกเตอร์ $\bar{x} = \bar{p} + s\bar{v}_1 + t\bar{v}_2$

**4 ตัวแปร 3 สมการ:** $x_1 + 2x_2 + x_4 = 3,\ x_3 + 2x_4 = 1,\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 4$

$R_3 - R_1 \Rightarrow (0,0,1,2\,|\,1)$ · $R_3 - R_2 \Rightarrow (0,0,0,0\,|\,0)$ สมการหาย 1 · RREF มี pivot คอลัมน์ 1, 3 ⇒ **อิสระ** $x_2 = s,\ x_4 = t$ · แถว 1: $x_1 = 3 - 2s - t$ · แถว 2: $x_3 = 1 - 2t$ ⇒ $\bar{x} = (3,0,1,0) + s(-2,1,0,0) + t(-1,0,-2,1)$ ·

ตรวจ $s = t = 1$: $(0,1,-1,1)$ แทน: $0 + 2 + 1 = 3$ ✓ $-1 + 2 = 1$ ✓ $0 + 2 - 1 + 3 = 4$ ✓

① ก่อน

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 0 | 1 | 3 |
| 0 | 0 | 1 | 2 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 3 | 4 |

② ทำทีละแถว (ป้าย op ทุกครั้ง)

$R_3 \to R_3 - R_1$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $R_3$: | 1 | 2 | 1 | 3 | 4 |
| $-1 \cdot R_1$: | 1 | 2 | 0 | 1 | 3 |
| = $R_3$ ใหม่: | 0 | 0 | 1 | 2 | 1 |

$R_3 \to R_3 - R_2$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $R_3$: | 0 | 0 | 1 | 2 | 1 |
| $-1 \cdot R_2$: | 0 | 0 | 1 | 2 | 1 |
| = $R_3$ ใหม่: | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

③ หลัง

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 0 | 1 | |
| 0 | 0 | 1 | 2 | |
| 0 | 0 | 0 | 0 | |

④ แถว 3 เป็น 0 = 0 ⇒ เหลือ 2 pivot จาก 4 ตัวแปร ⇒ อิสระ 2 ตัว

รูป 11.7 · GE: แถว 3 = แถว 1 + แถว 2 จึงหายไปทั้งแถว (ไม่ใช่ขัดกัน เพราะขวาก็เป็น 0)

① pivot (วงกลม) · ไร้ pivot = อิสระ

| | อิสระ | | อิสระ | |
|---|---|---|---|---|
| (1) | 2 | 0 | 1 | 3 |
| 0 | 0 | (1) | 2 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | |

② อ่านแถว pivot เป็นสมการ ย้ายตัวแปรอิสระไปขวา

$x_1 = 3 - 2s - t$

$x_3 = 1 - 2t$

③ ประกอบเวกเตอร์ (ช่องอิสระเอง = 1 ในเวกเตอร์ของมัน)

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

อิสระ 2 ตัว = n − k = 4 − 2 ⇒ อนันต์

รูป 11.8 · คอลัมน์ 2 และ 4 ไร้ pivot (วงกลม/เส้นประ) = อิสระ · ประกอบเวกเตอร์ทีละคอลัมน์: ช่องของ $s$ ในเวกเตอร์ของ $s$ เป็น 1 ช่องอื่นเป็น 0

**5 ตัวแปร 3 สมการ:** $x_1 + 2x_3 + x_5 = 4,\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_5 = 6,\ x_2 + x_3 + x_4 + 5x_5 = 3$

$R_2 - R_1 \Rightarrow (0,1,1,0,3\,|\,2)$ · $R_3 - R_2 \Rightarrow (0,0,0,1,2\,|\,1)$ ⇒ เป็น RREF แล้ว pivot คอลัมน์ 1, 2, 4 ⇒ **อิสระ** $x_3 = s,\ x_5 = t$ $(5-3=2$ ตัว$)$ · $x_1 = 4-2s-t,\ x_2 = 2-s-3t,\ x_4 = 1-2t$ ⇒

$\bar{x} = (4,2,0,1,0) + s(-2,-1,1,0,0) + t(-1,-3,0,-2,1)$ · ตรวจ $s=t=1$: $(1,-2,1,-1,1)$: $1+2+1=4$ ✓

$1-2+3+4=6$ ✓ $-2+1-1+5=3$ ✓

① ก่อน

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 5 & 3 \end{array}\right]$$

② ทำทีละแถว (ป้าย op ทุกครั้ง)

$R_2 \to R_2 - R_1$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $R_2$: | 1 | 1 | 3 | 0 | 4 \| 6 |
| $-1\cdot R_1$: | 1 | 0 | 2 | 0 | 1 \| 4 |
| = $R_2$ ใหม่: | 0 | 1 | 1 | 0 | 3 \| 2 |

$R_3 \to R_3 - R_2$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $R_3$: | 0 | 1 | 1 | 1 | 5 \| 3 |
| $-1\cdot R_2$: | 0 | 1 | 1 | 0 | 3 \| 2 |
| = $R_3$ ใหม่: | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 \| 1 |

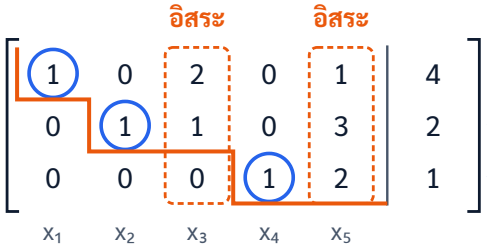
③ หลัง

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

④ ได้ RREF ทันที (เหนือ pivot เป็น 0 อยู่แล้ว) · 3 pivot จาก 5 ตัวแปร ⇒ อิสระ 2 ตัว

รูป 11.9 · GE สองขั้น: ขั้นที่สองใช้แถว 2 ใหม่ (0,1,1,0,3|2) ลบออกจากแถว 3

① pivot (วงกลม) · ไร้ pivot = อิสระ




② อ่านแถว pivot เป็นสมการ ย้ายตัวแปรอิสระไปขวา

$x_1 = 4 - 2s - t$

$x_2 = 2 - s - 3t$

$x_4 = 1 - 2t$

③ ประกอบเวกเตอร์ (ช่องอิสระเอง = 1 ในเวกเตอร์ของมัน)

$$x = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

อิสระ 2 ตัว = n − k = 5 − 3 ⇒ อนันต์

รูป 11.10 · เวกเตอร์ยาว 5 ช่อง พารามิเตอร์ 2 ตัว = จำนวนคอลัมน์ไร้ pivot · ค่าคงที่มี 0 ในช่อง 3 และ 5 (ช่องของตัวแปรอิสระ)

## (ง) ตัวอย่าง 11.4 — Cramer 4×4 (หา $x_1$ เต็ม ที่เหลือบอกค่า)

$A\bar{x} = \bar{b}$ **กับ** $A$ **จาก 11.1 (**$D = 18$**) และ** $\bar{b} = (5, 1, -1, 3)$

$D_1 = \det A_1$, $A_1$ = แทนคอลัมน์ 1 ด้วย $\bar{b}$ · กางแถว 1 (0 สองตัว): $D_1 = +5 \cdot M_{11} + 2 \cdot M_{13}$ · $M_{11} = 10$ (เหมือน 11.1 เพราะปิดคอลัมน์ 1 ทิ้ง $\bar{b}$ ไปด้วย) · $M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1(6-0) - 1(-2-3) + 3(0-9) = 6 + 5 - 27 = -16$

$\Rightarrow D_1 = 50 - 32 = 18 \Rightarrow$ $x_1 = 18/18 = 1$ · ทำแบบเดียวกัน: $D_2 = -18,\ D_3 = 36,\ D_4 = 0 \Rightarrow \bar{x} = (1, -1, 2, 0)$

· ตรวจ $A\bar{x}$: $1 + 4 = 5$ ✓ $2 - 1 + 0 = 1$ ✓ $-3 + 2 = -1$ ✓ $1 + 2 = 3$ ✓

ต้นทุน: det 4×4 ห้าตัว $(D, D_1, \ldots, D_4)$ แต่ละตัวต้องกางหรือ GE — GE กับ AM $(A \mid \bar{b})$ ครั้งเดียวได้ทั้งสี่ตัวแปร จึงเร็วกว่า ใช้ Cramer เมื่อโจทย์สั่งหรือถามตัวแปรเดียว

**① D = det A**

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

**D = 18**

**b**

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

**② แทนคอลัมน์ 1 ด้วย b**

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

**$D_1 = 18$**

$x_1 = \frac{18}{18} = 1$

คอลัมน์อื่นทำแบบเดียวกัน:

**$D_2 = -18 \Rightarrow x_2 = -1$**

**$D_3 = 36 \Rightarrow x_3 = 2$**

**$D_4 = 0 \Rightarrow x_4 = 0$**

**③ x = (1, −1, 2, 0) แล้วแทนกลับสมการเดิม**

รูป 11.11 · แทนคอลัมน์ 1 ด้วย $\bar{b}$ (ส้ม) แล้วหา det · $x_1 = D_1/D = 18/18 = 1$ · คอลัมน์อื่นทำซ้ำ (det 4×4 อีก 3 ตัว)

**① กางแถว 1 (0 ทิ้งได้)**

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

**② ปิดแถว 1 คอลัมน์ 1**

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow +5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = +5 \cdot 10 = 50$$

**② ปิดแถว 1 คอลัมน์ 3**

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow +2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = +2 \cdot (-16) = -32$$

**③ det = 50 + (−32) = 18**

รูป 11.12 · $D_1$ กางแถว 1: $+5 \cdot M_{11} + 2 \cdot M_{13}$ — $M_{11}$ คือ 10 ตัวเดิม (รูป 11.2) ส่วน $M_{13}$ เปลี่ยนเพราะมี $\bar{b}$ อยู่ในคอลัมน์ 1

**① เลือกแถว 1 (ฟ้า)**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

เครื่องหมาย $(-1)^{i+j}$

| | | |
|---|---|---|
| + | − | + |
| − | + | − |
| + | − | + |

**② ปิดแถว 1 คอลัมน์ 1**

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$

$= 3\cdot 2 - 1\cdot 0 = 6$

**$+ 1\cdot 6 = 6$**

**② ปิดแถว 1 คอลัมน์ 2**

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$M_{12} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$

$= (-1)\cdot 2 - 1\cdot 3 = -5$

**$- 1\cdot(-5) = 5$**

**② ปิดแถว 1 คอลัมน์ 3**

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$M_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$

$= (-1)\cdot 0 - 3\cdot 3 = -9$

**$+ 3\cdot(-9) = -27$**

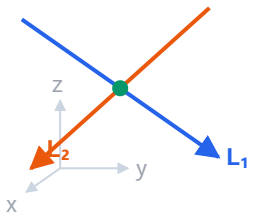
**③ det = 6 + 5 + (−27) = −16**

รูป 11.13 · $M_{13}$ ของ $A_1$: $6 + 5 - 27 = -16 \Rightarrow D_1 = 5 \cdot 10 + 2 \cdot (-16) = 18$

## (ง) ตัวอย่าง 11.5 — เส้น–เส้น · เส้น–ระนาบ · ระนาบ–ระนาบ

**เส้น–เส้น:** $L_1 : (1,0,2) + s(1,1,0)$ **กับ** $L_2 : (2,3,3) + t(1,-1,-1)$

$\bar{d_1} \times \bar{d_2} = (-1,1,-2) \neq 0 \Rightarrow$ ไม่ขนาน · เทียบพิกัด: $x$: $1+s = 2+t$ · $y$: $s = 3-t$ · $z$: $2 = 3-t \Rightarrow$ จาก $z$: $t = 1$ · จาก $y$: $s = 2$ · **ตรวจ** $x$: $1+2 = 3 = 2+1$ ✓ $\Rightarrow$ **ตัดกันที่** $(3,2,2)$




① **ทิศขนานกันไหม?** $d_1 \times d_2 = (-1, 1, -2) \neq 0 \Rightarrow$ ไม่ขนาน ⇒ ตัดกันหรือไขว้

② **เทียบทีละพิกัด $P_1 + s \cdot d_1 = P_2 + t \cdot d_2$**

| | |
|---|---|
| x: 1 + s = 2 + t | ← ไว้ตรวจ |
| **y: 0 + s = 3 − t** | ← ใช้แก้ |
| **z: 2 = 3 − t** | ← ใช้แก้ |

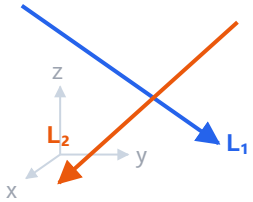
แก้สองสมการที่เลือก: **s = 2, t = 1**

③ ตรวจสมการที่เหลือ: **3 = 3 ✓**

**⇒ ตัดกันที่ $P_1 + 2 \cdot d_1$ = (3, 2, 2) (แทน t ใน $L_2$ ได้จุดเดียวกัน)**

รูป 11.14 · ตัดกัน: แก้ $s, t$ จากสองสมการที่ง่ายที่สุด ($z$ ให้ $t$ ทันที) แล้วสมการที่เหลือต้องตรง จึงสรุปว่าตัดกัน

**ไขว้:** $L_1$ กับ $L_3 : (0,0,0) + t(1,-1,-1)$: $z$: $2 = -t \Rightarrow t = -2$ · $y$: $s = -t = 2$ · $x$: $1+s = 3$ แต่ $t = -2 \Rightarrow 3 \neq -2$ ✗ $\Rightarrow$ **ไขว้** · **ขนาน:** $L_4 : (0,0,5) + t(2,2,0)$: $\bar{d_4} = 2\bar{d_1} \Rightarrow$ ขนาน · จุด $(1,0,2)$ อยู่บน $L_4$? $x$: $1 = 2t \Rightarrow t = \frac{1}{2}$ · $y$: $0 = 2t \Rightarrow t = 0$ ไม่ตรง $\Rightarrow$ **ขนาน ไม่ทับกัน**




① **ทิศขนานกันไหม?** $d_1 \times d_2 = (-1, 1, -2) \neq 0 \Rightarrow$ ไม่ขนาน ⇒ ตัดกันหรือไขว้

② **เทียบทีละพิกัด $P_1 + s \cdot d_1 = P_2 + t \cdot d_2$**

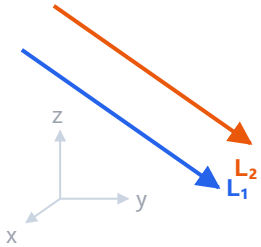
| | |
|---|---|
| x: 1 + s = 0 + t | ← ไว้ตรวจ |
| **y: 0 + s = 0 − t** | ← ใช้แก้ |
| **z: 2 = 0 − t** | ← ใช้แก้ |

แก้สองสมการที่เลือก: **s = 2, t = −2**

③ ตรวจสมการที่เหลือ: **3 ≠ −2 ✗**

**⇒ ไม่มี s, t ที่ทำให้ตรงทั้ง 3 พิกัด ⇒ ไขว้ (skew)**

รูป 11.15 · ไขว้: $s, t$ จากสอง สมการแรกใช้ได้ แต่สมการ $x$ ไม่ตรง ⇒ ไม่มีจุดร่วมและไม่ขนาน




① **ทิศขนานกันไหม?** $d_1 \times d_2 = (0, 0, 0) = 0 \Rightarrow$ ขนาน

$d_2 = 2 \cdot d_1$ ⇒ เช็กว่าจุด $P_1$ ของ $L_1$ อยู่บน $L_2$ ไหม: แก้ t ทีละพิกัด

x: 1 = 0 + 2t ⇒ t = 1/2

y: 0 = 0 + 2t ⇒ t = 0

z: 2 = 5 ✗

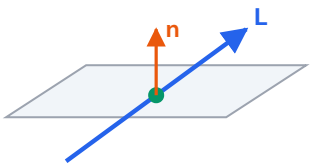
**② t ไม่ตรงกัน ⇒ ขนานกัน ไม่ทับ**

รูป 11.16 · ขนาน: cross เป็นศูนย์ ⇒ เช็กต่อว่าทับกันไหมโดยแทนจุดของ $L_1$ ลง $L_4$ — ได้ $t$ ไม่ตรงกัน ⇒ ขนานคนละเส้น

**เส้น–ระนาบ:** $L_1 : x = 1 + s,\ y = s,\ z = 2$ **กับระนาบ** $2x - y + z = 6$

$\bar{n} = (2, -1, 1) \cdot \bar{n} \cdot \bar{d} = 2 - 1 + 0 = 1 \neq 0 \Rightarrow$ **ตัด 1 จุด** · แทน: $2(1 + s) - s + 2 = 6 \Rightarrow 4 + s = 6 \Rightarrow s = 2 \Rightarrow$

**จุดตัด** $(3, 2, 2)$ · ตรวจ $6 - 2 + 2 = 6$ ✓




**① แทนเส้น x = 1 + s, y = 0 + s, z = 2 ลงระนาบ**

ระนาบ 2x − 1y + 1z = 6 ⇒ n = (2, −1, 1)

② จัดเป็น n·P + s·(n·d) = **6**: **4 + 1·s = 6**

③ แก้ s: s = (6 − 4) ÷ 1 = **2**

จุดตัด = P + 2·d = **(3, 2, 2)**

ตรวจ: แทนจุดในระนาบ 2·3 + (−1)·2 + 1·2 = 6 ✓ · n·d ≠ 0 จึงตัด 1 จุด

รูป 11.17 · แทนเส้นลงระนาบได้สมการเชิงเส้นของ $s$ ตัวเดียว: $\bar{n} \cdot P + s(\bar{n} \cdot \bar{d}) = 6 \Rightarrow s = 2$

**ระนาบ–ระนาบ:** $2x - y + z = 6$ **กับ** $x + y - z = 0$

ทิศ $= \bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = (2, -1, 1) \times (1, 1, -1) = ((-1)(-1) - 1 \cdot 1,\ 1 \cdot 1 - 2(-1),\ 2 \cdot 1 - (-1) \cdot 1) = (0, 3, 3)$ · จุดร่วม: ตั้ง $z = 0 \Rightarrow 2x - y = 6,\ x + y = 0 \Rightarrow D = 3,\ D_x = 6,\ D_y = -6 \Rightarrow x = 2,\ y = -2 \Rightarrow$

**เส้นตัด** $(2, -2, 0) + t(0, 3, 3)$ · ตรวจ $(2, -2, 0)$: $4 + 2 + 0 = 6$ ✓ $2 - 2 - 0 = 0$ ✓

**① เขียน $n_1$ บน $n_2$ ล่าง**

$$\left|\begin{array}{ccc} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array}\right|$$

$n_1 \times n_2$ ตั้งฉากกับทั้งคู่
ช่องกลางติดลบ (สลับลำดับ)

**② ช่อง 1: ปิดคอลัมน์ 1**

$$\left|\begin{array}{ccc} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array}\right|$$

+(↘ − ↗) = [(−1)·(−1) − 1·1] = **0**

**② ช่อง 2: ปิดคอลัมน์ 2**

$$\left|\begin{array}{ccc} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array}\right|$$

−(↘ − ↗) = −[2·(−1) − 1·1] = **3**

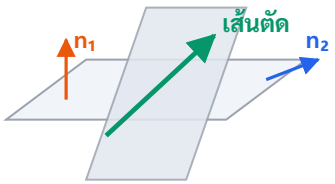
**② ช่อง 3: ปิดคอลัมน์ 3**

$$\left|\begin{array}{ccc} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array}\right|$$

+(↘ − ↗) = [2·1 − (−1)·1] = **3**

**③ $n_1 \times n_2$ = (0, 3, 3)**

รูป 11.18 · ทิศของเส้นตัดจากลูกศรไขว้: $(0, 3, 3)$ ตั้งฉากกับนอร์มัลทั้งสอง




**① ทิศของเส้นตัด = $n_1 \times n_2$ = (2, −1, 1) × (1, 1, −1) = (0, 3, 3)**

**② หาจุดร่วม 1 จุด: ตั้ง z = 0 แล้วแก้ 2×2**

2x − 1y = 6, 1x + 1y = 0

D = 3, Dx = 6, Dy = −6 ⇒ **x = 2, y = −2**

③ เส้นตัด: r = **(2, −2, 0)** + t**(0, 3, 3)**

ตรวจจุดในระนาบ 1: 6 ✓ · ระนาบ 2: 0 ✓ · ทิศ ⊥ $n_1$ และ $n_2$: $n_1 \cdot d = 0$, $n_2 \cdot d = 0$

จะหารทิศด้วยตัวร่วมก็ได้ (เช่น (0,3,3) → (0,1,1)) เส้นเดิม

รูป 11.19 · จุดร่วมหาโดยตั้ง $z = 0$ แล้วแก้ 2×2 ด้วย Cramer ($D = 3$) · เส้นตัด = จุดร่วม $+t(\bar{n}_1 \times \bar{n}_2)$

# ก เฉลยละเอียด Quiz 0–3 ทุกข้อ ทุกตัวเลือก (✓ จริง · ✗ เท็จ + เหตุผลบรรทัดเดียว)

ลำดับตัวเลือกตามฟอร์มควิซ · ตัวเลือกที่เป็นรูปในฟอร์มถอดมาเป็นสัญลักษณ์ · ทุกตัวเลขคำนวณซ้ำด้วยโปรแกรมแล้ว

## Quiz 0 (5 ข้อ ข้อละ 2 คะแนน)

**ข้อ 1:** $4x - 2y = 3,\ 8x - 4y = 6$ → หัวข้อ 1

$D = 4(-4) - 8(-2) = 0$ · แทน $x = 0$: $y = -\frac{3}{2}$ ทั้งสองสมการ ⇒ เส้นเดียวกัน (สมการ 1 ×2 = สมการ 2)

- ✗ 2 solutions — จำนวนคำตอบมีแค่ 0, 1, ∞
- ✗ The unique trivial solution $x = y = 0$ — ขวามือ 3, 6 ไม่ใช่ 0 แทนแล้ว $0 \neq 3$
- ✗ Unique solution — $D = 0$
- ✗ No solutions — $y$ ที่ $x = 0$ เท่ากัน ไม่ขัด
- ✓ Infinite number of solutions

**① คูณไขว้**

| | | |
|---|---|---|
| 4 ↘ | −2 | ↘ 4·(−4) = −16 |
| 8 ↗ | −4 | ↗ 8·(−2) = −16 |

**② D = −16 − (−16) = 0**

**③ แทน x = 0: y = −3/2 ทั้งสองสมการ ⇒ ทับกัน อนันต์**

Quiz 0 ข้อ 1 — $D = 0$ แล้วจุดเช็กตรงกัน

**ข้อ 2:** $ax - y = 1,\ x + ay = 2$ → หัวข้อ 1

$D = a \cdot a - 1 \cdot (-1) = a^2 + 1 \geq 1$ ⇒ ไม่มีทางเป็น 0 ($a = 0$: 1, $a = 3$: 10, $a = -2$: 5)

- ✗ The unique trivial solution $x = y = 0$ — ขวามือ 1, 2 ไม่ใช่ 0
- ✓ Unique solution — $D \neq 0$ ทุก $a$
- ✗ Infinite number of solutions — ต้อง $D = 0$
- ✗ No solutions — ต้อง $D = 0$
- ✗ 2 solutions — เป็นไปไม่ได้

**① คูณไขว้**

| | | |
|---|---|---|
| a ↘ | −1 | ↘ a·a = a² |
| 1 ↗ | a | ↗ 1·(−1) = −1 |

**② D = a² − (−1) = a² + 1 ≥ 1**

**③ ไม่มี a จริงที่ทำให้ D = 0 ⇒ เดียวทุก a**

Quiz 0 ข้อ 2 — เก็บเครื่องหมายลบไว้กับสัมประสิทธิ์ $-1$

**ข้อ 3:** $ax + 9y = 1,\ x + ay = 2$ **ไม่มีคำตอบเมื่อ** → หัวข้อ 1

$D = a^2 - 9 = 0 \Rightarrow a = \pm 3$ · $a = 3$: $x = 0$ ให้ $y = \frac{1}{9}$ กับ $\frac{2}{3}$ ขัดกัน ⇒ ไม่มี ($a = -3$ ก็ไม่มี แต่ไม่อยู่ในตัวเลือก)

- ✓ $a = 3$
- ✗ $a = 4$ — $D = 16 - 9 = 7 \neq 0$ คำตอบเดียว
- ✗ The system always has a solution — ที่ $a = \pm 3$ ไม่มี
- ✗ $a = 1$ — $D = -8$ คำตอบเดียว
- ✗ $a = 2$ — $D = -5$ คำตอบเดียว

**ข้อ 4:** $ax + 9y = 0,\ x + ay = 0$ **(เอกพันธ์)** → หัวข้อ 6

เอกพันธ์: อนันต์ $\iff D = a^2 - 9 = 0 \iff a = \pm 3$ · ตรวจ $a = -3$: $(3, 1)$ แก้ได้ทั้งสองสมการ

- ✗ $a = -4$ — $D = 7$ มีแค่ trivial
- ✗ $a = -2$ — $D = -5$ มีแค่ trivial
- ✓ $a = -3$ — $D = 0$ ⇒ อนันต์
- ✗ The system has only unique trivial solution — ไม่จริงเมื่อ $a = \pm 3$
- ✗ $a = -1$ — $D = -8$ มีแค่ trivial

**① คูณไขว้**

a 9
1 a

↘ a·a = $a^2$
↗ 1·9 = 9
② D = $a^2$ − 9 = 0 ⇒ a = ±3

③ a = 3, x = 0: y = 1/9 ≠ 2/3 ⇒ ไม่มี
a = 4: D = 7 เดียว
Quiz 0 ข้อ 3 — ค่าน่าสงสัยสองค่า แทนทีละค่า

**① คูณไขว้**

a 9
1 a

↘ a·a = $a^2$
↗ 1·9 = 9
② D = $a^2$ − 9 = 0 ⇒ a = ±3

③ เอกพันธ์: D = 0 คืออนันต์ทันที
ตัวเลือกมี −3
Quiz 0 ข้อ 4 — ขวาเป็น 0 จึงไม่ต้องแทนจุดเช็ก

**ข้อ 5:** $u = (1,4),\ w = (-1,3),\ v = (3,1)$ **เลือกข้อความจริง** → หัวข้อ 2 (ตัวเลือกเป็นรูปในฟอร์ม ค่าเวกเตอร์อ้างจากบันทึกเฉลยของคลิป)

✗ $u \perp v$ — $u \cdot v = 3 + 4 = 7 \neq 0$
✗ $u \perp w$ — $u \cdot w = -1 + 12 = 11 \neq 0$
✓ $v \perp w$ — $v \cdot w = -3 + 3 = 0$
✗ $\|u\| = \|v\|$ — $\sqrt{17} \neq \sqrt{10}$
✗ $v + w = u$ — $(2,4) \neq (1,4)$

**① จับคู่ช่องเดียวกัน แล้วคูณ**

u v
1 × 3 = 3
4 × 1 = 4

3 + 4 = **7**
**u·v = 7 (ตัวเลขตัวเดียว)**

**② จับคู่ช่องเดียวกัน แล้วคูณ**

u w
1 × −1 = −1
4 × 3 = 12

(−1) + 12 = **11**
**u·w = 11 (ตัวเลขตัวเดียว)**

**② จับคู่ช่องเดียวกัน แล้วคูณ**

v w
3 × −1 = −3
1 × 3 = 3

(−3) + 3 = **0**
**v·w = 0 (ตัวเลขตัวเดียว)**

Quiz 0 ข้อ 5 — dot ทั้งสามคู่: 7, 11, 0 — คู่เดียวที่เป็นศูนย์คือ $v \cdot w \Rightarrow v \perp w \cdot \|u\|^2 = 17 \neq \|v\|^2 = 10$

## Quiz 1 (5 ข้อ)

**ข้อ 1:** $x_1 + x_2 + 2x_3 = 1,\ x_2 + x_3 = \frac{3}{2},\ x_2 + x_3 = 3$ → หัวข้อ 4

$R_3 \leftarrow R_3 - R_2$: 0 0 0 | $3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow 0 = \frac{3}{2}$ ขัดกัน

✗ unique solution — มีแถวขัดกัน
✗ infinite, 1 free variable — ไม่มีคำตอบเลย
✓ no solutions
✗ 2 solutions — เป็นไปไม่ได้
✗ infinite, 2 free variables — ไม่มีคำตอบเลย

**ข้อ 2:** $2x - ay = 1,\ ax + 3y = 4$ → หัวข้อ 1

$D = 2 \cdot 3 - a(-a) = 6 + a^2 \geq 6 \Rightarrow$ คำตอบเดียวทุก $a$
($a = 6$: 42, $a = 0$: 6, $a = -1$: 7)

✗ 2 solutions — เป็นไปไม่ได้
✗ Unique solution when $a = 6$ — เดียว**ทุก** $a$ ไม่ใช่เฉพาะ 6 ประโยคมีเงื่อนไขผิด
✗ Infinite number of solutions — $D \neq 0$
✗ No solutions — $D \neq 0$
✓ Unique solution

① ก่อน

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

② ทำทีละแถว (ป้าย op ทุกครั้ง)

$R_3 \to R_3 - R_2$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $R_3$: | 0 | 1 | 1 | 3 |
| $-1\cdot R_2$: | 0 | 1 | 1 | 3/2 |
| $= R_3$ ใหม่: | 0 | 0 | 0 | 3/2 |

③ หลัง

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 \end{array}\right]$$

④ แถว 3 ใหม่ 0 0 0 | 3/2 อ่านว่า 0 = 3/2 ⇒ ไม่มีคำตอบ

Quiz 1 ข้อ 1 — แถว 2 และ 3 ซ้ายเหมือนกันแต่ขวาต่างกัน ($\frac{3}{2}$ กับ 3) ⇒ ลบกันแล้วขัด

① คูณไขว้

$$\left|\begin{array}{cc} 2 & -a \\ a & 3 \end{array}\right|$$

↘ $2\cdot 3 = 6$

↗ $a\cdot(-a) = -a^2$

② $D = 6 - (-a^2) = a^2 + 6 \geq 6$

③ ไม่มี a ที่ทำให้ D = 0 ⇒ เดียวทุก a (ไม่ใช่เฉพาะ 6)

Quiz 1 ข้อ 2 — ทแยงรองคือ $a \cdot (-a)$ เครื่องหมายลบทำให้ $D$ เป็นบวกเสมอ

**ข้อ 3:** $x_1 + x_2 + 2x_3 = 1,\ x_2 + x_3 = 2,\ x_3 = 3$ → หัวข้อ 4

สามเหลี่ยม 3 pivot: $x_3 = 3, x_2 = 2 - 3 = -1, x_1 = 1 - (-1) - 6 = -4$ · ตรวจ $-4 - 1 + 6 = 1$ ✓

- ✗ infinite, 2 free variables — 3 pivot 3 ตัวแปร ไม่มีอิสระ
- ✓ unique solution — $(-4, -1, 3)$
- ✗ infinite, 1 free variable — ไม่มีอิสระ
- ✗ unique solution if $x_2 = 0$ — $x_2 = -1$ ถูกกำหนดแล้ว ไม่มีเงื่อนไข
- ✗ no solutions — ไม่มีแถวขัดกัน

**ข้อ 4:** $A$ 2 แถว 2 หลัก · $B$ 3 แถว 2 หลัก · $C = AB$ → หัวข้อ 3

คอลัมน์ $A$ (2) ≠ แถว $B$ (3)

- ✗ $C$ has 2 rows and 3 columns — คูณไม่ได้ตั้งแต่ต้น
- ✗ $C$ has 2 rows and 2 columns — คูณไม่ได้
- ✗ $C$ has 3 rows and 3 columns — คูณไม่ได้
- ✗ $C$ has 3 columns and 2 rows — คูณไม่ได้
- ✓ not compatible under multiplication, $C$ does not exist

① เริ่มจากแถวที่เหลือตัวแปรเดียว แล้วไล่ขึ้น

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$x_1$ $x_2$ $x_3$

② แถว 3: $x_3 = 3$

$x_3 = 3 = 3$

③ แถว 2: $x_2 + x_3 = 2$

$x_2 = 2 - 1\cdot 3 = -1$

④ แถว 1: $x_1 + x_2 + 2x_3 = 1$

$x_1 = 1 - 1\cdot(-1) - 2\cdot 3 = -4$

⑤ x = (−4, −1, 3) แล้วแทนกลับตรวจทุกสมการ

Quiz 1 ข้อ 3 — สามเหลี่ยม 3 pivot: แทนย้อนจากแถวล่างขึ้นบน ได้ $(-4, -1, 3)$ ไม่มีตัวแปรอิสระ

① เขียนขนาด แถว×คอลัมน์ แล้วเทียบตัวใน

$$(2 \times \textcircled{2})\ (\textcircled{3} \times 2)$$

ตัวใน ไม่เท่า ✗

Quiz 1 ข้อ 4 — ตัวใน $2 \neq 3$ ⇒ $AB$ ไม่มี

**ข้อ 5:** $3x - 6y = 1,\ 8x - 16y = 4$ → หัวข้อ 1

$D = 3(-16) - 8(-6) = -48 + 48 = 0 \cdot x = 0$: $y = -\frac{1}{6}$ กับ $y = -\frac{4}{16} = -\frac{1}{4}$ ไม่เท่า ⇒ ขนาน

- ✗ Infinite number of solutions — จุดเช็กไม่ตรงกัน
- ✗ 2 solutions — เป็นไปไม่ได้
- ✓ No solutions
- ✗ The trivial solution $x = y = 0$ — ขวามือ 1, 4 ไม่ใช่ 0
- ✗ Unique solution — $D = 0$

① คูณไขว้

$$\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 8 & -16 \end{vmatrix}$$

↘ 3·(−16) = −48
↗ 8·(−6) = −48
② D = −48 − (−48) = 0

③ แทน x = 0: y = −1/6 ≠ −1/4 ⇒ ขนาน ไม่มีคำตอบ

Quiz 1 ข้อ 5 — $D = 0$ แล้วจุดเช็กไม่ตรงกัน

## Quiz 2 (5 ข้อ)

**ข้อ 1:** $2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 8,\ 6x_1 - 12x_2 + 9x_3 = 12$ → หัวข้อ 4

$R_2 \leftarrow R_2 - 3R_1 \Rightarrow 0\ 0\ 0 \mid -12 \Rightarrow$ ไม่มีคำตอบ

- ✗ $x = (4,1,0)x_2 + (-1,0,1)x_3 + (8,0,0)$ — ระบบไม่มีคำตอบ; แทน $(8,0,0)$ ได้ $(16,48) \neq (8,12)$
- ✗ $x = \binom{0}{1}x_2 + \binom{1}{1}$ — เวกเตอร์ 2 ช่อง แต่มี 3 ตัวแปร
- ✗ $x = (1,0,1)x_1 + (2,1,0)x_2$ — ไม่มีส่วนค่าคงที่ทั้งที่ $b \neq 0$; $A(1,0,1) = (5,15) \neq 0$
- ✓ The system does not have a solution
- ✗ $x = \binom{2}{1}x_2 + \binom{4}{0}$ — เวกเตอร์ 2 ช่อง

**ข้อ 2:** $3x_1 - 2x_2 = 5,\ 2x_1 - 4x_2 = -2,\ 4x_1 - 4x_2 = 4$ → หัวข้อ 4

$R_3 - R_2$: $2x_1 = 6 \Rightarrow x_1 = 3$; $-4x_2 = -2 - 6 \Rightarrow x_2 = 2$; แถว 1: $9 - 4 = 5$ ✓

- ✓ $x = \binom{3}{2}$ — แก้ได้ทั้ง 3 สมการ $(5,-2,4)$
- ✗ $x = \binom{2}{1}$ — $3(2) - 2(1) = 4 \neq 5$
- ✗ $x = (4,1,0)x_2 + (-1,0,1)x_3 + (8,0,0)$ — 3 ช่อง แต่มี 2 ตัวแปร
- ✗ $x = \binom{0}{1}x_2 + \binom{1}{1}$ — บังคับ $x_1 = 1 \Rightarrow$ สมการ 1 ให้ $x_2 = -2 \Rightarrow$ สมการ 2: $2 + 8 = 10 \neq -2$
- ✗ The system does not have a solution — มี $(3,2)$

① ก่อน

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 3 & 8 \\ 6 & -12 & 9 & 12 \end{array}\right]$$

② ทำทีละแถว (ป้าย op ทุกครั้ง)

$R_2 \to R_2 - 3R_1$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $R_2$: | 6 | −12 | 9 | 12 |
| $-3 \cdot R_1$: | 6 | −12 | 9 | 24 |
| = $R_2$ ใหม่: | 0 | 0 | 0 | −12 |

③ หลัง

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{array}\right]$$

④ 0 = −12 ขัดกัน ⇒ ไม่มีคำตอบ — ตัวเลือกเวกเตอร์ทุกอันผิดทันที

Quiz 2 ข้อ 1 — แถว 2 ซ้ายเป็น 3 เท่าของแถว 1 แต่ขวา $12 \neq 3 \cdot 8$

① ก่อน

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 5 \\ 2 & -4 & -2 \\ 4 & -4 & 4 \end{array}\right]$$

② ทำทีละแถว (ป้าย op ทุกครั้ง)

$R_3 \to R_3 - R_2$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $R_3$: | 4 | −4 | 4 |
| $-1 \cdot R_2$: | 2 | −4 | −2 |
| = $R_3$ ใหม่: | 2 | 0 | 6 |

③ หลัง

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 5 \\ 2 & -4 & -2 \\ 2 & 0 & 6 \end{array}\right]$$

④ แถว 3 ใหม่: $2x_1 = 6 \Rightarrow x_1 = 3$ · แถว 2: $-4x_2 = -2 - 2 \cdot 3 = -8 \Rightarrow x_2 = 2$ · แถว 1: $9 - 4 = 5$ ✓

Quiz 2 ข้อ 2 — 3 สมการ 2 ตัวแปรก็มีคำตอบเดียวได้ เมื่อสมการที่สามไม่ขัดกับสองสมการแรก

### ข้อ 3: ข้อความระบบเอกพันธ์ → หัวข้อ 6

- ✗ 4 สมการ 4 ตัวแปร มีคำตอบเดียวเสมอ — 4 แถวเหมือนกัน ⇒ อนันต์
- ✗ 4 สมการ 2 ตัวแปร มีอนันต์**หรือไม่มี** — เอกพันธ์ไม่มีทาง "ไม่มี" (และ $x = 0, y = 0, x + y = 0, x - y = 0$ มีแค่ trivial)
- ✓ 3 สมการ 4 ตัวแปร มีอนันต์เสมอ — $n > m$
- ✓ 3 สมการ 3 ตัวแปร มีอย่างน้อยหนึ่งคำตอบ — จริง (trivial) แต่บอกน้อยกว่าข้อ 3; ถ้าบังคับข้อเดียวเลือกข้อ 3
- ✗ 3 สมการ 2 ตัวแปร ไม่มีคำตอบ — มี $x = 0$ เสมอ

### ข้อ 4: ระบบ 5 สมการ 3 ตัวแปร (ไม่รู้ตัวเลข) → หัวข้อ 4

สร้างได้ทั้ง 3 แบบ: $x_1 = 1$ ห้าครั้ง ⇒ อนันต์ (2 อิสระ) · $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_1 + x_2 = 3, x_1 + x_2 + x_3 = 6$ ⇒ เดียว · $x_1 = 1, x_1 = 2, \ldots$ ⇒ ไม่มี

- ✗ always unique — มีตัวอย่างค้าน
- ✗ always infinite — มีตัวอย่างค้าน
- ✗ no solutions — มีตัวอย่างค้าน
- ✗ infinite or none — ตัวอย่างคำตอบเดียวมี
- ✓ either infinite, unique, or no solutions

### ข้อ 5: $x_1 - 4x_2 + x_3 = 8,\ 3x_1 - 12x_2 + 3x_3 = 24,\ 2x_1 - 8x_2 + 2x_3 = 16$ → หัวข้อ 4

แถว 2 = 3×แถว 1, แถว 3 = 2×แถว 1 (รวมขวา) ⇒ เหลือสมการเดียว $k = 1, n = 3 \Rightarrow$ 2 ตัวแปรอิสระ: $x_1 = 8 + 4x_2 - x_3$

- ✗ $x = \binom{1}{2}x_1 + \binom{2}{1}$ — เวกเตอร์ 2 ช่อง
- ✓ $x = (4,1,0)x_2 + (-1,0,1)x_3 + (8,0,0)$ — $A(8,0,0) = (8,24,16)$, $A(4,1,0) = A(-1,0,1) = 0$, พารามิเตอร์ 2 ตัว
- ✗ $x = (1,0,1)x_1 + (2,1,0)x_2$ — ไม่มีส่วนค่าคงที่; $A(1,0,1) = (2,6,4) \neq 0$
- ✗ The system does not have a solution — ไม่มีแถวขัดกัน
- ✗ $x = \binom{2}{1}x_2 + \binom{4}{0}$ — เวกเตอร์ 2 ช่อง

① pivot (วงกลม) · ไร้ pivot = อิสระ

| | อิสระ | อิสระ | |
|---|---|---|---|
| (1) | −4 | 1 | 8 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | |

② อ่านแถว pivot เป็นสมการ ย้ายตัวแปรอิสระไปขวา

$x_1 = 8 + 4x_2 - x_3$

③ ประกอบเวกเตอร์ (ช่องอิสระเอง = 1 ในเวกเตอร์ของมัน)

$$x = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

อิสระ 2 ตัว = n − k = 3 − 1 ⇒ อนันต์

Quiz 2 ข้อ 5 — เหลือสมการเดียว pivot ที่คอลัมน์ 1 ⇒ $x_2, x_3$ อิสระ · ประกอบเวกเตอร์ได้ $(8,0,0) + x_2(4,1,0) + x_3(-1,0,1)$ ตรงตัวเลือก 2

## Quiz 3 (5 ข้อ)

### ข้อ 1: เลือกข้อความจริง → หัวข้อ 7

✗ Every square matrix has a unique inverse — เมทริกซ์ศูนย์ไม่มี

✗ Every diagonal matrix is invertible — $\text{diag}(1,0)$: $\det = 0$

✗ Diagonal with at least one 0 at the diagonal is invertible — $\det$ = ผลคูณทแยง $= 0$

✗ Every lower triangular matrix is invertible — $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$: $\det = 0$

✓ If $\det(A) = 3.2$ the matrix $A$ is invertible — $3.2 \neq 0$

### ข้อ 2: $2x_2 + 3x_3 = 4,\ x_1 + 3x_3 = 3,\ 2x_1 + 4x_3 = 6$ → หัวข้อ 4

$R_3 - 2R_2$: $-2x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0, x_1 = 3, x_2 = 2$

✗ infinite, 1 free variable — 3 pivot

✗ infinite, 2 free variables — 3 pivot

✗ no solutions — ไม่มีแถวขัดกัน

✓ unique solution $x = (3,2,0)$ — แทนได้ $(4,3,6)$

✗ infinite, $x_1 = 1 + 4x_3 + 4x_2$ — ให้ $1 + 0 + 8 = 9 \neq 3$

① ก่อน

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 6 \end{array}\right]$$

② ทำทีละแถว (ป้าย op ทุกครั้ง)

$R_3 \to R_3 - 2R_2$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $R_3$: | 2 | 0 | 4 | 6 |
| $-\ 2\cdot R_2$: | 2 | 0 | 6 | 6 |
| = $R_3$ ใหม่: | 0 | 0 | −2 | 0 |

③ หลัง

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

Quiz 3 ข้อ 2 — $R_3 \to R_3 - 2R_2$ กำจัดช่องแรกของแถว 3 เหลือ $-2x_3 = 0$

① เริ่มจากแถวที่เหลือตัวแปรเดียว แล้วไล่ขึ้น

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$x_1$ $x_2$ $x_3$

② แถว 3: $-2x_3 = 0$

$(-2)x_3 = 0 = 0 \Rightarrow x_3 = 0 \div (-2) = 0$

③ แถว 1: $2x_2 + 3x_3 = 4$

$2x_2 = 4 - 3\cdot 0 = 4 \Rightarrow x_2 = 4 \div 2 = 2$

④ แถว 2: $x_1 + 3x_3 = 3$

$x_1 = 3 - 3\cdot 0 = 3$

⑤ x = (3, 2, 0) แล้วแทนกลับตรวจทุกสมการ

Quiz 3 ข้อ 2 — แทนย้อน: $x_3 = 0$ ก่อน แล้วแถว 2 ให้ $x_1 = 3$ แถว 1 ให้ $x_2 = 2 \Rightarrow (3,2,0)$ · สูตรล่อ $x_1 = 1 + 4x_3 + 4x_2 = 9 \neq 3$

### ข้อ 3: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$ → หัวข้อ 4

$R_3 \leftarrow R_3 - R_2$: $0\ 0\ 0 \mid -2 \Rightarrow$ ขัดกัน

- ✗ infinite, 1 free variable — ไม่มีคำตอบ
- ✗ infinite, 2 free variables — ไม่มีคำตอบ
- ✓ no solutions
- ✗ unique $x = (3, 2, 0)$ — แถว 2: $0 + 2 + 0 = 2 \neq 4$
- ✗ infinite, $x_1 = 1 + 4x_3 + 4x_2$ — ไม่มีคำตอบ

### ข้อ 4: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ (7 ตัวเลือก) → หัวข้อ 9

กางแถว 3: $\det A = 9(1 \cdot 5 - 2 \cdot 4) = 9(-3) = -27$

$\Rightarrow \det A^{-1} = -\frac{1}{27}$

- ✗ $\det(A) = 11$
- ✗ $\det(A) = -2$
- ✗ $\det(A^{-1}) = \frac{1}{11}$
- ✗ $\det(A) = 21$
- ✗ $\det(A^{-1}) = -\frac{1}{21}$
- ✗ $\det(A^{-1}) = -\frac{1}{3}$ — ลืมคูณ 9 (คิดแค่ $1/(5-8)$)
- ✓ $\det(A^{-1}) = -\frac{1}{27}$

**① ก่อน**

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

**② ทำทีละแถว (ป้าย op ทุกครั้ง)**

$R_3 \to R_3 - R_2$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $R_3$: | 0 | 1 | 2 | 2 |
| $-1 \cdot R_2$: | 0 | 1 | 2 | 4 |
| = $R_3$ ใหม่: | 0 | 0 | 0 | −2 |

**③ หลัง**

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

**④ แถว 3 ใหม่ 0 0 0 | −2 ⇒ 0 = −2 ขัดกัน ⇒ ไม่มีคำตอบ**

Quiz 3 ข้อ 3 — แถว 2, 3 ซ้ายเหมือนกัน ขวา $4 \neq 2$

**① เลือกแถว 3 (ฟ้า)**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

เครื่องหมาย $(-1)^{i+j}$

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{array}$$

**② ปิดแถว 3 คอลัมน์ 1**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$

$= 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 = -3$

$+ 0 \cdot (-3) = 0$

**② ปิดแถว 3 คอลัมน์ 2**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$

$= 1 \cdot 6 - 3 \cdot 4 = -6$

$- 0 \cdot (-6) = 0$

**② ปิดแถว 3 คอลัมน์ 3**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$

$= 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 = -3$

$+ 9 \cdot (-3) = -27$

**③ det = 0 + 0 + (−27) = −27**

Quiz 3 ข้อ 4 — กางแถว 3 เหลือพจน์เดียว $+9 \cdot (5-8) = -27 \Rightarrow \det A^{-1} = -\frac{1}{27}$

### ข้อ 5: ข้อความระบบเอกพันธ์ + det → หัวข้อ 6

- ✗ $\det \neq 0 \Rightarrow$ อนันต์ — กลับด้าน: $\det \neq 0 \Rightarrow$ trivial ตัวเดียว
- ✗ #ตัวแปร = #สมการ ⇒ คำตอบเดียว — $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x = 0$ อนันต์
- ✗ #ตัวแปร < #สมการ ⇒ อนันต์ — $x = 0, y = 0, x + y = 0$ มีแค่ trivial
- ✗ ทุก H-system มีอนันต์ — $Ix = 0$ มีแค่ 0
- ✓ #ตัวแปร > #สมการ ⇒ อนันต์เสมอ

# ข เฉลยละเอียดข้อสอบกลางภาคฝึก ทุกข้อ (รวมข้อที่คลิปข้าม)

โครงข้อสอบ: ข้อ 1 = เลือกข้อความจริง 5 ข้อย่อย (15 คะแนน ไม่ต้องอธิบาย) · โจทย์ 2–8 ต้องแสดงวิธีทำ (85 คะแนน) · โบนัส 10 · เปิดตำรา ใช้เครื่องคิดเลขได้ · "ลอกชีทแบบไม่เกี่ยว" ได้ 0 หรือติดลบ

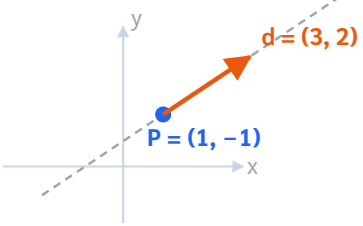
## ข้อ 1: เลือกข้อความจริง (ข้อละ 3 คะแนน)

### Q1: $x = 3t + 1,\ y = 2t - 1$ → หัวข้อ 10

- ✗ a line in 3D — ไม่มี $z$
- ✓ a line in 2D — พารามิเตอร์ 1 ตัว ตัวแปร $x, y$ ( $2x - 3y = 5$)
- ✗ a plane in 3D — ระนาบต้อง 2 พารามิเตอร์
- ✗ a plane and a line in 3D — ไม่มี $z$ และไม่ใช่ระนาบ
- ✗ two lines in 2D — สองสมการของ $t$ อธิบาย**เส้นเดียว** (ทีละพิกัด)

### Q2: invertible → หัวข้อ 7

- ✗ Every symmetric matrix has a unique inverse — $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ สมมาตร $\det = 0$
- ✗ Every triangular matrix is invertible — $\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}$ $\det = 0$
- ✗ Every $n \times n$ is invertible — เมทริกซ์ศูนย์
- ✓ If $\det A \neq 0$ ► $A$ is invertible
- ✗ non zero diagonal ⇒ always invertible — $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ ทแยง 1,1 แต่ $\det = 0$




**① จุด P (ฟ้า) = ค่าคงที่ · ทิศ d (ส้ม) = สัมประสิทธิ์ของ t**

(1) พารามิเตอร์: **x = 1 + 3t, y = −1 + 2t**

(2) เวกเตอร์: r = **(1, −1)** + t**(3, 2)**

ตัด t ออก: **2x − 3y = 5**

**② พารามิเตอร์ 1 ตัว = เส้นเสมอ · 2 ตัว (t, s) = ระนาบ**

Q1 — พารามิเตอร์ตัวเดียว ตัวแปรสองตัว ⇒ เส้นตรงใน 2 มิติ (สองสมการของ $t$ คือเส้นเดียว ไม่ใช่ two lines)

### Q3: H-system → หัวข้อ 6

- ✗ Every H-system has infinite solutions — $Ix = 0$ มีแค่ 0
- ✓ Every H-system has at least one solution — $x = 0$ เสมอ
- ✗ can have exactly 2 solutions — 0, 1, ∞ เท่านั้น
- ✗ Determinant of every H-system $\neq 0$ — $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} x = 0$ มี $\det = 0$
- ✗ represented by a symmetric matrix — เอกพันธ์ว่าด้วย $b = 0$ ไม่บังคับหน้าตา $A$

### Q4: สมบัติ det → หัวข้อ 9 (ตัวอย่างค้าน $A = \mathrm{diag}(3, 1)$, $\det A = 3$)

- ✗ $\det A \neq 0$ ► $\det A^2 = 2 \det A$ — $\det A^2 = 9 \neq 6$ (ถูกคือ $(\det A)^2$)
- ✗ $\det(A + B) = \det A \det B$ — $\det(A + A) = 12 \neq 9$
- ✗ $\det(AB) = \det A / \det B$ — $\det(AA) = 9 \neq 3/3 = 1$
- ✓ $\det(I) = 1$
- ✗ $\det A = \det A^{-1}$ — $\det A^{-1} = \frac{1}{3} \neq 3$

**Q5: ระนาบ $5x + 3y - z + 1 = 0$** → หัวข้อ 10

- ✗ passes through $(0, 0, 0)$ — แทนได้ $1 \neq 0$
- ✗ normal is $(5, 3, 1)$ — ไม่ใช่ตัวคูณของ $(5, 3, -1)$
- ✓ normal is $(-5, -3, 1)$ — $= -1 \cdot (5, 3, -1)$
- ✗ $(5, 3, 1)$ belongs — $25 + 9 - 1 + 1 = 34$
- ✗ $(-3, 5, 0)$ belongs — $-15 + 15 + 1 = 1$

**① นอร์มัล = สัมประสิทธิ์ (a, b, c) และตัวคูณทุกตัว**

ระนาบ **5x + 3y − 1z + 1 = 0** ⇒ n = **(5, 3, −1)**

(5, 3, 1) ✗ **ไม่ใช่ตัวคูณของ n (เครื่องหมายไม่ตาม)**

(−5, −3, 1) **= −1·n ✓ ใช้เป็นนอร์มัลได้**

**② จุดอยู่บนระนาบ ⇔ แทนแล้วได้ 0 พอดี**

(0, 0, 0): 5·0 + 3·0 + (−1)·0 + 1 = **1 ✗ ไม่อยู่**

(5, 3, 1): 5·5 + 3·3 + (−1)·1 + 1 = **34 ✗ ไม่อยู่**

(−3, 5, 0): 5·(−3) + 3·5 + (−1)·0 + 1 = **1 ✗ ไม่อยู่**

ผ่านจุดกำเนิด ⇔ d = 0 (ที่นี่ d = 1 ⇒ ไม่ผ่าน)

Q5 — นอร์มัลคือสัมประสิทธิ์และตัวคูณ · จุดอยู่บนระนาบเมื่อแทนได้ 0 พอดี

## โจทย์ 2 (10 คะแนน): ค่า $a, b$ ที่ให้ เดียว / ไม่มี / อนันต์ → หัวข้อ 1

**แบบ A:** $ax + y = b,\ x + ay = a$

$D = a^2 - 1 \cdot a \neq \pm 1$ ⇒ **เดียว**

$a = 1$: $x + y = b, x + y = 1 \Rightarrow b = 1$ อนันต์ · $b \neq 1$ ไม่มี

$a = -1$: $-x + y = b, x - y = -1\ (\times(-1):\ -x + y = 1) \Rightarrow b = 1$ อนันต์ · $b \neq 1$ ไม่มี

**อนันต์:** $a = \pm 1,\ b = 1$ · **ไม่มี:** $a = \pm 1,\ b \neq 1$ · **เดียว:** $a \neq \pm 1$

(ตรงเฉลยพิมพ์)

**แบบ B (คลิปข้าม):** $ax + y = b,\ ax + ay = a$

$D = a \cdot a - a \cdot 1 = a(a - 1)$ ⇒ ค่าน่าสงสัย $a = 0,\ a = 1 \cdot a \neq 0, 1$ ⇒ **เดียว**

$a = 0$: สมการ 1: $y = b$ · สมการ 2: $0 = 0$ (หายไป) ⇒ $x$ อิสระ ⇒ **อนันต์ทุก** $b$

$a = 1$: $x + y = b, x + y = 1 \Rightarrow b = 1$ อนันต์ · $b \neq 1$ ไม่มี

**อนันต์:** $a = 0$ **(ทุก** $b$**) หรือ** $a = b = 1$ · **ไม่มี:** $a = 1, b \neq 1$ · **เดียว:** $a \neq 0, 1$

(ตรงเฉลยพิมพ์ "$a = b = 1$ or $a = 0$")

**① คูณไขว้**

a ↘ 1 · 1 ↗ a

↘ a·a = a²

↗ 1·1 = 1

**② D = a² − 1 = 0 ⇒ a = ±1**

**③ a = 1: x + y = b กับ x + y = 1 ⇒ b = 1 อนันต์, b ≠ 1 ไม่มี**
**a = −1 ก็ให้เงื่อนไข b = 1 เหมือนกัน**

โจทย์ 2 แบบ A — ค่าน่าสงสัย $a = \pm 1$ แล้วเทียบ $b$

**① คูณไขว้**

a ↘ 1 · a ↗ a

↘ a·a = a²

↗ a·1 = a

**② D = a² − a = a(a − 1) = 0 ⇒**

**③ a = 0: y = b และ 0 = 0 ⇒ x อิสระ อนันต์ทุก b**
**a = 1: b = 1 อนันต์, b ≠ 1 ไม่มี**

โจทย์ 2 แบบ B — ค่าน่าสงสัยสองค่า 0 และ 1 แยกกรณีต่างกัน

## โจทย์ 3 (15): $\det\begin{pmatrix}1&2&2\\2&2&2\\1&0&4\end{pmatrix}$ สามวิธี → หัวข้อ 9 (ง) มีขั้นเต็ม

cofactor แถว 1: $1(8-0)-2(8-2)+2(0-2)=8-12-4=-8$ · GE แถว: $R_2-2R_1,\ R_3-R_1 \Rightarrow (1,2,2),(0,-2,-2),(0,-2,2)$; $R_3-R_2 \Rightarrow (0,0,4)$; ทแยง $1(-2)(4)=-8$ · GE คอลัมน์: $C_2-2C_1,\ C_3-2C_1 \Rightarrow$ คอลัมน์ $(1,2,1),(0,-2,-2),(0,-2,2)$; $C_3-C_2 \Rightarrow (0,0,4)$; ทแยง $-8$ · $\boxed{-8}$

**① เลือกแถว 1 (ฟ้า)**

$$\begin{vmatrix}1&2&2\\2&2&2\\1&0&4\end{vmatrix}$$

เครื่องหมาย $(-1)^{i+j}$

$$\begin{matrix}+&-&+\\-&+&-\\+&-&+\end{matrix}$$

**② ปิดแถว 1 คอลัมน์ 1**

$$\begin{bmatrix}\mathbf{1}&2&2\\2&2&2\\1&0&4\end{bmatrix}$$

$M_{11}=\begin{vmatrix}2&2\\0&4\end{vmatrix}$

$= 2\cdot4-2\cdot0=8$

$+\,1\cdot8=8$

**② ปิดแถว 1 คอลัมน์ 2**

$$\begin{bmatrix}1&\mathbf{2}&2\\2&2&2\\1&0&4\end{bmatrix}$$

$M_{12}=\begin{vmatrix}2&2\\1&4\end{vmatrix}$

$= 2\cdot4-2\cdot1=6$

$-\,2\cdot6=-12$

**② ปิดแถว 1 คอลัมน์ 3**

$$\begin{bmatrix}1&2&\mathbf{2}\\2&2&2\\1&0&4\end{bmatrix}$$

$M_{13}=\begin{vmatrix}2&2\\1&0\end{vmatrix}$

$= 2\cdot0-2\cdot1=-2$

$+\,2\cdot(-2)=-4$

**③ det = 8 + (−12) + (−4) = −8**

โจทย์ 3 — cofactor แถว 1: $8-12-4=-8$ (ตัวกลางติดลบ)

**① ก่อน**

$$\begin{bmatrix}1&2&2\\2&2&2\\1&0&4\end{bmatrix}$$

**② ทำทีละแถว (ป้าย op ทุกครั้ง)**

**$R_2 \to R_2 - 2R_1$**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $R_2$: | 2 | 2 | 2 |
| $-\,2\cdot R_1$: | 2 | 4 | 4 |
| **= $R_2$ ใหม่:** | **0** | **−2** | **−2** |

**$R_3 \to R_3 - R_1$**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $R_3$: | 1 | 0 | 4 |
| $-\,1\cdot R_1$: | 1 | 2 | 2 |
| **= $R_3$ ใหม่:** | **0** | **−2** | **2** |

**$R_3 \to R_3 - R_2$**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $R_3$: | 0 | −2 | 2 |
| $-\,1\cdot R_2$: | 0 | −2 | −2 |
| **= $R_3$ ใหม่:** | **0** | **0** | **4** |

**③ หลัง**

$$\begin{bmatrix}1&2&2\\\mathbf{0}&\mathbf{-2}&\mathbf{-2}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{4}\end{bmatrix}$$

**④ สามเหลี่ยมบน ⇒ det = 1·(−2)·4 = −8 (R − kR ไม่เปลี่ยน det)**

โจทย์ 3 — GE แถวสามขั้นในรูปเดียว: $R_2-2R_1$, $R_3-R_1$ แล้ว $R_3-R_2$

## โจทย์ 4 (15): $\det$ 4×4 ด้วย cofactor + GE (ห้ามกฎ 3×3) → หัวข้อ 9 (ง) มีขั้นเต็ม

กางแถว 1 (0 สามตัว): $2 \cdot \det \begin{pmatrix} 7 & 14 & 14 \\ 9 & 18 & 27 \\ 12 & 144 & 12 \end{pmatrix}$ · ดึง $7, 9, 12$ จากสามแถว: $2 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 12 = 1512$ คูณ $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 12 & 1 \end{pmatrix}$ · $R_2 - R_1 = (0, 0, 1)$, $R_3 - R_1 = (0, 10, -1)$, สลับ $R_2 \leftrightarrow R_3$ ($\times -1$) ⇒ สามเหลี่ยม $1 \cdot 10 \cdot 1 = 10$ ⇒ $-10$ · เช็ก cofactor: $-34 + 4 + 20 = -10$ ✓ · $1512 \times (-10) =$ $\boxed{-15120}$

**① กางแถว 1 (0 ทิ้งได้)**

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 109 & 7 & 14 & 14 \\ 2 & 9 & 18 & 27 \\ 46 & 12 & 144 & 12 \end{vmatrix}$$

**② ปิดแถว 1 คอลัมน์ 1**

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 109 & 7 & 14 & 14 \\ 2 & 9 & 18 & 27 \\ 46 & 12 & 144 & 12 \end{bmatrix} \Rightarrow +2 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 14 & 14 \\ 9 & 18 & 27 \\ 12 & 144 & 12 \end{vmatrix}$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7 | 14 | 14 | ÷7 |
| 9 | 18 | 27 | ÷9 |
| 12 | 144 | 12 | ÷12 |

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 12 & 1 \end{vmatrix} = S$$

**③ ดึงตัวประกอบร่วมออกจากแต่ละแถว (7, 9, 12)**

det = 2·7·9·12 · det S = **1512 · det S**

โจทย์ 4 — กางแถว 1 เหลือพจน์เดียว แล้วดึง 7, 9, 12 ⇒ $1512 \cdot \det S$

**① ก่อน**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 12 & 1 \end{bmatrix}$$

**② ทำทีละแถว (ป้าย op ทุกครั้ง)**

**$R_2 \to R_2 - R_1$**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $R_2$: | 1 | 2 | 3 |
| $-1 \cdot R_1$: | 1 | 2 | 2 |
| = $R_2$ ใหม่: | 0 | 0 | 1 |

**$R_3 \to R_3 - R_1$**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $R_3$: | 1 | 12 | 1 |
| $-1 \cdot R_1$: | 1 | 2 | 2 |
| = $R_3$ ใหม่: | 0 | 10 | −1 |

**$R_2 \leftrightarrow R_3$**

**③ หลัง**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 10 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**④ สลับ 1 ครั้ง ⇒ det S = −(1·10·1) = −10 ⇒ det = 1512 × (−10) = −15120**

โจทย์ 4 — $\det S$ ด้วย GE (ต้องสลับแถวเพราะช่อง (2,2) เป็น 0)

## โจทย์ 5 (30): แก้ระบบ

**5.1 ใช้เมทริกซ์ผกผัน:** $x_1 + x_2 - x_3 = 1,\ x_2 + x_3 = 0,\ x_1 - x_2 - x_3 = 1$ → หัวข้อ 7 (ง) มีขั้นเต็ม

$\det A = 0 + 1 + 1 = 2 \cdot$ cofactor $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \operatorname{adj} A = C^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot A^{-1} = \frac{1}{2} \operatorname{adj} A \cdot x =$

$A^{-1}b = \frac{1}{2}(2, 0, 0) =$ $\boxed{(1, 0, 0)}$ · ตรวจ $1, 0, 1$ ✓

① C แถว i ② adj A = $C^T$ คอลัมน์ i ③ ÷ 2 ทุกช่อง

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{T} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \div 2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

ขนาด 3×3 → 3×3 · ทแยงหลักอยู่ที่เดิม

5.1 — adj = ทรานสโพสของ cofactor แล้วหาร $\det A = 2$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \; i \quad (j)$$

$c_{11} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0\cdot 1 + 2\cdot 0 + 2\cdot 1 = 2$

5.1 — $\text{adj}\, A \cdot b$ แถว 1 ได้ 2 (แถวอื่น 0) ÷ 2 ⇒ $x = (1, 0, 0)$

**5.2 Gauss–Jordan:** $x_1 + x_2 + x_3 = 1,\ x_1 - x_2 - x_3 = 1,\ x_1 = 1$ → **หัวข้อ 5 (ง) มีขั้นเต็ม**

$R_2 - R_1 = (0, -2, -2 \mid 0),\ R_3 - R_1 = (0, -1, -1 \mid 0),\ R_2/(-2) = (0, 1, 1 \mid 0),\ R_3 + R_2 = (0, 0, 0 \mid 0),\ R_1 - R_2 = (1, 0, 0 \mid 1) \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = -x_3,\ x_3$ อิสระ ⇒ $x = (1, -x_3, x_3) = (0, -1, 1)x_3 + (1, 0, 0)$

① ก่อน

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

② ทำทีละแถว (ป้าย op ทุกครั้ง)

**$R_2 \to R_2 - R_1$**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $R_2$: | 1 | −1 | −1 | 1 |
| − 1·$R_1$: | 1 | 1 | 1 | 1 |
| = $R_2$ ใหม่: | 0 | −2 | −2 | 0 |

**$R_3 \to R_3 - R_1$**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $R_3$: | 1 | 0 | 0 | 1 |
| − 1·$R_1$: | 1 | 1 | 1 | 1 |
| = $R_3$ ใหม่: | 0 | −1 | −1 | 0 |

**$R_2 \to (-1/2)\cdot R_2$**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| เดิม: | 0 | −2 | −2 | 0 |
| = ใหม่: | 0 | 1 | 1 | 0 |

**$R_3 \to R_3 + R_2$**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $R_3$: | 0 | −1 | −1 | 0 |
| + 1·$R_2$: | 0 | 1 | 1 | 0 |
| = $R_3$ ใหม่: | 0 | 0 | 0 | 0 |

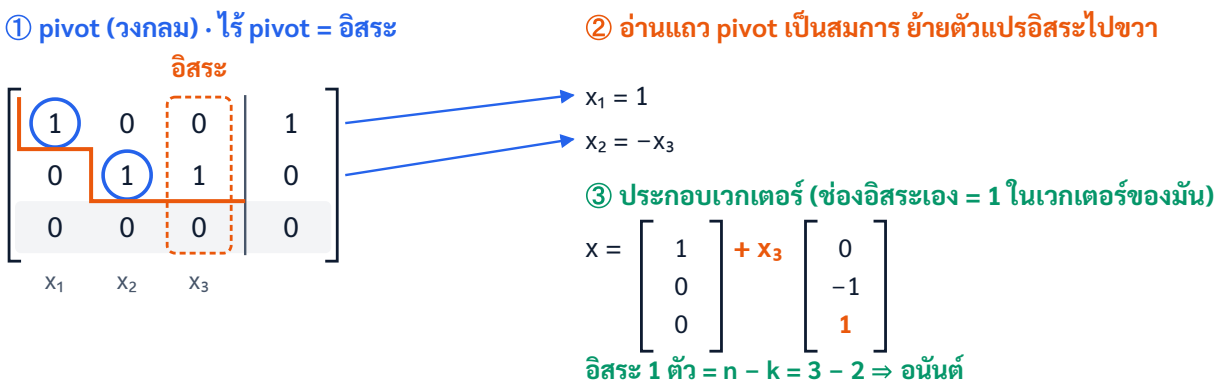
**$R_1 \to R_1 - R_2$**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $R_1$: | 1 | 1 | 1 | 1 |
| − 1·$R_2$: | 0 | 1 | 1 | 0 |
| = $R_1$ ใหม่: | 1 | 0 | 0 | 1 |

③ หลัง

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

5.2 GJ — ห้าขั้นในรูปเดียว: ลบแถว 1 ออกจากแถว 2, 3 · หารแถว 2 ด้วย $-2$ · $R_3 + R_2$ · กำจัดเหนือ pivot $R_1 - R_2$ ⇒ RREF




5.2 GJ — อ่าน RREF: คอลัมน์ 3 ไร้ pivot ⇒ $x_3$ อิสระ · แถว 2: $x_2 = -x_3$ · เวกเตอร์ $(1,0,0) + x_3(0,-1,1)$

**5.2 แบบ Gauss (คลิปข้าม):** $x_1 + x_2 - x_3 = 0,\ 3x_1 + 3x_2 = 0,\ 4x_1 + 4x_2 = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{R_2 \leftarrow R_2 - 3R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - 4R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - \frac{4}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

แถวล่าง $0 = 1$ ⇒ **ไม่มีคำตอบ** (มองเร็ว: แถว 2 บอก $x_3 = 0$, แถว 3 บอก $4x_3 = 1$ ขัดกัน · หรือ สมการ 2 $\times \frac{4}{3}$ ⇒ $4x_1 + 4x_2 = 0 \neq 1$)




④ แถว 3 ใหม่ 0 0 0 | 1 ⇒ 0 = 1 ขัดกัน ⇒ ไม่มีคำตอบ

5.2 แบบ Gauss — สามขั้น: กำจัดใต้ pivot แถว 1 แล้ว $R_3 - \frac{4}{3}R_2$ เหลือแถวขัดกัน

## โจทย์ 6 (10): Cramer $x_1 + x_2 + x_3 = 1,\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ x_1 + x_3 = 0$ → หัวข้อ 9 (ง) มีขั้นเต็ม

$D = 1 - 1 - 1 = -1 \cdot D_1 = 1$ (สามเหลี่ยมบน) · $D_2 = -1 \cdot (2 - 1) = -1$ (กางคอลัมน์ 2) · $D_3 = +1 \cdot (0 - 1) = -1$ (กางแถว 3) · $x = (D_1, D_2, D_3)/D =$ $(-1, 1, 1)$ · ตรวจ $1, 0, 0$ ✓

① D = det A

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

b

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

② แทนคอลัมน์ 1 ด้วย b

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$x_1 = \frac{1}{-1} = -1$$

② แทนคอลัมน์ 2 ด้วย b

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$x_2 = \frac{-1}{-1} = 1$$

② แทนคอลัมน์ 3 ด้วย b

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$x_3 = \frac{-1}{-1} = 1$$

③ x = (−1, 1, 1) แล้วแทนกลับสมการเดิม

โจทย์ 6 — แทนคอลัมน์ทีละคอลัมน์ด้วย $b$ แล้วหาร $D = -1$ ทุกตัว

## โจทย์ 7 (10): $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ แสดง $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ → หัวข้อ 8 (ง) มีขั้นเต็ม

$$\det = -2 \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow (A^{-1})^T = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^T)^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot$$ เท่ากัน

① ทางบน: ผกผันก่อน แล้วทรานสโพส

A

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$A^{-1}$ (ทางลัด 2×2)

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$^T$

$(A^{-1})^T$

$$\begin{bmatrix} -2 & 3/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$A^T$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$^{-1}$

$(A^T)^{-1}$

$$\begin{bmatrix} -2 & 3/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

③ เท่ากันทุกช่อง ✓

⇒ $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

② ทางล่าง: ทรานสโพสก่อน แล้วผกผัน

โจทย์ 7 — สองทางบรรจบที่เมทริกซ์เดียวกัน

## โจทย์ 8 (10): $L_1 : \{x + y + 2z + 11 = 0,\ x + y + z + 9 = 0\}$, $L_2 : x = 2t + 4,\ y = 4t - 5,\ z = 3t + 1$ → หัวข้อ 10 (ง) มีขั้นเต็ม

$d_1 = (1,1,2) \times (1,1,1) = (-1,1,0) \nparallel (2,4,3)$ ⇒ ไม่ขนาน · แทน $L_2$: ระนาบ 1 ⇒ $12t + 12 = 0$, ระนาบ 2 ⇒ $9t + 9 = 0$ ⇒ $t = -1$ ทั้งคู่ ⇒ ตัดกัน · จุดตัด $(2, -9, -2)$ · ตรวจ $2 - 9 - 4 + 11 = 0$, $2 - 9 - 2 + 9 = 0$ ✓

**เฉลยที่พิมพ์ในข้อสอบฝึกผิด**

ข้อสอบพิมพ์ว่า "The lines intersect at $(2, -9, 2)$" — แทนในระนาบแรกได้ $2 - 9 + 2(2) + 11 = 8 \neq 0$ จึงไม่อยู่บน $L_1$ และไม่อยู่บน $L_2$ ($z = 3t + 1 = 2$ ให้ $t = \frac{1}{3}$ แต่ $x = 2t + 4 = 2$ ให้ $t = -1$) · ค่าที่ถูกคือ $(2, -9, -2)$ (พิกัด $z$ ติดลบ)

**① เขียน $n_1$ บน $n_2$ ล่าง**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$n_1 \times n_2$ ตั้งฉากกับทั้งคู่
ช่องกลางติดลบ (สลับลำดับ)

**② ช่อง 1: ปิดคอลัมน์ 1**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

+(↘ − ↗) = [1·1 − 2·1]
**= −1**

**② ช่อง 2: ปิดคอลัมน์ 2**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

−(↘ − ↗) = −[1·1 − 2·1]
**= 1**

**② ช่อง 3: ปิดคอลัมน์ 3**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

+(↘ − ↗) = [1·1 − 1·1]
**= 0**

**③ $n_1 \times n_2 = (-1, 1, 0)$**

โจทย์ 8 — ทิศของ $L_1$ จาก $n_1 \times n_2 = (-1, 1, 0)$ ไม่ขนานกับ $(2, 4, 3)$

**① แทน $L_2$ ลงระนาบ 1** → $12t + 12 = 0$ → **$t = -1$**

**② แทน $L_2$ ลงระนาบ 2** → $9t + 9 = 0$ → **$t = -1$**

เท่ากัน ✓

**③ ตัดกัน ⇒ แทน $t = -1$ ใน $L_2$ ได้จุด $(2, -9, -2)$ แล้วแทนกลับทั้งสองระนาบต้องได้ 0**

โจทย์ 8 — $t = -1$ จากทั้งสองระนาบ ⇒ ตัดกันที่ $(2, -9, -2)$

## โจทย์ 9 โบนัส (10): $ax_1 - x_2 - x_3 = 0,\ ax_2 - x_3 = c,\ bx_3 = 0$ ค่า $b, c$ ที่ให้ อนันต์ / ไม่มี / เดียว

→ หัวข้อ 1 ข้อ 7 + หัวข้อ 4

**ขั้น 1** เป็นสามเหลี่ยมบน ⇒ $\det = a \cdot a \cdot b = a^2 b$ ⇒ **เดียว** $\iff$ $a \neq 0$ **และ** $b \neq 0$ (แทนย้อนกลับ: $x_3 = 0$, $x_2 = c/a$, $x_1 = x_2/a$)

**ขั้น 2** $b = 0$: แถว 3 กลายเป็น $0 = 0$ หายไป เหลือ 2 สมการ 3 ตัวแปร ($ax_1 - x_2 - x_3 = 0$, $ax_2 - x_3 = c$) · แถวทั้งสองไม่ขัดกันไม่ว่า $a, c$ เป็นอะไร (แถว 2 มี $-x_3$ เสมอ จึงมี pivot) ⇒ **อนันต์ทุก** $a, c$ (1 ตัวแปรอิสระ)

**ขั้น 3** $b \neq 0,\ a = 0$: แถว 3 ⇒ $x_3 = 0$ · แถว 2 ⇒ $0 \cdot x_2 - 0 = c$ คือ $0 = c$ ⇒ $c \neq 0$ **ไม่มีคำตอบ** · $c = 0$ ⇒ แถว 1: $-x_2 = 0$, $x_1$ อิสระ ⇒ **อนันต์**

**เดียว: $a \neq 0, b \neq 0$ · อนันต์: $b = 0$ (ทุก $a, c$) หรือ $a = 0, b \neq 0, c = 0$ · ไม่มี: $a = 0, b \neq 0, c \neq 0$**

เฉลยพิมพ์: เดียว $a \neq 0, b \neq 0$ · อนันต์ $b = 0$ · ไม่มี $a = 0, b \neq 0, c \neq 0$ — ถูก แต่**ไม่ได้ระบุ**กรณี $a = 0, b \neq 0, c = 0$ (อนันต์) ในข้อสอบจริงเขียนกรณีนี้เพิ่มด้วย

**① สามเหลี่ยม: det = ผลคูณทแยง (วงกลม)**

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \textcircled{a} & -1 & -1 & 0 \\ 0 & \textcircled{a} & -1 & c \\ 0 & 0 & \textcircled{b} & 0 \end{array}\right]$$

**det = a·a·b = $a^2b$**

**② ค่าน่าสงสัย = ค่าที่ทำให้ det = 0 แล้วแยกกรณี**

- **a ≠ 0, b ≠ 0** ⇒ det ≠ 0 ⇒ เดียว ($x_3 = 0$, $x_2 = c/a$, $x_1 = x_2/a$)
- **b = 0** ⇒ แถว 3 เป็น 0 = 0 หาย เหลือ 2 สมการ 3 ตัวแปร ⇒ อนันต์ทุก a, c
- **a = 0, b ≠ 0** ⇒ $x_3 = 0$ แล้วแถว 2 อ่านว่า 0 = c ⇒ c ≠ 0 ไม่มี · c = 0 อนันต์

**③ ตอบเป็นบรรทัดตามกรณี: เดียว / อนันต์ / ไม่มี**

โบนัส 9 — สามเหลี่ยมบน: det = ผลคูณทแยง ให้ค่าน่าสงสัย $a = 0$ กับ $b = 0$ แล้วแยกกรณีด้วย GE

**โบนัสแบบ 2:** $(a-1)x_1 - x_2 - x_3 = 0,\ ax_2 + x_3 = 1,\ ax_3 = 0$ **ไม่มีคำตอบเมื่อ?**

สามเหลี่ยมบน $\det = (a-1)\cdot a \cdot a$ ⇒ น่าสงสัย $a = 0,\ a = 1 \cdot a = 0$: แถว 3 $0 = 0$; แถว 2 $x_3 = 1$; แถว 1 $-x_1 - x_2 - 1 = 0$ ⇒ อนันต์ · $a = 1$: $x_3 = 0$ ⇒ $x_2 = 1$ ⇒ แถว 1: $0 \cdot x_1 - 1 - 0 = 0$ คือ $-1 = 0$ ขัดกัน ⇒

**ไม่มีคำตอบเมื่อ $a = 1$** (ตรงเฉลยพิมพ์)

โบนัสแบบ 3 เป็นโจทย์พิสูจน์เอกลักษณ์ (หน้าโจทย์เป็นรูป ไม่ได้ถอดมาในชีทนี้) — แนวทำ: คูณเมทริกซ์ทั้งสองข้างออกทีละช่องแล้วเทียบ

**① สามเหลี่ยม: det = ผลคูณทแยง (วงกลม)**

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a-1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a & 0 \end{array}\right]$$

**det = (a − 1)·a·a**

**② ค่าน่าสงสัย = ค่าที่ทำให้ det = 0 แล้วแยกกรณี**

- **a ≠ 0, 1** ⇒ เดียว
- **a = 0** ⇒ แถว 3 หาย, แถว 2: $x_3 = 1$, แถว 1: $-x_1 - x_2 - 1 = 0$ ⇒ อนันต์
- **a = 1** ⇒ $x_3 = 0$, $x_2 = 1$, แถว 1: $0 \cdot x_1 - 1 - 0 = 0$ คือ $-1 = 0$ ⇒ ไม่มีคำตอบ

**③ ตอบเป็นบรรทัดตามกรณี: เดียว / อนันต์ / ไม่มี**

โบนัสแบบ 2 — ค่าน่าสงสัย $a = 0, 1$ · ไม่มีคำตอบเฉพาะ $a = 1$

# สูตรทั้งหมดหน้าเดียว (เลขในวงเล็บ = หัวข้อที่มีขั้นตอน)

## ระบบ 2×2 (1)



$D = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ · $D \neq 0$ เดียว: $x = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{D}$, $y = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{D}$ · $D = 0$: แทน $x = 0$ เทียบ $y$ — เท่า ⇒ อนันต์, ไม่เท่า ⇒ ไม่มี · พารามิเตอร์: แก้ $D(a) = 0$ แล้วแทน**ทุก**ราก · คำตอบมีแค่ $0, 1, \infty$

## เวกเตอร์ (2)



$u \cdot v = \sum u_i v_i$ · $\|u\| = \sqrt{u \cdot u}$ · $d(u,v) = \|u - v\|$ · $\cos\alpha = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}$ · $u \perp v \iff u \cdot v = 0$ · ตั้งฉากกับ $(a,b)$: $(-b,a)$ · $u \times v = (u_2v_3 - u_3v_2,\ u_3v_1 - u_1v_3,\ u_1v_2 - u_2v_1)$

## เมทริกซ์ (3)



$(m \times n)(n \times q) = m \times q$ ตัวในเท่า · $c_{ij}$ = แถว $i$ · คอลัมน์ $j$ · $AB \neq BA$ · $AB = AC \not\Rightarrow B = C$ · $(AB)C = A(BC)$ · $A(B + C) = AB + AC$ · $(AB)^T = B^TA^T$ · $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

## GE / GJE (4, 5)



$(A|b)$ ตัวแปรหายใส่ 0 · $R_i \leftarrow R_i - kR_j$ · แถว $0|c \neq 0$ ⇒ ไม่มี · $k$ pivot $= n$ ⇒ เดียว · $k < n$ ⇒ อนันต์ $n - k$ **อิสระ = คอลัมน์ไร้ pivot** · $x =$ คงที่ $+ t(\ldots) + s(\ldots)$ ช่องตัวเอง 1 · GJE: pivot เป็น 1 กำจัดเหนือด้วย · $m < n$ ⇒ ไม่มีทางเดียว

## เอกพันธ์ $Ax = 0$ (6)



$x = 0$ เสมอ ⇒ ไม่มีทาง "ไม่มี" · $n > m$ ⇒ อนันต์ · จัตุรัส: $\det \neq 0 \iff$ trivial เท่านั้น · $\det = 0 \iff$ อนันต์ · 2×2: อนันต์ $\iff D(a) = 0$ (ไม่ต้องเช็กต่อ)

## ผกผัน (7)




มี $\iff \det \neq 0$ · $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ · $(A|I) \xrightarrow{GJE} (I|A^{-1})$ · $A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{\det A}$, $\text{adj } A = C^T$ · $x = A^{-1}b$ · $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ · $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$ · $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ · $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ · $\det A^{-1} = 1/\det A$ · UT/LT/ทแยง invertible $\iff$ ทแยงไม่มี 0

## ทรานสโพส / สมมาตร (8)



$(A^T)^T = A$ · $(A + B)^T = A^T + B^T$ · $(kA)^T = kA^T$ · $(AB)^T = B^TA^T$ · $\det A^T = \det A$ · สมมาตร $A = A^T \cdot A, B$ สมมาตร ⇒ $A + B, kA, A^{-1}$ สมมาตร, $AB$ ไม่จำเป็น · $AA^T, A^TA$ สมมาตรเสมอ · ทแยง ⇒ สมมาตร

## det (9)




2×2 $ad - bc$ · 3×3 $\sum a_{ij}C_{ij}$, $C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$, เครื่องหมาย $\begin{smallmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{smallmatrix}$ · สามเหลี่ยม = ผลคูณทแยง · แถว/คอลัมน์ 0 หรือสัดส่วนกัน ⇒ 0 · สลับแถว ⇒ $-$ · แถว×$k$ ⇒ $k$ · $R_i + kR_j$ ⇒ เท่าเดิม · $\det kA = k^n \det A$ · $\det AB = \det A \det B$ · $\det A^{-1} = 1/\det A$ · $\det A^T = \det A$ · $\det I = 1$ · $\det(A + B) \neq \det A + \det B$

## 5 ข้อความสมมูล + Cramer (7, 9)



$A$ invertible $\iff \det A \neq 0 \iff Ax = 0$ trivial เท่านั้น $\iff$ GJE $\to I \iff Ax = b$ เดียว · Cramer ($D \neq 0$): $x_i = D_i/D$, $D_i$ = แทนคอลัมน์ $i$ ด้วย $b$

## เส้น / ระนาบ (10)



เส้น: $r = P + td$ · $x = x_0 + at, \ldots$ · จุดตัด 2 ระนาบ ($d = n_1 \times n_2$) · ผ่าน 2 จุด $d = Q - P$ · ระนาบ $ax + by + cz + d = 0$, $n = (a,b,c)$ (และ $kn$) · ผ่าน 3 จุด: $n = (Q - P) \times (R - P)$, $n \cdot (r - P) = 0$ · จุดบนระนาบ ⇔ แทนได้ 0 · ผ่านจุดกำเนิด ⇔ $d = 0$ · 2 มิติ: $ax + by + c = 0$ นอร์มัล $(a,b)$ ทิศ $(-b,a)$ · 1 พารามิเตอร์ = เส้น, 2 = ระนาบ

## ความสัมพันธ์ใน 3 มิติ (10)



ระนาบ–ระนาบ: $n_1 \parallel n_2$ ⇒ ขนาน/ทับ (แทนจุด) · ไม่ ⇒ ตัดเป็นเส้น · ตั้งฉาก $n_1 \cdot n_2 = 0$ · เส้น–ระนาบ: $d \cdot n = 0$ ⇒ ขนาน/อยู่ใน (แทนจุด) · ไม่ ⇒ ตัด 1 จุด (แทน $t$) · ตั้งฉาก $d \parallel n$ · เส้น–เส้น: $d_1 \parallel d_2$ ⇒ ขนาน/ทับ · ไม่ ⇒ **ตัดหรือไขว้**: แก้ระบบ $t$ ต้องตรงกันทุกสมการ

## คำตอบมาตรฐานที่ควรเขียน



เดียว: เขียนเวกเตอร์แล้ว**แทนกลับ** · อนันต์: "$x = (\ldots) + t(\ldots)$, $t$ arbitrary" · ไม่มี: ชี้แถว "$0 = c$" · พารามิเตอร์: 3 บรรทัด เดียว/อนันต์/ไม่มี · det: ค่าเดียวจากทุกวิธี · เส้น: ทิศ + จุด/สมการ $t$ + จุดตัด + ตรวจ