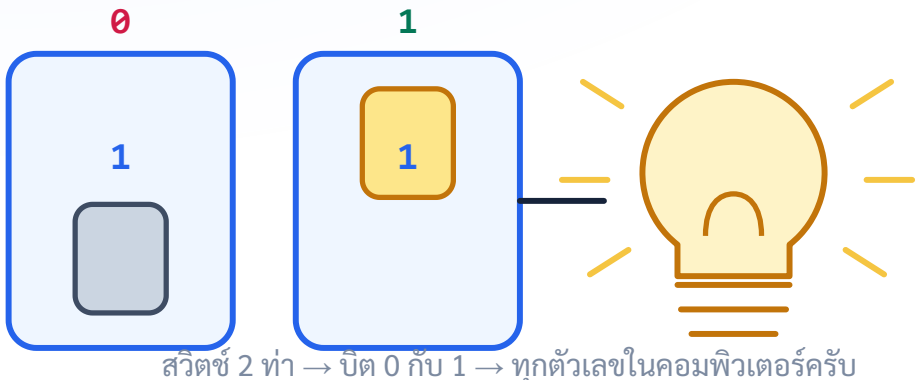
EES271 · DIGITAL CIRCUITS · SIIT

01 EP

ดิจิทัลคืออะไร + ระบบเลขฐาน

analog vs digital · logic level HIGH/LOW · digital pulse · positional numbering · ฐาน 2 / 8 / 16 · เลขมีจุดทศนิยม · การแปลงฐานทุกทิศทาง



สวิตช์ 2 ท่า → บิต 0 กับ 1 → ทุกตัวเลขในคอมพิวเตอร์ครับ

พี่สอนน้องแบบไม่เคยเรียนวงจรดิจิทัลมาก่อนเลยครับ · อ้างอิงสไลด์ EES 271-01 Introduction (Week 1) + Assignment #1 ข้อ 1–7 + Floyd, *Digital Fundamentals* 10th ed.

ตอนนี้เราจะเดินไปทางไหนกัน

ก่อนเริ่ม พี่ขอกางแผนที่ให้น้องดูก่อนครับ วิชานี้น้องไม่เคยเรียนมาก่อนเลย พี่เลยจะเริ่มจากของที่น้องเห็นทุกวัน แล้วค่อย ๆ พาไปหาเลขฐาน ไม่ข้ามขั้นแน่นอนครับ

1	ดิจิทัลคืออะไร — สวิตช์ไฟกับสวิตช์หรี่ไฟ	เริ่มจากศูนย์
2	บิต · ระดับลอจิก HIGH/LOW · รูปคลื่นดิจิทัล	ศัพท์พื้นฐาน
3	ระบบเลขประจำหลัก (positional numbering)	หัวใจของ EP
4	เลขฐานสอง — แค่เปลี่ยน r เป็น 2	ใช้ตลอดวิชา
5	เลขฐานแปดและฐานสิบหก + ตารางเทียบ 0–15	ต้องท่อง
6	เลขที่มีจุดทศนิยม — น้ำหนักติดลบ	คนพลาดเยอะ
7	ฐานสิบ → ฐานอื่น: หารสั้น และ คูณด้วยฐาน	ทิศตรงข้ามกัน
8	binary ↔ octal ↔ hex: จับกลุ่ม 3 บิต / 4 บิต	ทางลัดที่ไวสุด
9	เฉลย Assignment #1 ข้อ 1 และ 2 (6 ข้อย่อย)	ละเอียดเต็ม
10	เฉลย Assignment #1 ข้อ 3 และ 4 (6 ข้อย่อย)	ละเอียดเต็ม
11	เฉลย Assignment #1 ข้อ 5, 6, 7 (8 ข้อย่อย)	ละเอียดเต็ม
12	กับดักรวม + สรุปหน้าเดียว + เช็คลิสต์ก่อนสอบ	เปิดก่อนสอบ

ชีทนี้สอนยังไง

ทุกหัวข้อพี่จะเดินตามจังหวะเดิมเสมอครับ น้องจะได้ชินและไม่ต้องเดาว่าต่อไปจะเจออะไร

I DO
พี่ทำให้ดูก่อน ทีละขั้น มีรูปทุกขั้นครับ น้องแค่นั่งดู ยังไม่ต้องทำ

WE DO
ทำด้วยกัน พี่เว้นช่องไว้ให้น้องเติม แล้วเฉลยให้ทันทีข้างล่างครับ

YOU DO
น้องทำเอง แล้วเฉลยละเอียดอยู่ติดกันข้างล่างทันทีครับ

อ่านตรงนี้ก่อน

โจทย์ในชีทนี้พี่พิมพ์เป็น**ภาษาอังกฤษตามข้อสอบจริง**ครับ เพราะข้อสอบ EES271 เป็นอังกฤษล้วน ถ้าน้องอ่านแต่ฉบับแปลไทย พอเข้าห้องสอบจริงจะงงกับสำนวนภาษา พี่เลยให้เห็นของจริงตั้งแต่วันนี้ แล้วอธิบายวิธีคิดเป็นไทยข้างล่างให้ครับ

คะแนนวิชานี้: **Assignment 25% · Midterm 35% · Final 40%** — Assignment คิดหนึ่งในสี่ของเกรดเลยครับ ตอนที่ 9–11 ของชีทนี้เลยเป็นเฉลย Assignment #1 แบบละเอียดทุกข้อย่อย
ข้อสอบ**เป็น closed-book แต่ใช้เครื่องคิดเลขได้** — ถึงอย่างนั้นพี่ก็อยากให้น้องทำมือให้เป็นก่อนครับ เพราะข้อสอบถามวิธีทำ ไม่ได้ถามแค่คำตอบ

1 ดิจิทัลคืออะไร — สวิตช์ไฟกับสวิตช์หรี่ไฟ

ตะขอเกี่ยว

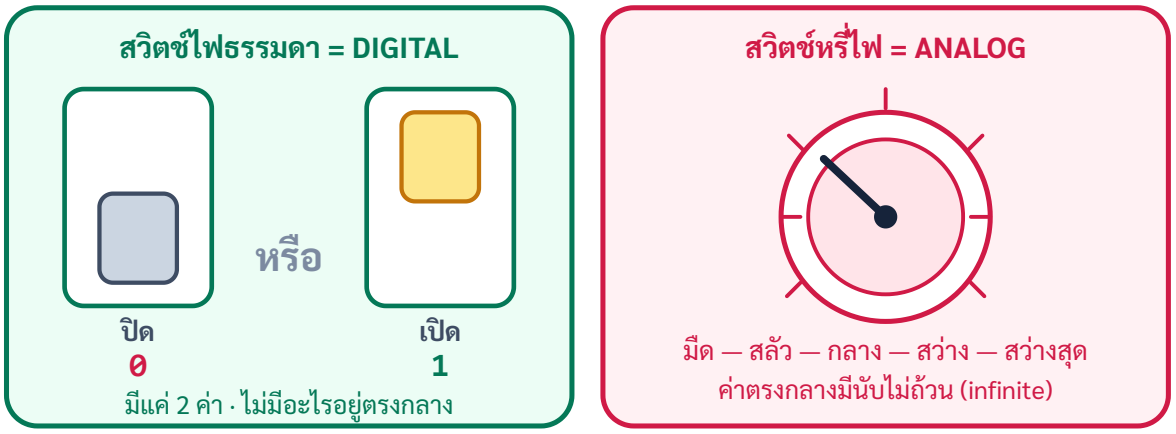
วิชานี้ชื่อ **Digital Circuits** ครับ แต่ก่อนจะไปถึงวงจร พี่อยากให้น้องตอบคำถามนี้ให้ได้ก่อน เพราะมันคือรากของทั้งวิชาเลย

สมมติว่าถ้าน้องเดินเข้าห้อง แล้วเจอ**สวิตช์ไฟธรรมดาบนผนัง** กับ **สวิตช์หรี่ไฟ (แบบหมุน)** ละครับ — สองอันนี้คุมหลอดเดียวกันได้เหมือนกัน แต่มัน**ต่างกันตรงไหน** และทำไมคอมพิวเตอร์ถึงเลือกแบบแรก ไม่เลือกแบบหลัง

ของใกล้ตัว: สวิตช์ไฟ 2 แบบบนผนังเดียวกัน

สวิตช์ไฟธรรมดามีแค่ **2 ท่า** ครับ — กดลงคือปิด กดขึ้นคือเปิด ไม่มีท่ากลาง ๆ น้องจะพยายามกดค้างไว้ครึ่งทางยังไงมันก็ดีดไปข้างใดข้างหนึ่งอยู่ดี

แต่สวิตช์หรี่ไฟหมุนได้ **ต่อเนื่อง** ครับ หมุนนิดเดียวก็สว่างนิดเดียว หมุนเยอะก็สว่างเยอะ ระหว่าง “มืดสนิท” กับ “สว่างสุด” มีค่าอยู่ตรงกลาง**นับไม่ถ้วน**



นี่แหละครับคือความต่างระหว่าง digital กับ analog ทั้งหมด

วงจรดิจิทัลทั้งวิชานี้ คือการเอา “สวิตช์ 2 ท่า” มาต่อกันเยอะ ๆ เท่านั้นเองครับ

เข้าเรื่อง · นิยามจากสไลด์

Digital circuits handle discrete sets of values, usually either HIGH (1) or LOW (0) signals.

แปลเป็นภาษาพี่: **วงจรดิจิทัลรับค่าได้แค่ชุดค่าที่แยกขาดจากกัน** ปกติคือ 2 ค่า — HIGH (1) กับ LOW (0) ครับ คำว่า discrete แปลว่า “แยกเป็นชิ้น ๆ นับได้” ตรงข้ามกับ continuous ที่ต่อเนื่องไม่ขาด

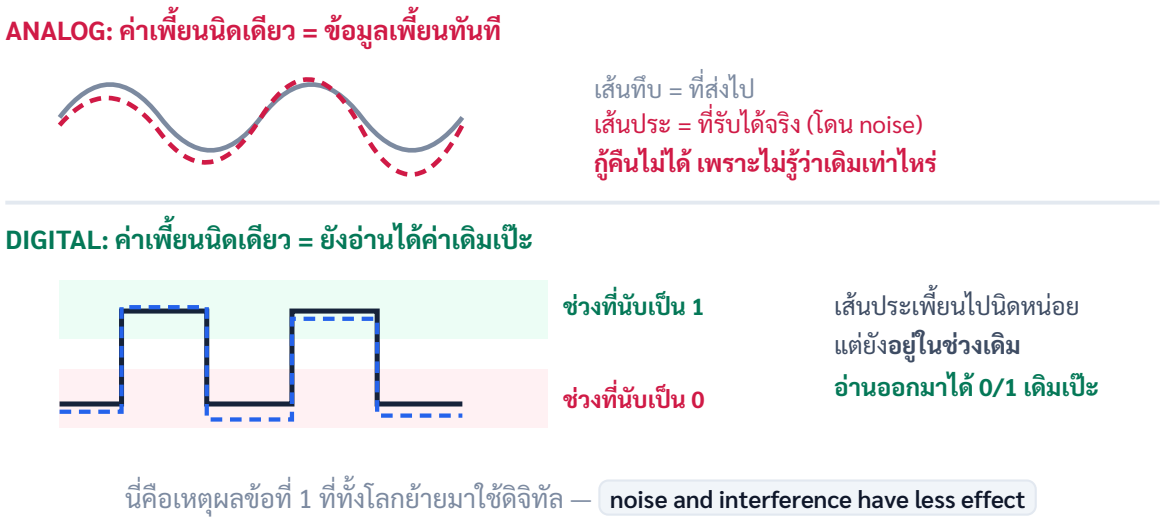
Analog systems have infinite intermediate values. Most occurrences in nature have an analog form.

แปล: **ระบบอนาล็อกมีค่าตรงกลางนับไม่ถ้วน** และของในธรรมชาติเกือบทั้งหมดเป็นอนาล็อก — เสียง แสง อุณหภูมิ ความดัน ล้วนไม่กระโดดเป็นขั้น ๆ ครับ

ที่มา: ทำไมคอมพิวเตอร์ถึงเลือกแบบ 2 ค่า

ตรงนี้สำคัญมากครับ อย่าเพิ่งท่องว่า “คอมใช้ 0 กับ 1” เฉย ๆ พี่อยากให้น้องรู้**เหตุผล** เพราะข้อสอบชอบถามข้อดี-ข้อเสียของดิจิทัล

ปัญหาของสายไฟจริงคือมัน**มีสัญญาณรบกวน (noise)** เสมอครับ แรงดันที่ส่งออกไป 5 โวลต์ พอไปถึงปลายทางอาจเหลือ 4.6 โวลต์ หรือกระเพื่อมเป็น 5.3 โวลต์ ทีนี้ลองเทียบดู



นี่คือเหตุผลข้อที่ 1 ที่ทั้งโลกย้ายมาใช้ดิจิทัล — noise and interference have less effect

พูดง่าย ๆ ครับ: ดิจิทัลยอมทิ้งความละเอียด เพื่อแลกกับ**ความทนทาน** ตราบใดที่ค่าเพี้ยนไม่มากพอจะข้ามไปอีกช่วง ตัวรับก็ยัง**ปัดกลับ**มาเป็น 0 หรือ 1 เดิมได้เสมอครับ

ตาราง 0 กับ 1 ในโลกจริง — เขาแทนกันยังไงบ้าง

สไลด์อาจารย์ให้ตารางนี้ไว้ครับ ประเด็นคือ **0 กับ 1 ไม่ได้แปลว่าแรงดันเสมอไป** มันคือ “สองสถานะที่แยกกันชัด” ของอะไรก็ได้

Technology	แทน 0 ด้วย	แทน 1 ด้วย
Relay logic	Circuit open (วงจรเปิด ไฟไม่ไหล)	Circuit closed (วงจรปิด ไฟไหล)
CMOS	0–1.5 V	3.5–5.0 V

Technology	แทน 0 ด้วย	แทน 1 ด้วย
TTL	0–0.8 V	2.0–5.0 V
Fiber optics	Light off	Light on
Dynamic memory	Capacitor discharged	Capacitor charged
Bipolar ROM	Fuse blown	Fuse intact
Magnetic storage	Flux direction = North	Flux direction = South
Read-only CD	No pit (ผิวเรียบ)	Pit (มีหลุม)

สังเกตให้ดี

ทุกแถวในตารางคือ**ของที่มีแค่ 2 ท่า**ทั้งนั้นครับ — ไฟไหล/ไม่ไหล, มีหลุม/ไม่มีหลุม, ฟิวส์ขาด/ไม่ขาด เหมือนสวิตช์ไฟบนผนังเป๊ะ ต่อให้เทคโนโลยีเปลี่ยนไปแค่ไหน **แนวคิดยังเป็นสวิตช์ 2 ท่าเสมอ** ในวิชานี้เราจะใช้ **CMOS/TTL แบบแรงดัน** เป็นหลักครับ

ทางลัดจำข้อดีของดิจิทัล

จำ 3 คำนี้พอครับ

① Efficiency & reliability — ประมวลผลและส่งข้อมูลได้แม่นยำกว่า
② Simplicity — เก็บได้แน่นกว่า (compactly) และก๊อปได้เหมือนเดิมเป๊ะ (greater fidelity)
③ Noise and interference have less effect — ทนสัญญาณรบกวน

กับดัก · ข้อเสียที่คนลืมตอบ

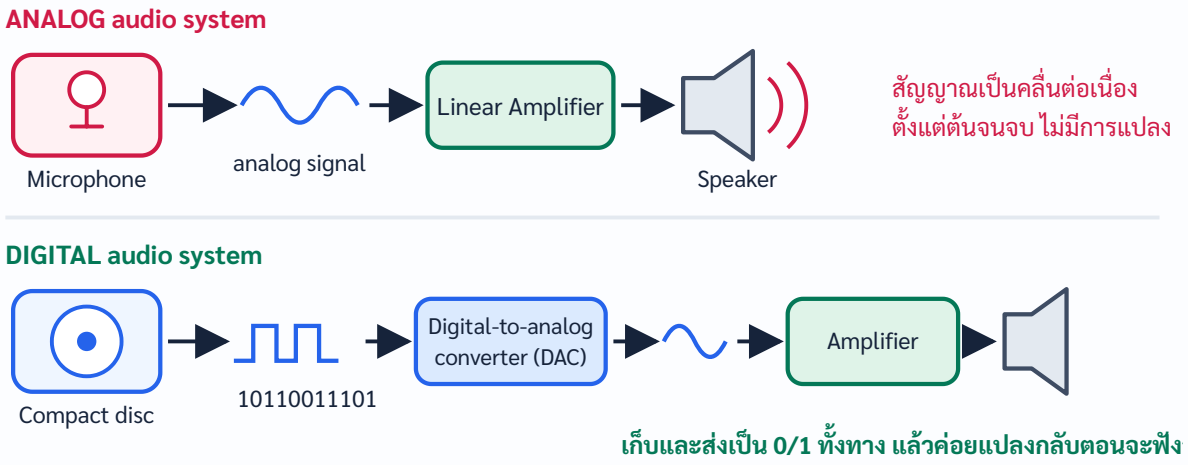
ข้อสอบชอบถามว่าดิจิทัล**ไม่ดี**ตรงไหน คนมักตอบไม่ได้ครับ คำตอบคือ

Since most natural signals are analog, any conversion from analog to digital data can result in loss of accuracy and information.

ของในธรรมชาติเป็นอนาล็อก พอแปลงมาเป็นดิจิทัลก็ต้อง**ปัดค่าทิ้ง** ข้อมูลบางส่วนจึงหายไปเสมอครับ

เส้นทางของสัญญาณจริง — ระบบเสียงอนาล็อก vs ดิจิทัล

สไลด์อาจารย์เทียบสองระบบนี้ไว้ครับ ดูภาพแล้วน้องจะเห็นว่าดิจิทัลมี**กล่องแปลงกลับ**เพิ่มเข้ามาหนึ่งกล่อง



หูของเราเป็นอนาล็อก เพราะฉะนั้นปลายทาง**ต้องแปลงกลับเสมอ**ครับ — วงจรแปลงนี้จะเจอละเอียดใน Week 15

ศัพท์สอบตอนที่ 1

English	แปลว่า	ข้อสอบเขียนมาแบบนี้
digital	ดิจิทัล — รับค่าเป็นชุดที่แยกขาด	"...handle **discrete** sets of values"
analog	อนาล็อก — ค่าต่อเนื่อง	"...have **infinite intermediate values**"
discrete	ไม่ต่อเนื่อง แยกเป็นชิ้น ๆ	ตรงข้ามกับ **continuous**
HIGH / LOW	ระดับสูง / ระดับต่ำ	"HIGH (1) or LOW (0) signals"
noise / interference	สัญญาณรบกวน	"noise and interference have less effect"
fidelity	ความเที่ยงตรงของการทำสำเนา	"reproduced with greater fidelity"
conversion	การแปลง (A→D หรือ D→A)	"conversion ... can result in loss of accuracy"

I DO พี่ทำให้ดูก่อนครับ

ตัวอย่างที่พี่ทำ โจทย์พี่แต่งเอง · ปูทางก่อน Assignment

> Classify each of the following as an **analog** or a **digital** quantity, and state your reason: (i) the position of a light switch on the wall, (ii) the reading of a mercury thermometer.

แปล: บอกว่าแต่ละอันเป็นปริมาณอนาล็อกหรือดิจิทัล พร้อมเหตุผลครับ

1 ถามตัวเองข้อเดียว **“นับค่าที่เป็นไปได้ครบไหม”**

ตั้งคำถามเดียวที่ต้องใช้

เพราะนิยามบอกว่า digital = `discrete` = **นับได้** ครับ ถ้านับค่าที่เป็นไปได้ออกมาเป็นรายการได้ = digital · ถ้านับไม่หมด = analog

2



(i) สวิตช์ไฟ — นับได้ 2 ค่า

เพราะสวิตช์อยู่ได้แค่ท่า `0` ปิด หรือ `1` เปิด **ไม่มีท่าครึ่งทาง** ⟹ **digital** ครับ

3



(ii) เทอร์โมมิเตอร์ปรอท — นับไม่หมด

เพราะปรอทเลื่อนขึ้นลง**ต่อเนื่อง** ระหว่าง 36.5 กับ 36.6 ยังมี 36.51, 36.512, ... อีกไม่จบ ⟹ **analog** ครับ

คำตอบ

ขั้น 1 — ใช้เกณฑ์ “นับค่าที่เป็นไปได้ครบไหม” เพราะนิยาม digital คือ `discrete set of values` ครับ

ขั้น 2 — (i) สวิตช์ไฟ = digital เพราะมีสถานะได้แค่ 2 อย่างคือ OFF (0) กับ ON (1) ไม่มีค่ากลาง

ขั้น 3 — (ii) เทอร์โมมิเตอร์ปรอท = analog เพราะระดับปรอทเปลี่ยนอย่างต่อเนื่อง มีค่าระหว่างสองจุดใด ๆ นับไม่ถ้วน

ตอบ: (i) digital · (ii) analog

“(i) is digital because the switch has only two discrete states, ON and OFF. (ii) is analog because the mercury level varies continuously and has infinite intermediate values.”

WE DO ทำด้วยกันครับ พี่เว้นช่องไว้ให้

ทำด้วยกัน โจทย์พี่แต่งเอง

> A door lock is either **locked** or **unlocked**. A water tap can be turned to any opening between fully closed and fully open. Which one is digital? Which one is analog? What binary value would you assign to each state of the digital one?

ใบ้: นับสถานะของแต่ละอันก่อนครับ

1



นับสถานะของกุญแจ

กุญแจมีกี่สถานะ ..... ⟹ เป็น .....

2



นับสถานะของก๊อกน้ำ

ก๊อกน้ำเปิดได้กี่ระดับ ..... ⟹ เป็น .....

3



ให้ค่าเลขฐานสอง

locked = ... unlocked = ...

เฉลย WE DO

ขั้น 1 — กุญแจมี 2 สถานะ (locked / unlocked) เพราะประตูจะล็อกครึ่งใบไม่ได้ครับ มันล็อกหรือไม่ล็อกเท่านั้น ⟹ **digital**

ขั้น 2 — ก๊อกน้ำเปิดได้ไม่จำกัดระดับ เพราะหมุนนิดเดียวน้ำก็ไหลเปลี่ยนไปแล้ว ระหว่าง “ปิดสนิท” กับ “เปิดสุด” มีระดับกลางนับไม่ถ้วน ⟹ **analog**

ขั้น 3 — ให้ค่าฐานสองแบบ positive logic คือให้สถานะ “ทำงาน/เปิด” เป็น 1 ครับ: locked = `0` unlocked = `1`

จริง ๆ จะกำหนดสลับกันก็ได้ ขอแค่**บอกให้ชัดว่ากำหนดไว้ยังไง** เพราะเลข 0/1 เป็นแค่ชื่อเรียกสถานะ ไม่ได้มีความหมายในตัวเองครับ

ตอบ: door lock = digital (2 states) · water tap = analog (infinite states)

“The door lock is digital because it has only two discrete states; the water tap is analog because its opening varies continuously.”

YOU DO ตาน้องแล้วครับ ทำก่อนค่อยดูเฉลยข้างล่าง

Y1.1

> State **two** advantages of digital systems over analog systems, and **one** disadvantage.

ตอบเป็นภาษาอังกฤษได้เลยครับ ข้อสอบถามแบบนี้ตรง ๆ

เฉลย Y1.1

ขั้น 1 — ข้อได้เปรียบข้อที่ 1: ทนสัญญาณรบกวน เพราะตัวรับแค่ตัดสินว่าแรงดัน “อยู่ช่วงบนหรือช่วงล่าง” ค่าที่เพี้ยนไปนิดหน่อยจึงยังถูกปัดกลับมาเป็นบิตเดิมได้ครับ

ขั้น 2 — ข้อได้เปรียบข้อที่ 2: เก็บแน่นและก๊อปได้เหมือนเดิม เพราะสำเนาของ 0/1 คือ 0/1 ตัวเดิมเป๊ะ ไม่เหมือนเทปคาสเซ็ตที่ก๊อปทีไรก็เสียงแย่ลงทุกที

ขั้น 3 — ข้อเสีย: การแปลง analog → digital ทำให้ข้อมูลหาย เพราะสัญญาณธรรมชาติเป็นอนาล็อก พอมาเป็นดิจิทัลต้องปัดค่าลงเป็นขั้น ๆ ความละเอียดบางส่วนจึงหายไปเสมอ

ตอบ: advantages = noise immunity, compact storage with high-fidelity copying · disadvantage = loss of accuracy during A-to-D conversion

“Digital systems are less affected by noise and can be stored compactly and reproduced with greater fidelity; however, converting natural analog signals to digital form results in a loss of accuracy and information.”

Y1.2

> For a **read-only CD**, what physical property is used to represent 0 and 1? Is a CD an analog or a digital storage medium? Justify your answer.

ใบ้: ดูตารางเทคโนโลยีข้างบนครับ

เฉลย Y1.2

ขั้น 1 — เปิดตารางเทคโนโลยีหาแถว Read-only CD เพราะโจทย์ถามคุณสมบัติทางกายภาพที่ใช้แทนบิต ครับ ตารางบอกว่า **0 = no pit** (ผิวเรียบ) และ **1 = pit** (มีหลุมบนแผ่น)

ขั้น 2 — ตรวจว่ามันมีกี่สถานะ เพราะเกณฑ์ตัดสิน digital คือนับสถานะได้ครบไหม — จุดหนึ่งบนแผ่นมีได้แค่ “มีหลุม” หรือ “ไม่มีหลุม” **2 สถานะเท่านั้น** ไม่มี “หลุมครึ่งใบ”

ขั้น 3 — สรุป เมื่อสถานะนับได้และแยกขาดจากกัน ก็เข้านิยาม `discrete set of values` พอดี

ตอบ: pit / no-pit บนผิวแผ่น — เป็น digital storage medium

“A read-only CD stores a 1 as a pit and a 0 as no pit. It is digital because each spot has only two

discrete states.”

Y1.3

> A microphone produces a signal that varies smoothly between -1 V and $+1$ V. Explain, in terms of **noise**, why this signal is harder to transmit reliably over a long cable than a digital signal.

ใบ้: ถ้าปลายทางรับได้ 0.42 V แทน 0.40 V จะรู้ไหมว่าเพี้ยน

เฉลย Y1.3

ขั้น 1 — ระบุว่าค่าที่ส่งมีความหมายในตัวเอง เพราะสัญญาณอนาล็อกใช้**ขนาดของแรงดัน**แทนข้อมูล โดยตรงครับ 0.40 V กับ 0.42 V คือข้อมูลคนละค่ากัน

ขั้น 2 — ใส่ noise เข้าไป สายยาวเก็บสัญญาณรบกวนระหว่างทาง ทำให้ 0.40 V กลายเป็น 0.42 V แต่ตัวรับ**ไม่มีทางรู้**ว่าเดิมเป็นเท่าไหร่ เพราะทุกค่าเป็นค่าที่ถูกต้องได้หมด $\Longrightarrow$ ข้อมูลเพี้ยนถาวร

ขั้น 3 — เทียบกับดิจิทัล ดิจิทัลใช้แค่ 2 ช่วง ค่าที่เพี้ยนไป 0.02 V ยังอยู่ในช่วงเดิม ตัวรับจึง**ปัดกลับ**มาเป็นบิตเดิมได้ และยัง**สร้างสัญญาณใหม่ให้คมเหมือนเดิม**ก่อนส่งต่อได้ด้วย

ตอบ: เพราะอนาล็อกไม่มีช่วงเผื่อ (no noise margin) ทุกค่าถือเป็นค่าจริงหมด จึงกู้คืนไม่ได้

“In an analog signal every voltage level is a valid value, so added noise cannot be removed. A digital signal has only two valid ranges, so small noise still falls inside the correct range and the original bit can be recovered.”

2 บิต · ระดับลอจิก HIGH/LOW · รูปคลื่นดิจิทัล

ตะขอเกี่ยว

ตอนที่ 1 พี่บอกว่าดิจิทัลมีแค่ 2 ค่า และ CMOS ใช้ **0–1.5 V แทน 0** กับ **3.5–5.0 V แทน 1** ใช่ไหมครับ

งั้นสมมติว่าถ้าน้องเอามัลติมิเตอร์ไปจิ้มสายแล้ววัดได้ **2.4 โวลต์** ละครับ — มันไม่ใช่ 0 และก็ไม่ใช่ 1 แล้วมันคืออะไร วงจรจะอ่านว่าอะไร ตอนนี้พี่จะพาไปดูว่าวิศวกรเขาจัดการกับช่องว่างตรงกลางนี้ยังไงครับ

bit — ชื่อเรียกของเลข 0 กับ 1

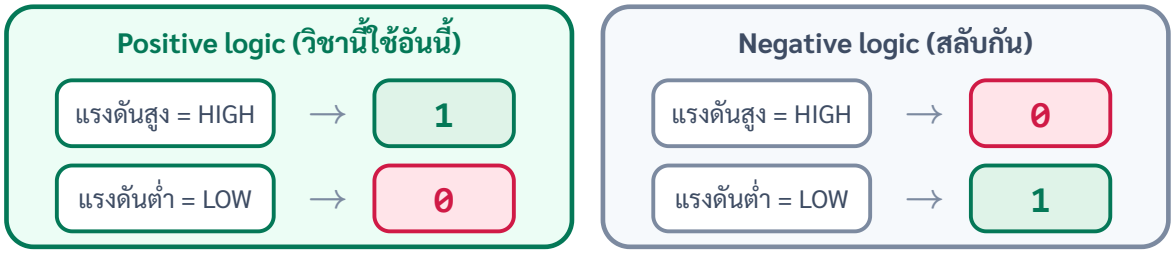
เข้าเรื่อง · นิยามจากสไลด์

`Digital circuits are binary systems that utilize only two digits (called binary digits or bits). These values (0 and 1) are usually represented by two different voltage levels.`

แปล: วงจรดิจิทัลเป็น `binary system` ที่ใช้เลขแค่ 2 ตัว เรียกว่า `binary digit` ย่อว่า `bit` ครับ คำว่า `bit` ย่อมาจาก **bi**nary digi**t** — พอมัดหลาย ๆ บิตเข้าด้วยกันเราเรียกว่า `code` ซึ่งเอาไปแทนตัวเลข ตัวอักษร สัญลักษณ์ หรือคำสั่งก็ได้

positive logic กับ negative logic — ใครเป็น 1

ตรงนี้เป็นข้อตกลงล้วน ๆ ครับ ไม่มีอะไรถูกผิดในตัวมันเอง แต่**ต้องตกลงกันให้ชัดก่อน** ไม่งั้นอ่านค่าผิดกันหมด



สไลด์เขียนขีดเส้นใต้ไว้เลยว่า `this is the standard that we shall employ in this course` — วิชานี้ใช้ **positive logic** ทุกข้อครับ

กับดัก · อ่านโจทย์ให้ดี

คำว่า **HIGH** กับ **1 ไม่ใช่คำเดียวกัน**ครับ — HIGH พูดถึง**แรงดันไฟฟ้า** ส่วน 1 พูดถึง**ค่าตรรกะ** ที่มันตรงกันได้เพราะเราตกลงใช้ positive logic เท่านั้น ถ้าข้อสอบเขียนว่า “assume negative logic” แล้วน้องยังตอบตามความเคยชิน จะพลิกผิดทั้งข้อทันทีครับ

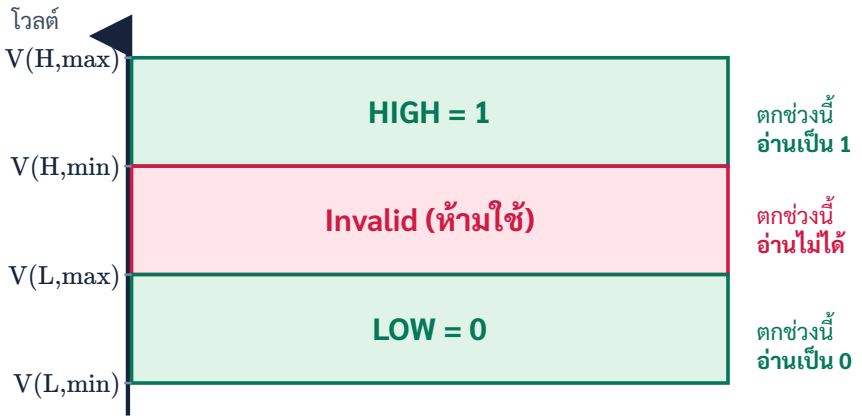
logic level — ทำไมต้องมีช่วง ไม่ใช่จุดเดียว

ในโลกอุดมคติ 1 คือ 5.00 V เป๊ะ ๆ ครับ แต่โลกจริงไม่มีทาง — แหล่งจ่ายไฟแกว่ง สายมีความต้านทาน มี noise เพราะฉะนั้นวิศวกรเลย**กำหนดเป็นช่วง**แทนจุดครับ

นิยาม

> The voltages that are used to represent 0 or 1 are called logic levels. Practically, a HIGH/LOW is any voltage between a specified minimum value and a specified maximum value. There should never be an overlap between the accepted range of HIGH and LOW.

แปล: logic level คือ**ช่วงแรงดัน**ที่ตกลงกันว่าให้อ่านเป็น 0 หรือ 1 ครับ และ**สองช่วงนี้ห้ามซ้อนทับกันเด็ดขาด** — ถ้าซ้อนกันเมื่อไหร่ แรงดันค่าเดียวจะอ่านได้ทั้ง 0 และ 1 ซึ่งใช้งานไม่ได้



ช่องแดงตรงกลางคือ **noise margin** — เผื่อไว้ให้สัญญาณเพี้ยนได้โดยไม่เปลี่ยนความหมาย

คำถามเปิดตอนนี้ที่ว่าวัดได้ 2.4 V แล้วยังไง — คำตอบคือมันตกใน **invalid region** วงจรอ่านไม่ได้ ต้องถือว่าผิดพลาดครับ

เทียบของเก่า · ตอนที่ 1

จำเรื่อง noise ที่พี่เล่าตอนที่ 1 ได้ไหมครับ — **ช่องแดงตรงกลางนี่แหละคือคำตอบว่าทำไมดิจิทัลทน noise** วิศวกรจงใจเว้นช่องว่างไว้ให้สัญญาณเพี้ยนได้ ตราบใดที่ยังเพี้ยนไม่ข้ามช่อง ค่าที่อ่านได้ก็ยังเป็นบิตเดิมครับ ถ้าออกแบบให้ HIGH ติดกับ LOW เลยโดยไม่มีช่องนี้ ระบบจะรวนทันทีที่เจอ noise แค่นิดเดียว

ตัวเลขจริงจากตารางตอนที่ 1 ครับ — ลองดูช่องว่างที่เขาเว้นไว้

ตระกูล	LOW (0)	HIGH (1)	ช่วง invalid ตรงกลาง
CMOS	0 – 1.5 V	3.5 – 5.0 V	1.5 – 3.5 V (กว้าง 2.0 V)
TTL	0 – 0.8 V	2.0 – 5.0 V	0.8 – 2.0 V (กว้าง 1.2 V)

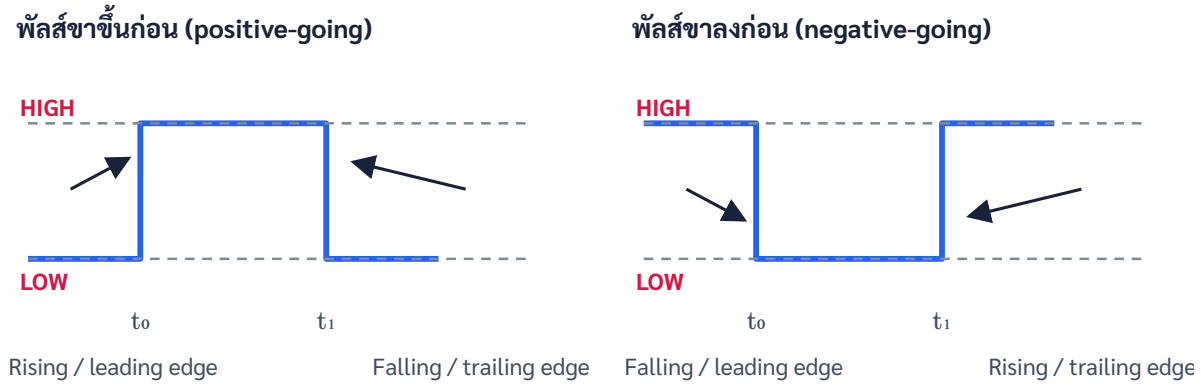
digital pulse — หน้าตาของสัญญาณ 0/1 เมื่อเวลาเดินไป

ทีนี้ถ้าเราเอาแกนเวลามาวางแนวนอน แล้วให้ค่า 0/1 อยู่แนวตั้ง ก็จะได้**รูปคลื่น**ครับ รูปคลื่นดิจิทัลหน้าตาเป็น **สี่เหลี่ยม** ไม่ใช่คลื่นโค้ง เพราะมันมีแค่ 2 ระดับ

ศัพท์ 2 คำที่ต้องแยกให้ออก

`Rising (leading) edge` = ขอบที่สัญญาณ**ขึ้น**จาก LOW ไป HIGH · `Falling (trailing) edge` = ขอบที่สัญญาณ**ลง**จาก HIGH ไป LOW

แต่คำว่า leading / trailing ไม่ได้ผูกกับขึ้นหรือลงนะครับ — `leading` แปลว่า “ขอบที่มาก่อน” และ `trailing` แปลว่า “ขอบที่มาทีหลัง” ของพัลส์ลูกนั้น เพราะฉะนั้นถ้าพัลส์เป็นแบบ**ลงก่อนแล้วค่อยขึ้น** คำว่า leading จะไปอยู่กับขอบขาลงแทนครับ



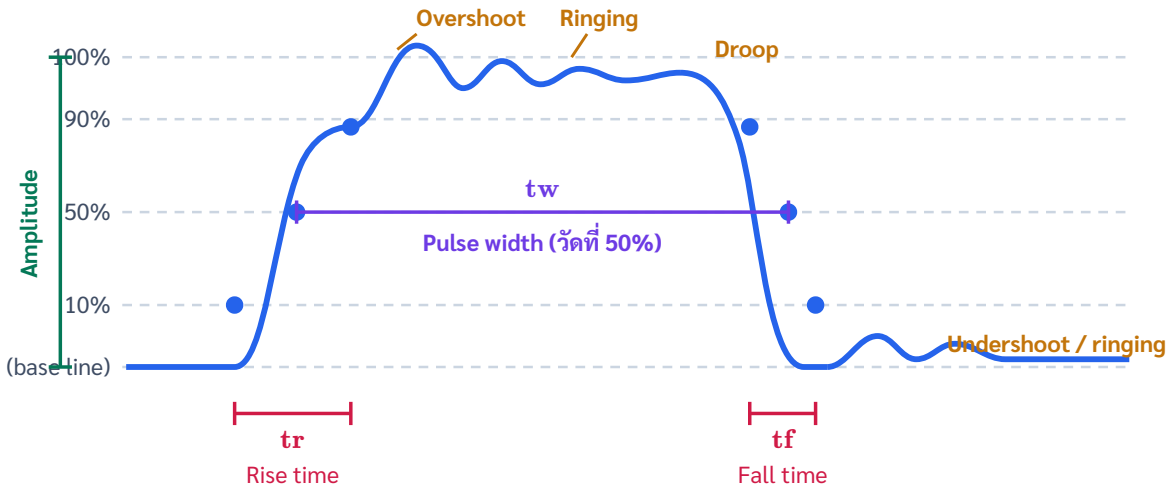
Ideal digital pulse — ขอบตั้งฉาก 90 องศา เปลี่ยนค่าในเวลาศูนย์วินาที

กับดักใหญ่ของหัวข้อนี้

รูปขวามือ **ขอบขาลงกลายเป็น leading edge** ครับ เพราะมันมาก่อนในเวลา ข้อสอบชอบวางรูปแบบขวาแล้วถามว่า leading edge อยู่ตรงไหน คนที่ท่องมาแบบ “leading = ขาขึ้น” จะตอบผิดทันที **ให้ดูว่าขอบไหนมาก่อนในแกนเวลา**เสมอครับ

พัลส์จริง ๆ ไม่ได้ตั้งฉาก — non-ideal pulse

ในความจริง สัญญาณเปลี่ยนจาก LOW ไป HIGH ในเวลาศูนย์ไม่ได้ครับ เพราะสายและตัววงจรมีความจุไฟฟ้า ต้องใช้เวลา “ชาร์จ” ขึ้นไป ขอบเลยเอียงและมีอาการกระเพื่อม



Non-ideal digital pulse — นี่คือหน้าตาที่เห็นบนออสซิลโลสโคปจริงครับ

นิยาม 4 ตัวที่ต้องท่องพร้อม “วัดที่กี่เปอร์เซ็นต์”

ศัพท์	วัดจากไหนถึงไหน	ความหมาย
Rise time t_r	**10%** → **90%** ของขอบขาขึ้น	เวลาที่ใช้ไต่ขึ้น — ยิ่งสั้นยิ่งวงจรทำงานเร็วได้
Fall time t_f	**90%** → **10%** ของขอบขาลง	เวลาที่ใช้ตกลง
Pulse width t_w	**50%** → **50%**	ความกว้างของพัลส์ วัดที่ครึ่งความสูง
Amplitude	base line → ยอดคงตัว	ความสูงของพัลส์

อาการเพี้ยนอีก 4 ตัว: overshoot (พุ่งเลยยอด) · ringing (สั่นเป็นระลอกหลังเปลี่ยนค่า) · droop (ยอดค่อย ๆ ตกระหว่างคงค่า) · undershoot (ทิ่มต่ำกว่าเส้นฐาน) ครับ

ทางลัดจำเลขเปอร์เซ็นต์

จำแค่ว่า **เวลาขึ้น-ลงวัดที่ 10/90 · ความกว้างวัดที่ 50** ครับ

เหตุผลที่**ไม่วัดที่ 0% กับ 100%** ก็เพราะช่วงต้นกับช่วงปลายของขอบมันโค้งแบน ๆ หาจุดเริ่ม-จุดจบไม่ชัด วัดกี่ครั้งก็ได้ไม่เท่ากัน วิศวกรเลยตัดหัวตัดท้ายทิ้งไป 10% แล้ววัดเฉพาะช่วงกลางที่ชันชัดครับ

ศัพท์สอบตอนที่ 2

English	แปลว่า	ข้อสอบเขียนมาแบบนี้
binary digit (bit)	เลขฐานสองหนึ่งหลัก	“two digits called **bits**”

English	แปลว่า	ข้อสอบเขียนมาแบบนี้
logic level	ระดับแรงดันที่ใช้แทน 0/1	“the voltages used to represent 0 or 1”
positive logic	สูง = 1	“1 is represented by the higher voltage”
rising / leading edge	ขอบขาขึ้น / ขอบแรก	“the leading edge of the pulse”
falling / trailing edge	ขอบขาลง / ขอบหลัง	“the trailing edge occurs at t_1”
rise time t_r	เวลาขาขึ้น (10%→90%)	“determine the rise time”
pulse width t_w	ความกว้างพัลส์ (50%)	“measured at the 50% points”
overshoot / ringing	พุ่งเกิน / สั่นเป็นระลอก	ระบุชื่ออาการบนรูปคลื่น

I DO พี่ทำให้ดูครับ

ตัวอย่างที่พี่ทำ โจทย์พี่แต่งเอง

> A pulse has an amplitude of 5.0 V measured from a base line of 0 V. On the rising edge, the signal reaches 0.5 V at $t = 2$ ns and 4.5 V at $t = 6$ ns. Determine the **rise time** t_r.

แปล: พัลส์สูง 5.0 V จากเส้นฐาน 0 V ขาขึ้นผ่าน 0.5 V ที่ 2 ns และ 4.5 V ที่ 6 ns หา rise time ครับ

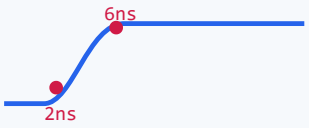
1 10% ของ 5.0 = 0.5 V
90% ของ 5.0 = 4.5 V

แปลงเปอร์เซ็นต์เป็นโวลต์ก่อน

เพราะนิยาม rise time วัดที่ 10% ถึง 90% ครับ ต้องรู้ก่อนว่าสองจุดนั้นคือกี่โวลต์

$0.10 \times 5.0 = 0.5$ V · $0.90 \times 5.0 = 4.5$ V

2



จับเวลาที่สองจุดนั้น

โจทย์ให้มาแล้วครับ: ผ่าน 0.5 V (จุด 10%) ที่ $t = 2$ ns และผ่าน 4.5 V (จุด 90%) ที่ $t = 6$ ns

3 `6 − 2 = 4 ns`

ลบเวลา

เพราะ rise time คือ**ช่วงเวลา**ที่ใช้ไต่จาก 10% ไป 90% ครับ ไม่ใช่เวลาณ จุดใดจุดหนึ่ง

$t_r = 6 - 2 = 4$ ns

คำตอบ

ตอบ: $t_r = 4$ **ns**

"The 10% and 90% points are 0.5 V and 4.5 V; the pulse passes them at 2 ns and 6 ns, so $t_r = 6 - 2 = 4$ *ns."*

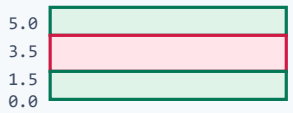
WE DO ทำด้วยกันครับ

ทำด้วยกัน โจทย์พี่แต่งเอง

> A CMOS gate output is measured at **2.4 V**. Using the CMOS logic levels (LOW = 0–1.5 V, HIGH = 3.5–5.0 V), what logic value does this represent? What is this region called?

นี่คือคำถามที่พี่ตั้งไว้ตอนเปิดหัวข้อเลยครับ

1



วาดแถบช่วงก่อน

ช่วง LOW คือ ..... ถึง ..... V · ช่วง HIGH คือ ..... ถึง V

2



วางค่า 2.4 V ลงไป

2.4 V อยู่ในช่วง .....

3

เรียกช่วงนี้ว่าอะไร

ตั้งชื่อช่วงนั้น

ช่วงนี้เรียกว่า .....

เฉลย WE DO

ขั้น 1 — เขียนช่วงทั้งสองออกมาก่อน เพราะการตัดสิน 0/1 ต้องเทียบกับช่วง ไม่ใช่เดาจากความรู้สึกครับ: LOW = **0 ถึง 1.5 V** · HIGH = **3.5 ถึง 5.0 V**

ขั้น 2 — วาง 2.4 V ลงไป เพราะ $1.5 < 2.4 < 3.5$ ค่านี้จึง**สูงเกินกว่าจะเป็น LOW** และ**ต่ำเกินกว่าจะเป็น HIGH** $\Longrightarrow$ ไม่ตกช่วงไหนเลย

ขั้น 3 — ตั้งชื่อ ช่วงตรงกลางที่ไม่ถูกยอมรับทั้งสองฝั่งนี้เรียกว่า `invalid region` (บางตำราเรียก `forbidden region` หรือ `unallowed region`) ครับ

ตอบ: ไม่เป็นทั้ง 0 และ 1 — ตกใน invalid region

"2.4 V lies between the maximum LOW (1.5 V) and the minimum HIGH (3.5 V), so it is in the invalid region and does not represent a valid logic level."

YOU DO ตาน้องครับ

Y2.1

> A pulse goes from LOW to HIGH at $t = 0$ and returns to LOW at $t = 20$ ns. (a) Which edge is the leading edge? (b) Which edge is the rising edge? (c) If instead the pulse goes from HIGH to LOW at $t = 0$ and back to HIGH at $t = 20$ ns, answer (a) and (b) again.

เฉลย Y2.1

ขั้น 1 — แยกสองคำออกจากกันก่อน เพราะ leading/trailing ตัดสินด้วย**เวลา** ส่วน rising/falling ตัดสินด้วย**ทิศทาง**ครับ สองเกณฑ์นี้ไม่เกี่ยวกัน

ขั้น 2 — กรณีแรก (positive-going) ที่ $t = 0$ สัญญาณ**ขึ้น** และเป็นขอบที่**มาก่อน** $\Longrightarrow$ ขอบที่ $t = 0$ เป็นทั้ง leading และ rising · ขอบที่ $t = 20$ ns เป็นทั้ง trailing และ falling

ขั้น 3 — กรณีที่สอง (negative-going) ที่ $t = 0$ สัญญาณ**ลง** แต่ยังมาก่อนอยู่ดี $\Longrightarrow$ ขอบที่ $t = 0$ เป็น **leading edge** แต่เป็น **falling edge** · ขอบที่ $t = 20$ ns เป็น trailing และ rising

ตอบ: (a) ขอบที่ $t = 0$ · (b) ขอบที่ $t = 0$ · (c) leading = ขอบที่ $t = 0$ (เป็นขาลง), rising = ขอบที่ $t = 20$ ns

“Leading/trailing depends on time order; rising/falling depends on direction. For a negative-going pulse the leading edge is a falling edge.”

Y2.2

> A pulse has an amplitude of 3.3 V above a 0 V base line. It crosses 0.33 V at 1 ns, 1.65 V at 3 ns and 2.97 V at 4 ns on the rising edge; on the falling edge it crosses 2.97 V at 24 ns, 1.65 V at 25 ns and 0.33 V at 27 ns. Find t_r, t_f and t_w.

ใบ้: จับคู่เลขโวลต์กับเปอร์เซ็นต์ให้ถูกก่อนครับ

เฉลย Y2.2

ขั้น 1 — แปลงเปอร์เซ็นต์เป็นโวลต์ เพราะโจทย์ให้มาเป็นโวลต์ แต่นิยามพูดเป็นเปอร์เซ็นต์ครับ: $0.10 \times 3.3 = 0.33$ V (จุด 10%) · $0.50 \times 3.3 = 1.65$ V (จุด 50%) · $0.90 \times 3.3 = 2.97$ V (จุด 90%)

ขั้น 2 — หา t_r จาก 10% ไป 90% บนขอบขาขึ้น เพราะ rise time นับเฉพาะช่วงกลางที่ชันครับ: $t_r = 4 - 1 = \mathbf{3}$ ns

ขั้น 3 — หา t_f จาก 90% ลงไป 10% บนขอบขาลง ระวังลำดับกลับกันนะครับ: $t_f = 27 - 24 = \mathbf{3}$ ns

ขั้น 4 — หา t_w จากจุด 50% ทั้งสองข้าง เพราะ pulse width วัดที่ครึ่งความสูงเสมอ: $t_w = 25 - 3 = \mathbf{22}$ ns

ตอบ: $t_r = 3$ **ns** · $t_f = 3$ **ns** · $t_w = 22$ **ns**

"With a 3.3 V amplitude the 10%, 50% and 90% points are 0.33 V, 1.65 V and 2.97 V, giving $t_r = 3$ ns, $t_f = 3$ ns and $t_w = 22$ ns."

Y2.3

> Under **negative logic**, a TTL circuit outputs 0.4 V. What logic value is this? What would the same voltage mean under **positive logic**? (TTL: LOW = 0–0.8 V, HIGH = 2.0–5.0 V)

เฉลย Y2.3

ขั้น 1 — ตัดสินระดับแรงดันก่อน แยกจากค่าตรรกะ เพราะระดับแรงดันไม่ขึ้นกับข้อตกลง logic เลยครับ: 0.4 V ตกในช่วง 0–0.8 V $\Longrightarrow$ เป็น **LOW**

ขั้น 2 — แปลง LOW เป็นค่าตรรกะตามข้อตกลง negative logic ซึ่งบอกว่า `1 is represented by LOW` $\Longrightarrow$ ได้ค่าตรรกะ **1**

ขั้น 3 — เทียบกับ positive logic ซึ่งบอกว่า LOW คือ 0 $\Longrightarrow$ แรงดันเดียวกันนี้จะอ่านได้ **0**

ตอบ: negative logic $\Longrightarrow$ 1 · positive logic $\Longrightarrow$ 0 (แรงดันเดียวกันแต่ค่าตรรกะตรงข้าม)

"0.4 V is a LOW level. Under negative logic a LOW represents 1; under positive logic the same LOW represents 0."

3 ระบบเลขประจำหลัก — หัวใจของทั้ง EP

ตะขอเกี่ยว

ตอนที่ 2 พี่บอกว่าสายไฟหนึ่งเส้นเก็บได้แค่ **1 บิต** คือ 0 หรือ 1 ใช่ไหมครับ

งั้นสมมติว่าถ้าน้องอยากเก็บเลข **29** ละครับ — สายเส้นเดียวเก็บไม่ได้แน่ ๆ ต้องใช้หลายเส้น แต่**หลายเส้นแล้วมันกลายเป็นเลข 29 ได้ยังไง** คำตอบอยู่ในตอนนี้ครับ และมันคือกลไกเดียวกับที่น้องใช้อ่านเลข 29 ในภาษาไทยทุกวันเป๊ะ ๆ เลย

ของใกล้ตัว: เหรียญคนละราคาในกระเป๋า

สมมติน้องมีเหรียญ 3 กอง — กอง 100 บาท กอง 10 บาท กอง 1 บาท ครับ ถ้าพี่บอกว่า “เอามา 2 กับ 4 กับ 7” น้องจะรู้ทันทีว่าได้ 247 บาท

ทำไมถึงรู้ครับ เพราะน้องเอา **จำนวนเหรียญ** ไปคูณกับ **ราคาต่อเหรียญของกองนั้น** แล้วบวกกัน — **นี่คือ positional numbering system ทั้งดุ้นเลยครับ** ไม่มีอะไรมากกว่านี้



$$2 \times 100 + 4 \times 10 + 7 \times 1 = 247$$

จำนวนเหรียญ = **ตัวเลขในหลัก** · ราคาต่อเหรียญ = **น้ำหนักประจำหลัก**

เลขที่เราเขียนกันทุกวัน จริง ๆ แล้วเป็นการ**ย่อ**ประโยคคูณ-บวกยาว ๆ ประโยคนี้ครับ

เข้าเรื่อง · สูตรกลางของทั้งวิชา

Numbers are written using a positional numbering system, where each digit represents the coefficient in a power series.

$$N = a_{n-1}r^{n-1} + a_{n-2}r^{n-2} + \cdots + a_2 r^2 + a_1 r^1 + a_0 r^0$$

สูตรนี้ใช้ได้กับ **ทุกฐาน** — เปลี่ยนแค่ค่า r เท่านั้น

n	the number of digits	จำนวนหลักที่เลขนั้นมี
r	the base (also called the radix)	ฐาน — ใช้ตัวเลขได้กี่แบบ
a_i	integer coefficients, $0 \le a_i < r$	ตัวเลขในหลักที่ i — ต้อง**น้อยกว่าฐานเสมอ**

แปลกลับเป็นภาษาเหรียญครับ: a_i คือ**จำนวนเหรียญในกอง** · r^i คือ**ราคาต่อเหรียญของกองนั้น** · N คือ**เงินรวม**

ที่มาของสูตร — ทำไมหลักถัดไปถึงคูณด้วยฐานพอดี

อย่าท่องสูตรลอย ๆ นะครับ พี่จะอธิบายว่าทำไมมันต้องเป็น $r^0, r^1, r^2, \ldots$ ไม่ใช่อย่างอื่น

กติกาข้อเดียวของระบบนี้คือ **หลักหนึ่งเก็บได้แค่** 0 **ถึง** $r-1$ ครับ (ฐาน 10 เก็บได้ 0–9) พอจะนับต่อจาก $r-1$ ปุ๊บ ตัวเลขในหลักนั้น**เต็ม** ต้องรีเซ็ตเป็น 0 แล้ว**ทดขึ้นหลักถัดไป 1 ตัว**

เพราะฉะนั้น **1 ตัวในหลักถัดไป = ครบ** r **ตัวในหลักนี้** $\Longrightarrow$ หลักถัดไปจึงมีค่ามากกว่าหลักนี้อยู่ r เท่าพอดี



ทุกครั้งที่ขยับซ้าย 1 หลัก น้ำหนักคูณด้วย r

นี่คือเหตุผลที่เลขชี้กำลังไล่ขึ้นทีละ 1 — ไม่ได้มาจากไหน มาจากกติกา “หลักเต็มแล้วทด” ครับ

ฐานสิบ (decimal) — ระบบที่น้องใช้อยู่แล้วทุกวัน

นิยาม

Decimal numbers (base 10) are also based on the same positional numbering system described previously. $r = 10$. The digits used by decimal numbers range from 0 to 9.

แปล: ฐานสิบก็ใช้ระบบเดียวกันเป๊ะครับ แค่ $r = 10$ และตัวเลขที่ใช้ได้คือ 0–9 (10 ตัว)
สังเกตว่า **ตัวเลขที่ใช้ได้ = ฐานพอดี** และ **ตัวใหญ่สุดที่ใช้ได้ = ฐานลบหนึ่ง** ครับ

พี่จะกาง 52 ออกมาให้เห็นทุกชั้นเลยครับ — **แถวฟ้าคือหลัก · แถวม่วงคือน้ำหนัก · แถวเขียวคือค่าจริง**



$$52 = 5 \times 10^1 + 2 \times 10^0 = 50 + 2 = 52$$

ตรงกับเลขเดิม เพราะเราอยู่ในฐานสิบอยู่แล้ว

อ่านกล่อง .pos ยังไง

กล่องน้ำหนักประจำหลักแบบนี้จะโผล่มาอีกเป็นสิบครั้งในชีทนี้ครับ อ่านแบบนี้:

- **แถวบน (กรอบฟ้า)** = ตัวเลขที่เขียนอยู่จริง คือ a_i ในสูตร
- **แถวกลาง (สีม่วง)** = น้ำหนักประจำหลัก คือ r^i — **นับเลขชี้กำลังจากขวาไปซ้าย เริ่มที่ 0 เสมอ**
- **แถวล่าง (สีเขียว)** = ผลคูณ $a_i \times r^i$ ของหลักนั้น — เอามาบวกกันหมดได้ค่าฐานสิบ

กับดักข้อแรกของ EP นี้ · ผิดกันเยอะมาก

เลขชี้กำลังเริ่มที่ 0 ไม่ใช่ 1 ครับ หลักขวาสุดของส่วนจำนวนเต็มคือ $r^0 = 1$ เสมอ

ถ้าน้องเผลอเริ่มที่ 1 จะได้ $52 = 5 \times 10^2 + 2 \times 10^1 = 520$ ซึ่ง**ผิดไป 10 เท่า** วิธีกันพลาดคือ **เขียนน้ำหนักจากขวาไปซ้ายเสมอ** ครับ ไม่ใช่จากซ้ายไปขวา

ทางลัด · เช็คจำนวนหลักกับเลขชี้กำลังสูงสุด

เลข n หลัก $\Longrightarrow$ เลขชี้กำลังสูงสุดคือ $n-1$ ครับ (จากสูตร: พจน์แรกคือ $a_{n-1}r^{n-1}$ พอดี)

เช่น 6031 มี 4 หลัก $\Longrightarrow$ ตัวซ้ายสุดต้องคูณ 10^3 ไม่ใช่ 10^4 **เขียนน้ำหนักเสร็จให้เช็คตรงนี้ทุกครั้ง** จะกันพลาดได้เกือบทั้งหมดครับ

ศัพท์สอบตอนที่ 3

English	แปลว่า	ข้อสอบเขียนมาแบบนี้
positional numbering system	ระบบเลขประจำหลัก	"**Describe** the following numbers using the positional numbering system"
base / radix	ฐาน	"r is the base (also called the radix)"
digit	ตัวเลขหนึ่งหลัก	"n is the number of digits"
coefficient	สัมประสิทธิ์ = ตัวเลขในหลักนั้น	"each digit represents the coefficient"
power series	อนุกรมกำลัง	"the coefficient in a power series"
equivalent decimal value	ค่าฐานสิบที่เท่ากัน	"determine their equivalent decimal values"

คำสั่งข้อสอบที่ต้องอ่านให้ขาด

คำว่า `Describe ... using the positional numbering system` แปลว่า **ให้กางสูตรออกมาเป็นผลบวกของพจน์ ๆ** ครับ — **ไม่ใช่แค่ตอบตัวเลขสุดท้าย** ถ้าเขียนแต่คำตอบโดยไม่กางพจน์ จะโดนหักคะแนน เพราะเขาถามกระบวนการ ส่วนคำว่า `determine their equivalent decimal values` ค่อยเป็นส่วนที่ให้ตอบตัวเลข Assignment 1 ข้อ 1–5 ใช้คำสั่งนี้ทั้งหมดครับ

I DO พี่ทำโจทย์จากสไลด์ให้ดูครับ

> Describe 6031_{10} using the positional numbering system.

แปล: กางเลข 6031 ออกมาตามระบบเลขประจำหลักครับ

1

นับหลักก่อน

6	0	3	1
4	3	2	1

นับจำนวนหลัก แล้วรู้เลขชี้กำลังสูงสุด

เพราะสูตรเริ่มที่ $a_{n-1}r^{n-1}$ ครับ — มี $n = 4$ หลัก $\Longrightarrow$ เลขชี้กำลังสูงสุด $= 4 - 1 = 3$

2

10^3 10^2 10^1 10^0

← เขียนจากขวาไปซ้าย

เขียนน้ำหนักใต้ทุกหลัก

เริ่มจากขวาสุด 10^0 แล้วไล่ขึ้น เพราะถ้าเริ่มจากซ้ายจะนับพลาดง่ายครับ $\Longrightarrow$ ได้ $10^3, 10^2, 10^1, 10^0$ พอดี 4 ตัว ตรงกับขั้น 1

3

```
6×1000 = 6000
0×100 = 0
3×10 = 30
1×1 =
```

คูณทีละหลัก

$6 \times 10^3 = 6000 \cdot 0 \times 10^2 = 0 \cdot 3 \times 10^1 = 30 \cdot 1 \times 10^0 = 1$

หลักที่เป็น 0 **ต้องเขียนด้วย** ครับ เพราะมันคือตัวรักษาตำแหน่งของหลักซ้าย

4

```
6000+0+30+1 = 6031
```

บวกกลับ = ตรวจคำตอบ

เพราะเราอยู่ในฐานสิบ ผลบวกต้อง**เท่ากับเลขเดิมเป๊ะ** ถ้าไม่ตรง แปลว่าน้ำหนักผิดครับ

6031 ในฐานสิบ

6	0	3	1
10^3	10^2	10^1	10^0
6000	0	30	1

คำตอบ

$$6031_{10} = 6 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 1 \times 10^0$$

$$= 6000 + 0 + 30 + 1 = \mathbf{6031_{10}}$$

"$6031_{10} = 6 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 1 \times 10^0 = 6031.$"

WE DO ทำด้วยกันครับ

ทำด้วยกัน สไลด์ Week 1 · Decimal Numbers (ช่องเว้นว่างในสไลด์)

> Describe 849_{10} using the positional numbering system.

เติมสองแถวล่างให้ครบครับ

8	4	9
?	?	?
?	?	?

1 n = ? หลัก

นับหลัก

$n =$ ..... $\Rightarrow$ เลขชี้กำลังสูงสุด $=$ .....

2 ? ? ?

เขียนน้ำหนักจากขวาไปซ้าย

.....

3 บวกกลับต้องได้ 849

คูณแล้วบวกกลับเพื่อตรวจ

$849 =$ .....

เฉลย WE DO

ขั้น 1 — นับหลัก เพราะต้องรู้ก่อนว่าเลขชี้กำลังเริ่มที่เท่าไหร่ครับ: 849 มี **3 หลัก** $\Rightarrow n = 3 \Rightarrow$ เลขชี้กำลังสูงสุด $= n - 1 = \mathbf{2}$

ขั้น 2 — เขียนน้ำหนักจากขวาไปซ้าย เพราะหลักขวาสุดคือ r^0 เสมอครับ: ขวาสุด $10^0 = 1 \cdot$ กลาง $10^1 = 10 \cdot$ ซ้ายสุด $10^2 = 100$ — ตรวจแล้วตัวซ้ายสุดได้ 10^2 ตรงกับขั้น 1 พอดี

ขั้น 3 — คูณทีละหลักแล้วบวก เพราะสูตรบอกว่าค่ารวมคือผลบวกของทุกพจน์: $8 \times 100 = 800 \cdot 4 \times 10 = 40 \cdot 9 \times 1 = 9 \Rightarrow 800 + 40 + 9 = 849$ ตรงกับเลขเดิม ✓

849 ในฐานสิบ

8	4	9
10^2	10^1	10^0
800	40	9

ตอบ: $849_{10} = 8 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 9 \times 10^0 = 800 + 40 + 9 = \mathbf{849_{10}}$

"$849_{10} = 8 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 9 \times 10^0 = 849.$"

YOU DO ตาน้องครับ

Y3.1

> Describe 4207_{10} using the positional numbering system.

ระวังหลักที่เป็นศูนย์นะครับ ห้ามข้าม

เฉลย Y3.1

ขั้น 1 — นับหลัก เพราะเลขชี้กำลังสูงสุดคือ $n-1$ ครับ: 4207 มี 4 หลัก $\Longrightarrow$ สูงสุดคือ 10^3

ขั้น 2 — เขียนน้ำหนักจากขวาไปซ้าย: $10^0 = 1, 10^1 = 10, 10^2 = 100, 10^3 = 1000$

ขั้น 3 — คูณทุกหลักรวมทั้งหลักศูนย์ เพราะถ้าข้ามหลัก 0 ไป หลักซ้ายจะเลื่อนตำแหน่งผิดทันทีครับ: $4 \times 1000 = 4000 \cdot 2 \times 100 = 200 \cdot 0 \times 10 = 0 \cdot 7 \times 1 = 7$

ขั้น 4 — บวกกลับตรวจ: $4000 + 200 + 0 + 7 = 4207$ ตรงกับเลขเดิม ✓

4207 ในฐานสิบ

4	2	0	7
10^3	10^2	10^1	10^0
4000	200	0	7

ตอบ: $4207_{10} = 4 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 7 \times 10^0 = \mathbf{4207_{10}}$

"$4207_{10} = 4 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 7 \times 10^0 = 4207.$"

Y3.2

> In a base-r system, the digit set is $\{0, 1, \ldots, r-1\}$. Explain why the numeral **8** can never appear in an octal (base 8) number, and why **2** can never appear in a binary number.

ใบ้: กลับไปดูเงื่อนไข $0 \le a_i < r$ ในสูตรครับ

เฉลย Y3.2

ขั้น 1 — ยกเงื่อนไขจากสูตรมาก่อน เพราะสูตรระบุไว้ชัดว่า $0 \le a_i < r$ แปลว่าตัวเลขในหลักต้อง**น้อยกว่าฐานเสมอ**ครับ

ขั้น 2 — แทน $r = 8$ ได้ $0 \le a_i < 8 \Longrightarrow$ ตัวเลขที่ใช้ได้คือ 0 ถึง 7 เท่านั้น เลข 8 ไม่ผ่านเงื่อนไข เพราะ $8 < 8$ เป็นเท็จ

ขั้น 3 — อธิบายด้วยกลไก "หลักเต็มแล้วทด" พอสะสมครบ 8 ในหลักหน่วย ระบบจะ**รีเซ็ตเป็น 0 แล้วทดขึ้นหลักซ้าย**ทันที กลายเป็น 10_8 เพราะฉะนั้นสถานะ "แปด" จึงไม่เคยถูกเขียนด้วยสัญลักษณ์เดียวเลย

ขั้น 4 — แทน $r = 2$ **ด้วยเหตุผลเดียวกัน** ได้ $0 \le a_i < 2 \Longrightarrow$ ใช้ได้แค่ 0 กับ 1 พอครบสองก็ทดเป็น 10_2 เลข 2 จึงไม่มีทางปรากฏ

ตอบ: เพราะฐาน r **ใช้ตัวเลขได้แค่** 0 **ถึง** $r-1$ **— ครบ** r **เมื่อไหร่ต้องทดขึ้นหลักถัดไปเสมอ**
"In base r every coefficient must satisfy $0 \le a_i < r$, so base 8 uses only 0–7 and base 2 uses only 0–1; reaching r forces a carry into the next position."

Y3.3

> How many **different values** can be represented by n digits in base r? Use your answer to state how many values 3 binary digits can represent.

เฉลย Y3.3

ขั้น 1 — คิดทีละหลัก เพราะแต่ละหลักเลือกได้อิสระจากกันครับ: หลักหนึ่งเลือกได้ r แบบ (คือ 0 ถึง $r-1$)

ขั้น 2 — คูณกันทุกหลัก เพราะทุกการเลือกของหลักที่หนึ่งจับคู่กับทุกการเลือกของหลักที่สองได้หมด:

$$\underbrace{r \times r \times \cdots \times r}_{n \text{ ตัว}} = r^n$$

ขั้น 3 — แทนค่า $r = 2$**,** $n = 3$**:** $2^3 = 8$ แบบ

ขั้น 4 — ตรวจด้วยการไล่จริง เพราะสูตรควรเช็คได้ด้วยมือเมื่อเลขเล็ก: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111 — นับได้ **8 ตัว** ตรงกับสูตร ✓

ตอบ: r^n **ค่า · 3 บิตแทนได้** $2^3 = 8$ **ค่า (คือ 0 ถึง 7)**
"n digits in base r represent r^n different values, so 3 binary digits represent $2^3 = 8$ values, namely 0 through 7."

4 เลขฐานสอง — ระบบเดียวกัน แค่เปลี่ยน r เป็น 2

ตะขอเกี่ยว

ตอนที่ 3 พี่กาง 6031_{10} ออกมาเป็น $6 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 1 \times 10^0$ ใช่ไหมครับ และย้ำว่าสูตรนี้ **ใช้ได้กับทุกฐาน เปลี่ยนแค่ r**

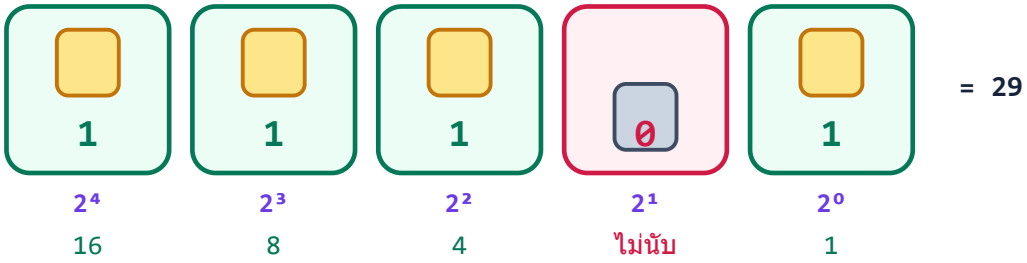
งั้นสมมติว่าถ้าน้องแทน $r = 2$ ลงไปตรง ๆ ละครับ — จะเกิดอะไรขึ้น น้ำหนักประจำหลักจะกลายเป็นอะไร และทำไมมันถึงพอดีกับสวิตช์ไฟที่มีแค่ 2 ท่าจากตอนที่ 1 ตอนนี้พี่จะพาไปดูว่า **ไม่มีสูตรใหม่เลยแม้แต่บรรทัดเดียว**ครับ

ของใกล้ตัว: สวิตช์ไฟ 5 ตัวเรียงกันบนผนัง แต่ราคาไม่เท่ากัน

กลับไปที่กระเป๋าเหรียญของตอนที่ 3 ครับ แต่คราวนี้เปลี่ยนกติกา 2 ข้อ:

① **ราคาเหรียญไม่ใช่ 1, 10, 100 แล้ว แต่เป็น 1, 2, 4, 8, 16** (คูณสองไปเรื่อย ๆ เพราะ $r = 2$)
② **แต่ละกองมีเหรียญได้แค่ 0 หรือ 1 เหรียญเท่านั้น** (เพราะ $0 \le a_i < 2$)

เหลือแค่ “มี” กับ “ไม่มี” — **ก็คือสวิตช์ปิด/เปิดพอดีเป๊ะครับ**



บวกเฉพาะกองที่สวิตช์**เปิด**: 16 + 8 + 4 + 1 = **29** — นี่คือ 11101_2 ครับ

เลขฐานสองไม่ต้อง “คูณ” เลยครับ เพราะตัวเลขมีแค่ 0 กับ 1 — **คูณ 1 คือเอามาทั้งก้อน · คูณ 0 คือทิ้ง**

เข้าเรื่อง · นิยามจากสไลด์

Binary numbers are commonly employed by computer systems. Consist of HIGH (1) and LOW (0) states. Also referred to in Boolean logic as TRUE or FALSE states, respectively.

Binary numbers (base 2) also use the same positional numbering system described previously. $r = 2$. The digits used by binary numbers range from 0 to 1.

แปล: เลขฐานสองใช้ระบบเดิมเป๊ะครับ แค่ $r = 2$ และตัวเลขที่ใช้ได้คือ 0 กับ 1
ตัวเลขหนึ่งหลักในฐานสองเรียกว่า `bit` (จากตอนที่ 2) และในทางตรรกศาสตร์ 1 คือ `TRUE` · 0 คือ `FALSE` ซึ่งเราจะใช้หนักมากตั้งแต่ EP05 เป็นต้นไป

น้ำหนักประจำหลักฐานสอง — ต้องท่องได้ถึง 2^{10}

น้ำหนัก	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}
ค่า	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

ทางลัด · ไม่ต้องท่อง ให้คูณสองไปเรื่อย ๆ

พี่ไม่อยากให้น้องท่องตารางนี้แบบท่องจำครับ ให้**เขียนสดทุกครั้ง** เริ่มที่ 1 แล้วคูณสองไปทางซ้าย: 1 → 2 → 4 → 8 → 16 → 32 → 64 → 128 ...

ใช้เวลา 3 วินาที แต่**ไม่มีทางจำผิด** และใช้ได้กับทุกฐาน — ฐาน 8 ก็คูณแปดไปเรื่อย (1, 8, 64, 512) ฐาน 16 ก็คูณสิบหก (1, 16, 256, 4096) ครับ

MSB กับ LSB — ชื่อเรียกหัวกับท้าย



MSB = บิตซ้ายสุด (น้ำหนักสูงสุด) · LSB = บิตขวาสุด (น้ำหนัก $2^0 = 1$) — สองคำนี้จะใช้หนักตอนเรื่อง complement ใน EP02 ครับ

กับดัก · ต้องเขียนฐานกำกับเสมอ

เลข **10** เขียนลอย ๆ อ่านได้ 2 แบบครับ — ถ้าเป็นฐานสิบคือ “สิบ” แต่ถ้าเป็นฐานสองคือ “สอง”

ต้องเขียนตัวห้อยกำกับทุกครั้ง: $10_2 = 2_{10}$ ครับ

Assignment เขียนกำกับมาให้ครบทุกข้ออยู่แล้ว (เช่น 11101_2) — **เวลาตอบก็ต้องเขียนกำกับกลับไปด้วย** ไม่งั้นถือว่าคำตอบไม่สมบูรณ์ครับ

วิธีอ่านออกเสียง

11101_2 อ่านว่า **“วัน-วัน-วัน-ซีโร่-วัน เบสทู”** ครับ **ห้ามอ่านว่า “หนึ่งหมื่นหนึ่งพันหนึ่งร้อยหนึ่ง”** เพราะคำว่าหมื่น/พัน/ร้อยเป็นชื่อน้ำหนักของ**ฐานสิบ** พออยู่ฐานสองน้ำหนักคนละชุดกันหมดครับ

ศัพท์สอบตอนที่ 4

English	แปลว่า	ข้อสอบเขียนมาแบบนี้
binary number	เลขฐานสอง	“Describe the following **binary** numbers...”

English	แปลว่า	ข้อสอบเขียนมาแบบนี้
bit	หลักหนึ่งหลักในฐานสอง	“an 8-**bit** binary number”
MSB	บิตนัยสำคัญมากสุด (ซ้ายสุด)	“most significant bit”
LSB	บิตนัยสำคัญน้อยสุด (ขวาสุด)	“least significant bit”
leading zero	ศูนย์นำหน้า	01001_2 — ตัว 0 ตัวหน้าไม่เปลี่ยนค่า

I DO พี่ทำโจทย์จากสไลด์ให้ดูครับ

ตัวอย่างที่พี่ทำ — สไลด์ Week 1 · Binary to Decimal Conversion (ช่องเว้นว่าง)

> Describe 1011_2 using the positional numbering system and determine its equivalent decimal value.

แปล: กาง 1011_2 ตามระบบเลขประจำหลัก แล้วบอกค่าฐานสิบครับ

1

ฐานคืออะไร
$\mathbf{r = 2}$

อ่านตัวห้อยเพื่อรู้ r

ตัวห้อยเขียน $2 \Longrightarrow r = 2$ ครับ เพราะฉะนั้นน้ำหนักจะเป็นกำลังของ 2 **ต้องอ่านตัวห้อยก่อนเสมอ** ไม่งั้นเลือกน้ำหนักผิดชุด

2

2^3 2^2 2^1 2^0
8 4 2 1

เขียนน้ำหนักจากขวาไปซ้าย

$2^0 = 1, 2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8$ ครับ — มี 4 หลัก เลขชี้กำลังสูงสุดจึงเป็น 3 ตรงตามกฎ $n - 1$

3

```
1 × 8 = 8
0 × 4 = 0
1 × 2 = 2      1 × 1 = 1
```

คูณทีละหลัก

ฐานสองง่ายมากครับ เพราะคูณ 1 คือ**ได้น้ำหนักนั้นเต็ม ๆ** ส่วนคูณ 0 คือ**ทิ้งทั้งก้อน**

4

```
8 + 0 + 2 + 1 = 11
```

บวกเฉพาะหลักที่เป็น 1

$8 + 2 + 1 = 11$ ครับ $\Longrightarrow 1011_2 = 11_{10}$

1011 ในฐานสอง

1	0	1	1
2^3	2^2	2^1	2^0
8	0	2	1

คำตอบ

$1011_2 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$

$= 8 + 0 + 2 + 1 = \mathbf{11_{10}}$

"$1011_2 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 11_{10}$."

WE DO ทำด้วยกันครับ

ทำด้วยกัน สไลด์ Week 1 · Binary to Decimal Conversion (ช่องเว้นว่าง)

> Describe 101000_2 using the positional numbering system and determine its equivalent decimal value.

ระวังครับ ข้อนี้มีศูนย์ติดกัน 3 ตัว ห้ามข้ามหลัก

เติมสองแถวล่างให้ครบครับ

1	0	1	0	0	0
?	?	?	?	?	?
?	?	?	?	?	?

1 มีกี่บิต

นับบิต

$n =$ ..... บิต $\Longrightarrow$ MSB มีน้ำหนัก 2 .....

2 ? ? ? ? ? ?

เขียนน้ำหนัก 1, 2, 4, 8, 16, 32 จากขวาไปซ้าย

.....

3 บวกเฉพาะบิตที่เป็น 1

บวกเฉพาะบิตที่เป็น 1

$101000_2 =$ ..... $=$ ..... $_{10}$

เฉลย WE DO

ขั้น 1 — นับบิต เพราะน้ำหนักของ MSB คือ 2^{n-1} ครับ: 101000_2 มี **6 บิต** $\Longrightarrow$ MSB มีน้ำหนัก $2^5 = 32$

ขั้น 2 — เขียนน้ำหนักจากขวาไปซ้าย โดยคูณสองไปเรื่อย ๆ เพราะวิธีนี้ไม่มีทางจำผิดครับ: $1, 2, 4, 8, 16, 32$ $\Longrightarrow$ เรียงกลับเป็น $2^5\ 2^4\ 2^3\ 2^2\ 2^1\ 2^0 = 32\ 16\ 8\ 4\ 2\ 1$ — ตัวซ้ายสุดได้ 2^5 ตรงกับขั้น 1 พอดี ✓

ขั้น 3 — บวกเฉพาะบิตที่เป็น 1 เพราะบิต 0 คูณอะไรก็ได้ 0 ครับ: บิต 1 อยู่ที่ตำแหน่ง $2^5 = 32$ กับ $2^3 = 8$ $\Longrightarrow$ $32 + 8 = 40$

101000 ในฐานสอง

1	0	1	0	0	0
2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
32	0	8	0	0	0

ตอบ: $101000_2 = 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 32 + 8 = \mathbf{40_{10}}$

"$101000_2 = 1 \times 2^5 + 1 \times 2^3 = 32 + 8 = 40_{10}$."

YOU DO ตาน้องครับ

Y4.1

> Describe 110110_2 using the positional numbering system and determine its equivalent decimal value.

เฉลย Y4.1

ขั้น 1 — อ่านตัวห้อยเพื่อรู้ฐาน เพราะน้ำหนักขึ้นกับฐานครับ: ตัวห้อยเป็น 2 $\Longrightarrow$ $r = 2$

ขั้น 2 — นับบิตแล้วเขียนน้ำหนัก: มี 6 บิต $\Longrightarrow$ น้ำหนักจากขวาไปซ้ายคือ $1, 2, 4, 8, 16, 32$ (MSB ได้ $2^5 = 32$ ตรงกับ $n - 1 = 5$ ✓)

ขั้น 3 — วางบิตทับน้ำหนัก แล้วเก็บเฉพาะบิตที่เป็น 1 เพราะบิต 0 ไม่ส่งค่าเข้าผลรวมครับ:

$1 \times 32 = 32 \cdot 1 \times 16 = 16 \cdot 0 \times 8 = 0 \cdot 1 \times 4 = 4 \cdot 1 \times 2 = 2 \cdot 0 \times 1 = 0$

ขั้น 4 — บวก: $32 + 16 + 4 + 2 = 54$

110110 ในฐานสอง

1	1	0	1	1	0
2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
32	16	0	4	2	0

ตอบ: $110110_2 = 32 + 16 + 4 + 2 = \mathbf{54_{10}}$

"$110110_2 = 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 54_{10}$."

Y4.2

> Determine the decimal value of 10000001_2. Identify the MSB and the LSB, and state the weight of each.

ใบ้: 8 บิต แต่มีบิต 1 แค่ 2 ตัวครับ

เฉลย Y4.2

ขั้น 1 — นับบิต เพราะต้องรู้น้ำหนักของ MSB ก่อนครับ: มี 8 บิต ⟹ MSB มีน้ำหนัก $2^{8-1} = 2^7 = 128$

ขั้น 2 — ระบุ MSB กับ LSB เพราะโจทย์ถามตรง ๆ:
MSB = บิตซ้ายสุด = **1** น้ำหนัก $2^7 = 128$ · LSB = บิตขวาสุด = **1** น้ำหนัก $2^0 = 1$

ขั้น 3 — บวกเฉพาะบิตที่เป็น 1 เพราะบิตกลางทั้ง 6 ตัวเป็น 0 หมด ไม่ส่งค่าเข้าผลรวมเลยครับ: $128 + 1 = 129$

ขั้น 4 — ตรวจด้วยความสมเหตุสมผล เลข 8 บิตแทนค่าได้ 0 ถึง $2^8 - 1 = 255$ ครับ 129 ตกในช่วงนี้ ⟹ ผ่าน

10000001 ในฐานสอง

1	0	0	0	0	0	0	1
2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
128	0	0	0	0	0	0	1

ตอบ: $10000001_2 = \mathbf{129_{10}}$ **· MSB = 1 (น้ำหนัก 128) · LSB = 1 (น้ำหนัก 1)**

"$10000001_2 = 1 \times 2^7 + 1 \times 2^0 = 128 + 1 = 129_{10}$. *The MSB has weight 128 and the LSB has weight 1.*"

Y4.3

> Show that 0110_2 and 110_2 have the same decimal value. Explain why a **leading zero** never changes the value of a number.

เฉลย Y4.3

ขั้น 1 — กาง 0110_2 ออกมา เพราะต้องเห็นว่าหลักไหนส่งค่าเข้าผลรวมบ้างครับ: $0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 0 + 4 + 2 + 0 = 6$

ขั้น 2 — กาง 110_2 ออกมา: $1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 4 + 2 + 0 = 6$ — เท่ากันครับ

ขั้น 3 — อธิบายว่าทำไม เพราะพจน์ที่เพิ่มมาคือ $0 \times 2^3 = 0$ ครับ การบวกศูนย์เข้าไปไม่เปลี่ยนผลรวม และที่สำคัญคือ**ศูนย์ตัวนั้นอยู่ซ้ายสุด จึงไม่ดันหลักอื่นให้ขยับ**

ขั้น 4 — เทียบกับศูนย์ที่ไม่ใช่ leading zero เพื่อให้เห็นความต่าง: ถ้าเติมศูนย์**ท้าย**เป็น 1100_2 จะได้ $8 + 4 = 12$ — ค่าเปลี่ยนทันที**เพราะทุกหลักถูกดันไปทางซ้าย 1 ตำแหน่ง ทำให้น้ำหนักคูณสอง** $\Longrightarrow$ ศูนย์ที่เติมได้ฟรีคือ**ซ้ายมือเท่านั้น**

ตอบ: ทั้งคู่เท่ากับ 6_{10} — leading zero เพิ่มแค่พจน์ 0×2^k ซึ่งมีค่าศูนย์ และไม่ทำให้หลักอื่นเลื่อนตำแหน่ง

“Both equal 6_{10}. A leading zero only adds a term $0 \times 2^k = 0$ and does not shift the other positions, so the value is unchanged. Adding a trailing zero would shift every weight and double the value.”

5 ฐานแปดและฐานสิบหก + ตารางเทียบ 0–15

ตะขอเกี่ยว

ตอนที่ 4 น้องแปลง 10000001_2 ได้แล้วใช่ไหมครับ — แต่สังเกตไหมว่ามัน**ยาวและอ่านยากมาก** ลองนึกภาพหน่วยความจำจริงที่ใช้ 32 บิต จะกลายเป็นเลข 0/1 เรียงกัน 32 ตัว

สมมติว่าถ้าน้องต้องจดเลข 11001110_2 ลงกระดาษ 50 ครั้งละครับ — น้องคิดว่าจะจดผิดสักกี่ครั้ง แล้วถ้าพี่บอกว่ามีวิธีเขียนเลขก้อนเดียวกันนี้ให้เหลือแค่ **2 ตัวอักษร** โดยไม่เสียข้อมูลเลย น้องอยากรู้ไหมครับ นั่นแหละคือที่มาของฐาน 8 กับฐาน 16

ของใกล้ตัว: เบอร์โทรที่เขาแบ่งเป็นกลุ่ม

ทำไมเบอร์โทรถึงเขียนเป็น 02-986-9009 ไม่เขียนติดกันเป็น 029869009 ครับ เพราะมนุษย์**จำเลขยาว ๆ ติดกันไม่ไหว** พอแบ่งเป็นก้อนสั้น ๆ ก็อ่านง่ายขึ้นทันที

ฐาน 8 กับฐาน 16 เกิดมาด้วยเหตุผลเดียวกันเป๊ะครับ — มันคือ**วิธีเขียนเลขฐานสองให้สั้นลง** เท่านั้นเอง ข้างในเครื่องยังเป็น 0/1 เหมือนเดิมทุกประการ ไม่มีอะไรเปลี่ยน



เลขก้อนเดียวกันเป๊ะ () แค่**เขียนคนละแบบ** ไม่ได้แปลงข้อมูลอะไรเลยครับ

เลขฐานแปด (octal)

เข้าเรื่อง · นิยามจากสไลด์

Octal numbers were commonly used in the beginning days of computing, but have since become rare (replaced by hexadecimal numbers). Octal numbers (base 8) also use the same positional numbering system described previously. $r = 8$. The digits used by octal numbers range from 0 to 7.

แปล: ฐานแปดใช้ระบบเดิม $r = 8$ ตัวเลขที่ใช้ได้คือ **0 ถึง 7** ครับ (ตามเงื่อนไข $0 \leq a_i < 8$ จากตอนที่ 3) สมัยนี้ใช้น้อยลงแล้วเพราะถูกฐานสิบหกแทนที่ แต่**ยังออกสอบและอยู่ใน Assignment #1 ข้อ 3 กับ 6** ครับ

น้ำหนักประจำหลักฐานแปด: $8^0 = 1 \cdot 8^1 = 8 \cdot 8^2 = 64 \cdot 8^3 = 512 \cdot 8^4 = 4096$

37 ในฐานแปด (จากสไลด์)

3	7
8^1	8^0
24	7

$$37_8 = 3 \times 8^1 + 7 \times 8^0 = 24 + 7 = 31_{10}$$

ระวังนะครับ 37_8 ไม่ใช่สามสิบเจ็ด แต่เป็นสามสิบเอ็ด

เลขฐานสิบหก (hexadecimal)

เข้าเรื่อง · นิยามจากสไลด์

Hexadecimal numbers are commonly used in computer programming, due to their ability to express large numbers in a compact manner. Hexadecimal numbers (base 16) also use the same positional numbering system. $r = 16$. The digits used by hexadecimal numbers range from 0 to F.

แปล: ฐานสิบหกใช้กันเยอะในการเขียนโปรแกรม เพราะเขียนเลขใหญ่ ๆ ได้สั้น $r = 16 \Longrightarrow$ ต้องมีสัญลักษณ์ 16 ตัว แต่เรามีเลขอารบิกแค่ 0–9 (10 ตัว) **ขาดอีก 6 ตัว** เขาเลยยืมตัวอักษร **A B C D E F** มาใช้แทนค่า 10–15 ครับ

Digit	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
Value	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

กับดัก · A ถึง F ไม่ใช่ตัวอักษร

ในฐานสิบหก **C ไม่ใช่ตัวซี แต่คือเลข 12** ครับ มันเป็น**ตัวเลขหนึ่งหลัก** ไม่ต่างจากเลข 7 เลย

คนพลาดกันตรงเวลาคูณ — เห็น $C \times 256$ แล้วไม่รู้จะคูณยังไง **ให้แปลงเป็นเลขฐานสิบก่อนคูณเสมอครับ**: $C \times 256 = 12 \times 256 = 3072$ ห้ามเขียน "$C \times 256$" ทิ้งไว้เฉย ๆ ในคำตอบ

น้ำหนักประจำหลักฐานสิบหก: $16^0 = 1 \cdot 16^1 = 16 \cdot 16^2 = 256 \cdot 16^3 = 4096$

C9 ในฐานสิบหก (จากสไลด์)

C	9
16^1	16^0
192	9

$$C9_{16} = 12 \times 16^1 + 9 \times 16^0 = 192 + 9 = 201_{10}$$

แปลง C เป็น 12 ก่อน แล้วค่อยคูณครับ

ตารางเทียบ 0–15 ทั้ง 4 ฐาน — ท่องแค่ตารางนี้พอ

พี่ไม่อยากให้น้องท่องอะไรเยอะครับ **ท่องแค่ 16 แถวนี้แถวเดียว** แล้วน้องจะทำเรื่องแปลงฐานได้เกือบทั้งหมด โดยเฉพาะการจับกลุ่มบิตในตอนที่ 8

Decimal	Binary (3-bit)	Binary (4-bit)	Octal	Hex
0	000	0000	0	0
1	001	0001	1	1
2	010	0010	2	2
3	011	0011	3	3
4	100	0100	4	4
5	101	0101	5	5
6	110	0110	6	6
7	111	0111	7	7
8	—	1000	10	8
9	—	1001	11	9
10	—	1010	12	A
11	—	1011	13	B
12	—	1100	14	C
13	—	1101	15	D
14	—	1110	16	E

ทำไมมี binary 2 คอลัมน์

คอลัมน์ **3 บิต** คู่กับ **octal** เพราะ $2^3 = 8$ พอดี — 3 บิตแทนได้ 8 ค่า (0–7) ตรงกับตัวเลขฐานแปดหนึ่งตัวเป๊ะ

คอลัมน์ **4 บิต** คู่กับ **hexadecimal** เพราะ $2^4 = 16$ พอดี — 4 บิตแทนได้ 16 ค่า (0–15) ตรงกับตัวเลขฐานสิบหกหนึ่งตัวเป๊ะ

ที่คอลัมน์ 3 บิตขีด — ตั้งแต่แถว 8 ลงไป ก็เพราะ**3 บิตแทนได้แค่ถึง 7** ครับ ต้องใช้ 4 บิตขึ้นไปจึงจะถึง 8 ได้ **ข้อสังเกตนี้คือทั้งหมดของตอนที่ 8**

ทางลัดท่องตาราง 4 บิต

ไม่ต้องท่องทั้ง 16 แถวครับ ท่องน้ำหนัก **8-4-2-1** อย่างเดียวพอ

อยากได้ 13 ⟹ ถามว่า 8 เอาไหม (เอา เหลือ 5) · 4 เอาไหม (เอา เหลือ 1) · 2 เอาไหม (ไม่เอา) · 1 เอาไหม (เอา เหลือ 0) ⟹ **1101** ครับ

ทำได้ใน 5 วินาที และ**ไม่มีทางลืม** เพราะไม่ได้ท่อง

Decimal	Binary (3-bit)	Binary (4-bit)	Octal	Hex
15	—	1111	17	F

กับดัก · แถวสีแดงในตาราง

10 ในฐานแปด**ไม่ใช่**สิบ แต่คือ **แปด** ครับ เพราะ $10_8 = 1 \times 8 + 0 = 8_{10}$

เจอเลข 10 ต้องดูตัวห้อยเสมอ: $10_2 = 2 \cdot 10_8 = 8 \cdot 10_{10} = 10 \cdot 10_{16} = 16$

ศัพท์สอบตอนที่ 5

English	แปลว่า	ข้อสอบเขียนมาแบบนี้
octal	ฐานแปด	“Describe the following **octal** numbers...”
hexadecimal (hex)	ฐานสิบหก	“...to express large numbers in a **compact** manner”
compact	กระชับ สั้น	เหตุผลที่ใช้ hex
subscript	ตัวห้อยบอกฐาน	231_8 — ตัว 8 คือ subscript
convert to the specified base	แปลงไปยังฐานที่กำหนด	“$6781_{10} \Rightarrow$ base 8”

I DO พี่ทำโจทย์จากสไลด์ให้ดูครับ

ตัวอย่างที่พี่ทำ — สไลด์ Week 1 · Octal to Decimal Conversion (ช่องเว้นว่าง)

> Describe 264_8 using the positional numbering system and determine its equivalent decimal value.

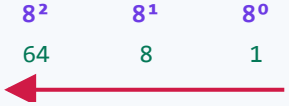
1

ตัวห้อยบอกฐาน
$\mathbf{r = 8}$

อ่านตัวห้อย $\Longrightarrow r = 8$

และเช็คด้วยว่าทุกหลักน้อยกว่า 8 จริงไหม — 2, 6, 4 ผ่านหมดครับ ถ้าเจอเลข 8 หรือ 9 ในเลขฐานแปด แปลว่า**โจทย์พิมพ์ผิด**หรือน้องอ่านฐานผิด

2



เขียนน้ำหนักจากขวาไปซ้าย

คูณแปดไปเรื่อย ๆ ครับ: $1 \rightarrow 8 \rightarrow 64 \Longrightarrow$ ได้ $8^0, 8^1, 8^2$ พอดี 3 ตัว ตรงกับจำนวนหลัก

3

```
2 × 64 = 128
6 × 8 = 48
4 × 1 = 4
```

คูณทีละหลัก

$2 \times 64 = 128 \cdot 6 \times 8 = 48 \cdot 4 \times 1 = 4$

ฐานแปดไม่มีตัวอักษร คูณได้ตรง ๆ เลยครับ ต่างจากฐานสิบหก

4

`128+48+4 = 180`

บวกทุกพจน์

$128 + 48 + 4 = 180 \Longrightarrow 264_8 = 180_{10}$ ครับ

264 ในฐานแปด

2	6	4
8^2	8^1	8^0
128	48	4

คำตอบ

$264_8 = 2 \times 8^2 + 6 \times 8^1 + 4 \times 8^0 = 128 + 48 + 4 = \mathbf{180_{10}}$

"$264_8 = 2 \times 8^2 + 6 \times 8^1 + 4 \times 8^0 = 180_{10}$."

WE DO ทำด้วยกันครับ

ทำด้วยกัน สไลด์ Week 1 · Hexadecimal to Decimal Conversion (ช่องเว้นว่าง)

> Describe $F8A_{16}$ using the positional numbering system and determine its equivalent decimal value.

ข้อนี้มีตัวอักษร 2 ตัว ต้องแปลงเป็นเลขก่อนครับ

1

F	8	A
?	8	?

แปลงตัวอักษรเป็นเลขก่อน

$F =$ ..... $\cdot A =$ .....

2

?	?	?

เขียนน้ำหนัก (คูณสิบหกไปเรื่อย ๆ)

.....

3	คูณแล้วบวก	**คูณทุกหลักแล้วบวก** $F8A_{16} =$ ..... $=$ .....$_{10}$

เฉลย WE DO

ขั้น 1 — แปลงตัวอักษรเป็นค่าฐานสิบก่อน เพราะเราคูณตัวอักษรไม่ได้ครับ ต้องเปลี่ยนเป็นตัวเลขก่อนเสมอ: จากตารางได้ $F = 15$ และ $A = 10$ (ส่วน 8 เป็นเลขอยู่แล้ว)

ขั้น 2 — เขียนน้ำหนักจากขวาไปซ้าย เพราะหลักขวาสุดคือ 16^0 เสมอ: $16^0 = 1 \cdot 16^1 = 16 \cdot 16^2 = 256$ — มี 3 หลัก เลขชี้กำลังสูงสุดจึงเป็น 2 ตรงตามกฎ $n - 1$ ✓

ขั้น 3 — คูณทีละหลักแล้วบวก เพราะสูตร positional บอกให้รวมทุกพจน์ครับ:

$15 \times 256 = 3840 \cdot 8 \times 16 = 128 \cdot 10 \times 1 = 10$

$3840 + 128 + 10 = 3978$

F8A ในฐานสิบหก

F	8	A
16^2	16^1	16^0
3840	128	10

ตอบ: $F8A_{16} = 15 \times 16^2 + 8 \times 16^1 + 10 \times 16^0 = 3840 + 128 + 10 = \mathbf{3978_{10}}$

"$F8A_{16} = 15 \times 16^2 + 8 \times 16^1 + 10 \times 16^0 = 3978_{10}$*."*

YOU DO ตาน้องครับ

Y5.1 สไลด์ Week 1 · ช่องเว้นว่าง

> Describe 5201_8 using the positional numbering system and determine its equivalent decimal value.

เฉลย Y5.1

ขั้น 1 — อ่านตัวห้อยและตรวจตัวเลข เพราะตัวเลขทุกหลักต้องน้อยกว่าฐานครับ: $r = 8$ และหลัก 5, 2, 0, 1 น้อยกว่า 8 หมด $\Longrightarrow$ เป็นเลขฐานแปดที่ถูกต้อง

ขั้น 2 — เขียนน้ำหนักจากขวาไปซ้าย โดยคูณแปดไปเรื่อย ๆ: $1 \to 8 \to 64 \to 512 \Longrightarrow 8^3, 8^2, 8^1, 8^0$ (4 หลัก เลขชี้กำลังสูงสุด 3 ✓)

ขั้น 3 — คูณทีละหลัก รวมหลักที่เป็นศูนย์ด้วย เพราะหลักศูนย์คือตัวรักษาตำแหน่งครับ:

$5 \times 512 = 2560 \cdot 2 \times 64 = 128 \cdot 0 \times 8 = 0 \cdot 1 \times 1 = 1$

ขั้น 4 — บวกทุกพจน์: $2560 + 128 + 0 + 1 = 2689$

5201 ในฐานแปด

5	2	0	1
8^3	8^2	8^1	8^0
2560	128	0	1

ตอบ: $5201_8 = 5 \times 8^3 + 2 \times 8^2 + 0 \times 8^1 + 1 \times 8^0 = \mathbf{2689_{10}}$

"$5201_8 = 5 \times 8^3 + 2 \times 8^2 + 0 \times 8^1 + 1 \times 8^0 = 2689_{10}$."

Y5.2

> Determine the decimal value of $2AF_{16}$.

ระวัง A กับ F ต้องแปลงเป็นเลขก่อนครับ

เฉลย Y5.2

ขั้น 1 — แปลงตัวอักษรเป็นเลข เพราะคูณตัวอักษรไม่ได้ครับ: $A = 10 \cdot F = 15 \Longrightarrow$ หลักคือ 2, 10, 15

ขั้น 2 — เขียนน้ำหนัก: 3 หลัก $\Longrightarrow 16^2 = 256, 16^1 = 16, 16^0 = 1$

ขั้น 3 — คูณทีละหลัก: $2 \times 256 = 512 \cdot 10 \times 16 = 160 \cdot 15 \times 1 = 15$

ขั้น 4 — บวก: $512 + 160 + 15 = 687$

ขั้น 5 — ตรวจความสมเหตุสมผล เลขฐานสิบหก 3 หลักต้องอยู่ในช่วง 0 ถึง $16^3 - 1 = 4095$ ครับ 687 ตกในช่วงนี้ $\Longrightarrow$ ผ่าน

2AF ในฐานสิบหก

2	A	F
16^2	16^1	16^0
512	160	15

ตอบ: $2AF_{16} = 2 \times 16^2 + 10 \times 16^1 + 15 \times 16^0 = \mathbf{687_{10}}$

"$2AF_{16} = 2 \times 16^2 + 10 \times 16^1 + 15 \times 16^0 = 687_{10}$."

Y5.3

> Arrange these four numbers from **smallest to largest**: 10_2, 10_8, 10_{10}, 10_{16}.

ทั้งสี่ตัวเขียนเหมือนกันหมด ต่างกันแค่ตัวห้อยครับ

เฉลย Y5.3

ขั้น 1 — เข้าใจก่อนว่าโจทย์กำลังทดสอบอะไร เพราะสัญลักษณ์ที่เขียนเหมือนกันทั้งสี่ตัว ค่าที่ได้จึงขึ้นกับ**ตัวห้อยล้วน ๆ** ครับ

ขั้น 2 — กางทุกตัวด้วยสูตรเดียวกัน เพราะทุกฐานใช้ $N = a_1 r^1 + a_0 r^0$ เหมือนกันหมด:

$10_2 = 1 \times 2 + 0 = 2 \cdot 10_8 = 1 \times 8 + 0 = 8 \cdot 10_{10} = 1 \times 10 + 0 = 10 \cdot 10_{16} = 1 \times 16 + 0 = 16$

ขั้น 3 — สังเกตกฎที่ได้ ทุกตัวออกมาเท่ากับ**ค่าฐานของตัวเอง**พอดีครับ เพราะ $10_r = 1 \times r^1 + 0 \times r^0 = r$ เสมอ — จำไว้ได้เลยว่า “10 ในฐานไหน ก็คือฐานนั้น”

ขั้น 4 — เรียงลำดับ: $2 < 8 < 10 < 16$

ตอบ: $10_2 < 10_8 < 10_{10} < 10_{16}$ **(คือ** $2 < 8 < 10 < 16$**)**

“Since $10_r = r$ *for every base* r*, the order is* $10_2 < 10_8 < 10_{10} < 10_{16}$*.”*

Y5.4

> Explain why hexadecimal is preferred over octal in modern computing. Your answer should refer to the number of bits in a byte.

เฉลย Y5.4

ขั้น 1 — จับคู่ฐานกับจำนวนบิต เพราะนี่คือหัวใจของคำตอบครับ: ฐานแปดจับคู่กับ **3 บิต** (เพราะ $2^3 = 8$) · ฐานสิบหกจับคู่กับ **4 บิต** (เพราะ $2^4 = 16$)

ขั้น 2 — เอา 8 บิต (1 ไบต์) มาหารดู เพราะคอมพิวเตอร์จัดข้อมูลเป็นไบต์: $8 \div 4 = 2$ ลงตัวพอดี $\Longrightarrow$ 1 ไบต์เขียนเป็น hex ได้ **2 ตัวเป๊ะ**

แต่ $8 \div 3 = 2$ เศษ $2 \Longrightarrow$ 1 ไบต์เขียนเป็น octal ต้องใช้ 3 ตัว และตัวซ้ายสุดใช้ไม่เต็ม

ขั้น 3 — ขยายไปที่ความกว้างอื่นของเครื่อง เพราะเครื่องจริงใช้ 16, 32, 64 บิต ทุกตัวหารด้วย 4 ลงตัวหมด แต่หารด้วย 3 ไม่ลงตัวเลยสักตัว $\Longrightarrow$ hex จึงเข้ากับสถาปัตยกรรมพอดีทุกขนาด

ขั้น 4 — เสริมเรื่องความกระชับ hex เขียนสั้นกว่า: เลข 8 บิตใช้ hex 2 ตัว แต่ใช้ octal 3 ตัว

ตอบ: เพราะ 1 hex digit = 4 บิตพอดี และ 1 byte = 8 บิต = 2 hex digits เป๊ะ ขณะที่ 1 octal digit = 3 บิต ซึ่งหาร 8 ไม่ลงตัว

“One hexadecimal digit represents exactly 4 bits, so an 8-bit byte is exactly two hex digits, and 16-, 32- and 64-bit words also divide evenly by 4. One octal digit represents 3 bits, which does not divide a byte evenly, so hexadecimal maps onto modern word sizes more naturally and is more compact.”

6 เลขที่มีจุดทศนิยม — น้ำหนักติดลบ

ตะขอเกี่ยว

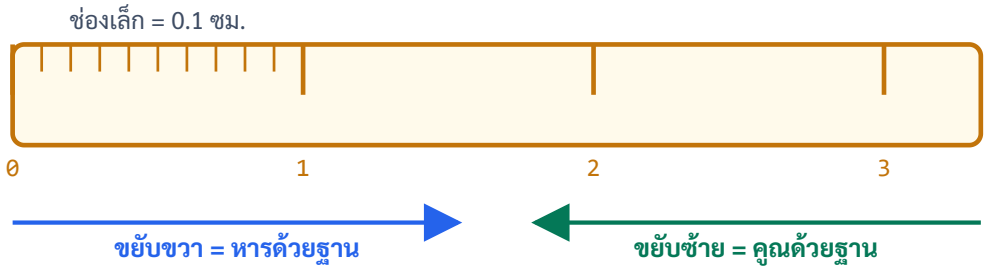
ตอนที่ 3 ถึง 5 น้ำหนักประจำหลักของเราไล่ขึ้นอย่างเดียวเลยครับ — $r^0, r^1, r^2, r^3, \ldots$ ทุกฐานเหมือนกันหมด

งั้นสมมติว่าถ้าน้องเจอเลข 1010.01_2 ละครับ — **มีจุดโผล่มากลางเลข** น้ำหนักของหลักที่อยู่**ขวามือของจุด**ควรเป็นเท่าไหร่ แล้วเลขชี้กำลังจะไล่ไปทางไหน ข่าวดีคือตอนนี้**ไม่มีสูตรใหม่อีกเหมือนเดิม** — เราแค่ไล่เลขชี้กำลังต่อลงไปในฝั่งลบครับ

ของใกล้ตัว: ไม้บรรทัดกับขีดเล็กระหว่างเซนติเมตร

บนไม้บรรทัด ช่องใหญ่คือ 1 เซนติเมตรครับ แต่ระหว่างขีดใหญ่สองขีดยังมีขีดเล็ก 10 ช่อง — ช่องละ $\frac{1}{10}$ ซม.

ถ้าน้องซูมเข้าไปอีก ในทางทฤษฎีก็ยังซอยได้อีกเป็น $\frac{1}{100}$ ซม. ไปเรื่อย ๆ ครับ **นี่คือฝั่งขวาของจุดทศนิยมเป๊ะ ๆ** — ทุกครั้งที่ขยับขวา 1 หลัก น้ำหนัก**หารด้วยฐาน** ตรงข้ามกับฝั่งซ้ายที่ขยับซ้ายแล้ว**คูณด้วยฐาน**

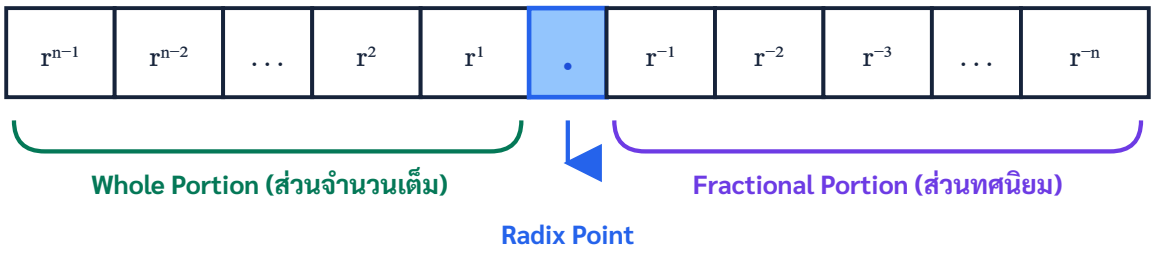


กฎเดียวกันทั้งสองฝั่ง แค่คนละทิศครับ

เข้าเรื่อง · นิยามจากสไลด์

Fractional numbers can also be written using the positional numbering system, where the fractional portion is represented by a negative power series.

แปล: เลขที่มีจุดก็ใช้ระบบเดิมครับ แค่**ฝั่งขวาของจุดใช้เลขชี้กำลังติดลบ** จุดที่คั่นเรียกว่า radix point (ในฐานสิบเรียก decimal point · ในฐานสองเรียก binary point) · ฝั่งซ้ายเรียก whole portion ฝั่งขวาเรียก fractional portion



สังเกตว่าฝั่งขวา**ไม่มี** r^0 ครับ — r^0 อยู่ติดซ้ายมือของจุดพอดี แล้วข้ามไปเป็น r^{-1} ทันที

น้ำหนักติดลบมีค่าเท่าไหร่

น้ำหนัก	r^{-1}	r^{-2}	r^{-3}	r^{-4}
สูตร	$\frac{1}{r}$	$\frac{1}{r^2}$	$\frac{1}{r^3}$	$\frac{1}{r^4}$
ฐาน 2	0.5	0.25	0.125	0.0625
ฐาน 8	0.125	0.015625	$\frac{1}{512}$	$\frac{1}{4096}$
ฐาน 16	0.0625	0.00390625	$\frac{1}{4096}$	$\frac{1}{65536}$

ทางลัด · ไม่ต้องท่องเลขทศนิยมยาว ๆ

ให้เขียนเป็น**เศษส่วน**ก่อนแล้วค่อยบวก จะไม่พลาดครับ เช่น 74.23_8 ส่วนทศนิยมคือ $\frac{2}{8} + \frac{3}{64}$ — ทำส่วนร่วมเป็น 64 ได้ $\frac{16+3}{64} = \frac{19}{64}$ แล้วค่อยหารครั้งเดียวเป็น 0.296875

วิธีนี้**ลดโอกาสพิมพ์เลขทศนิยมผิด**ได้เยอะมาก และในข้อสอบเขียนเป็นเศษส่วนก็ได้คะแนนเต็มครับ

1101.01 ในฐานสอง

1	1	0	1	.	0	1
2^3	2^2	2^1	2^0		2^{-1}	2^{-2}
8	4	0	1		0	0.25

$$1101.01_2 = 8 + 4 + 0 + 1 + 0 + 0.25 = 13.25_{10}$$

ฝั่งซ้ายทำเหมือนเดิมทุกอย่าง ฝั่งขวาแค่เปลี่ยนน้ำหนักเป็นเศษส่วน

กับดักที่คนพลาดมากที่สุดในตอนนี้

1. เลขชี้กำลังฝั่งขวาเริ่มที่ -1 ไม่ใช่ 0 ครับ เพราะ r^0 ถูกใช้ไปแล้วที่หลักติดซ้ายของจุด ถ้าเผลอเริ่มที่ 0 จะได้ $0.01_2 = 0 \times 1 + 1 \times 0.5 = 0.5$ ซึ่ง**ผิด** (ที่ถูกคือ 0.25)

2. 0.1_2 ไม่เท่ากับ 0.1_{10} ครับ $0.1_2 = 1 \times 2^{-1} = 0.5$ ต่างกันคนละเรื่องเลย — **ต้องอ่านตัวห้อยทุกครั้ง**

3. ห้ามอ่านฝั่งขวาเป็นจำนวนเต็มแล้วค่อยหาร เช่นเห็น $.23_8$ แล้วคิดว่าเป็น $23_8 = 19$ แล้วหารด้วย 8 ได้ 2.375 — **ผิดครับ** ต้องหารด้วย $8^2 = 64$ เพราะมี 2 หลัก
(บังเอิญวิธี “อ่านเป็นจำนวนเต็มแล้วหารด้วย r^k เมื่อ k = จำนวนหลัก” **ใช้ได้**: $19 \div 64 = 0.296875$ ถูกต้อง — แต่ต้องนับหลักให้ครบ อย่านับผิด)

ศัพท์สอบตอนที่ 6

English	แปลว่า	ข้อสอบเขียนมาแบบนี้
fractional number	เลขที่มีส่วนทศนิยม	“Describe the following numbers…” (ข้อ 5)
radix point	จุดคั่นฐาน	“written immediately to the right of the radix point”
whole portion	ส่วนจำนวนเต็ม	ฝั่งซ้ายของจุด
fractional portion	ส่วนทศนิยม	ฝั่งขวาของจุด
negative power series	อนุกรมกำลังติดลบ	“represented by a negative power series”

I DO พี่ทำโจทย์จากสไลด์ให้ดูครับ

ตัวอย่างที่พี่ทำ — สไลด์ Week 1 · Fractional Numbers (ช่องเว้นว่าง)

> Describe 10.01_2 using the positional numbering system and determine its equivalent decimal value.

1



แยกสองฝั่งของจุดออกจากกัน
เพราะสองฝั่งใช้น้ำหนักคนละชุดครับ — ทำผิดก็เพราะเอามาปนกัน
ฝั่งซ้าย 10 · ฝั่งขวา 01

2

2^1	2^0	2^{-1}	2^{-2}
2	1	0.5	0.25

เขียนน้ำหนักออกจากจุดไปทั้งสองทาง

เพราะจุดคือ**ศูนย์กลาง**ครับ ไม่ใช่ขอบซ้ายหรือขอบขวา: ซ้ายมือจุดคือ 2^0 แล้วไล่ขึ้น · ขวามือจุดคือ 2^{-1} แล้วไล่ลง

3

```
1 × 2 = 2
0 × 1 = 0
0 × 0.5 = 0     1 × 0.25
```

คูณทีละหลักทั้งสองฝั่ง

$1 \times 2^1 = 2 \cdot 0 \times 2^0 = 0 \cdot 0 \times 2^{-1} = 0 \cdot 1 \times 2^{-2} = 0.25$

4

```
2 + 0.25 = 2.25
```

บวกทุกพจน์เข้าด้วยกัน

$2 + 0 + 0 + 0.25 = 2.25 \Longrightarrow 10.01_2 = 2.25_{10}$ ครับ

10.01 ในฐานสอง

1	0	.	0	1
2^1	2^0		2^{-1}	2^{-2}
2	0		0	0.25

คำตอบ

$10.01_2 = 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} = 2 + 0 + 0 + 0.25 = \mathbf{2.25_{10}}$

"$10.01_2 = 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} = 2.25_{10}$."

WE DO ทำด้วยกันครับ

ทำด้วยกัน — สไลด์ Week 1 · Fractional Numbers (ช่องเว้นว่าง)

> Describe $D3.2A_{16}$ using the positional numbering system and determine its equivalent decimal value.

มีตัวอักษรทั้งสองฝั่งของจุดเลยครับ ระวังให้ดี

เติมสองแถวล่างให้ครบครับ

D	3	.	2	A
?	?		?	?
?	?		?	?

1 D 3 | 2 A
? ? ?

แปลงตัวอักษรก่อน

$D =$ ..... $\cdot\ A =$ .....

2 ? ? | ? ?
ไล่ออกจากจุดทั้งสองทาง

เขียนน้ำหนักออกจากจุด

.....

3 รวมสองฝั่ง

บวกทุกพจน์

$D3.2A_{16} =$ .....

เฉลย WE DO

ขั้น 1 — แปลงตัวอักษรเป็นเลขก่อน เพราะคูณตัวอักษรไม่ได้ครับ: $D = 13$ และ $A = 10$

ขั้น 2 — เขียนน้ำหนักโดยยึดจุดเป็นศูนย์กลาง เพราะหลักติดซ้ายของจุดคือ 16^0 เสมอครับ:
ฝั่งซ้าย: D อยู่ที่ $16^1 = 16 \cdot 3$ อยู่ที่ $16^0 = 1$
ฝั่งขวา: 2 อยู่ที่ $16^{-1} = \frac{1}{16} = 0.0625 \cdot A$ อยู่ที่ $16^{-2} = \frac{1}{256} = 0.00390625$

ขั้น 3 — คูณทีละหลัก: $13 \times 16 = 208 \cdot 3 \times 1 = 3 \cdot 2 \times \frac{1}{16} = 0.125 \cdot 10 \times \frac{1}{256} = 0.0390625$

ขั้น 4 — บวกทุกพจน์: $208 + 3 + 0.125 + 0.0390625 = 211.1640625$

D3.2A ในฐานสิบหก

D	3	.	2	A
16^1	16^0		16^{-1}	16^{-2}
208	3		0.125	0.0390625

ตอบ: $D3.2A_{16} = 13 \times 16^1 + 3 \times 16^0 + 2 \times 16^{-1} + 10 \times 16^{-2} = \mathbf{211.1640625_{10}}$
"$D3.2A_{16} = 13 \times 16^1 + 3 \times 16^0 + 2 \times 16^{-1} + 10 \times 16^{-2} = 211.1640625_{10}$."

YOU DO ตาน้องครับ

Y6.1

> Describe 1101.101_2 using the positional numbering system and determine its equivalent decimal value.

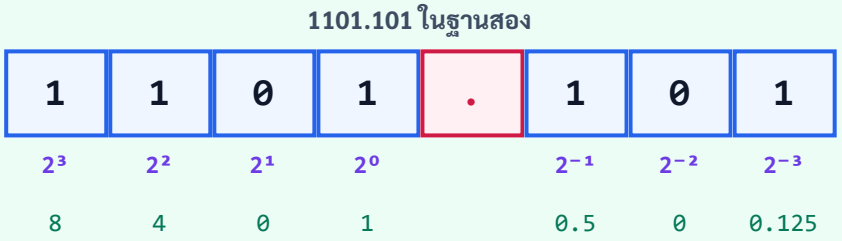
เฉลย Y6.1

ขั้น 1 — ตัดตรงจุดออกเป็นสองฝั่ง เพราะน้ำหนักคนละชุดกันครับ: ฝั่งซ้าย 1101 · ฝั่งขวา 101

ขั้น 2 — เขียนน้ำหนักไล่ออกจากจุด เพราะหลักติดซ้ายของจุดคือ 2^0:
ซ้าย: $2^3 = 8, 2^2 = 4, 2^1 = 2, 2^0 = 1$ · ขวา: $2^{-1} = 0.5, 2^{-2} = 0.25, 2^{-3} = 0.125$

ขั้น 3 — บวกเฉพาะบิตที่เป็น 1 เพราะบิต 0 ไม่ส่งค่าเข้าผลรวม:
ฝั่งซ้าย: $8 + 4 + 1 = 13$ · ฝั่งขวา: $0.5 + 0.125 = 0.625$

ขั้น 4 — รวมสองฝั่ง: $13 + 0.625 = 13.625$



ตอบ: $1101.101_2 = 8 + 4 + 1 + 0.5 + 0.125 = \mathbf{13.625_{10}}$
"$1101.101_2 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} = 13.625_{10}$."

Y6.2

> Determine the decimal value of $3F.4_{16}$.

เฉลย Y6.2

ขั้น 1 — แปลงตัวอักษร เพราะต้องได้ตัวเลขก่อนคูณครับ: $F = 15$

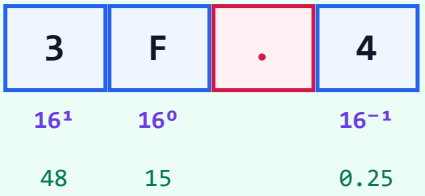
ขั้น 2 — เขียนน้ำหนักจากจุดออกไป: 3 อยู่ที่ $16^1 = 16$ · F อยู่ที่ $16^0 = 1$ · 4 อยู่ที่ $16^{-1} = \frac{1}{16} = 0.0625$

ขั้น 3 — คูณทีละหลัก: $3 \times 16 = 48$ · $15 \times 1 = 15$ · $4 \times \frac{1}{16} = 0.25$

ขั้น 4 — บวก: $48 + 15 + 0.25 = 63.25$

ขั้น 5 — ตรวจ ส่วนจำนวนเต็ม $3F_{16} = 63$ ซึ่งน้อยกว่า $16^2 = 256 \Longrightarrow$ สมเหตุสมผลครับ และส่วนทศนิยม 0.25 ต้องน้อยกว่า 1 เสมอ $\Longrightarrow$ ผ่าน

3F.4 ในฐานสิบหก



ตอบ: $3F.4_{16} = 3 \times 16^1 + 15 \times 16^0 + 4 \times 16^{-1} = \mathbf{63.25_{10}}$

"$3F.4_{16} = 3 \times 16^1 + 15 \times 16^0 + 4 \times 16^{-1} = 63.25_{10}$*."*

Y6.3

> Explain why 0.1_2, 0.1_8, 0.1_{10} and 0.1_{16} all have **different** decimal values, and give each value.

ใบ้: หลักแรกหลังจุดมีน้ำหนัก r^{-1} ครับ

เฉลย Y6.3

ขั้น 1 — ระบุน้ำหนักของหลักแรกหลังจุด เพราะทั้งสี่ตัวมีเลข 1 อยู่ตำแหน่งเดียวกันหมดครับ ต่างกันแค่ฐาน: น้ำหนักคือ $r^{-1} = \dfrac{1}{r}$

ขั้น 2 — แทนค่าฐานทีละตัว เพราะ $0.1_r = 1 \times r^{-1} = \dfrac{1}{r}$ เสมอ:

$0.1_2 = \frac{1}{2} = 0.5 \;\cdot\; 0.1_8 = \frac{1}{8} = 0.125 \;\cdot\; 0.1_{10} = \frac{1}{10} = 0.1 \;\cdot\; 0.1_{16} = \frac{1}{16} = 0.0625$

ขั้น 3 — อธิบายว่าทำไมต่างกัน เพราะน้ำหนักเป็น**ส่วนกลับของฐาน**ครับ ฐานยิ่งใหญ่ ช่องแรกหลังจุดยิ่งเล็กลง (ซอยละเอียดขึ้น) $\Longrightarrow$ ค่าที่ได้จึงลดลงตามฐานที่โตขึ้น

ขั้น 4 — เทียบกับกฎของ 10_r จาก Y5.3 จะเห็นว่าเป็นคู่ตรงข้ามกันพอดี: $10_r = r$ (โตตามฐาน) แต่ $0.1_r = \frac{1}{r}$ (เล็กลงตามฐาน)

ตอบ: $0.1_2 = 0.5 \cdot 0.1_8 = 0.125 \cdot 0.1_{10} = 0.1 \cdot 0.1_{16} = 0.0625$ **— เพราะ** $0.1_r = r^{-1} = 1/r$

"The first digit after the radix point has weight r^{-1}*, so* $0.1_r = 1/r$*. Hence* $0.1_2 = 0.5$*,* $0.1_8 = 0.125$*,* $0.1_{10} = 0.1$ *and* $0.1_{16} = 0.0625$*."*

7 ฐานสิบ → ฐานอื่น: หารสั้น และ คูณด้วยฐาน

ตะขอเกี่ยว

ตอนที่ 3 ถึง 6 เราเดินทางเดียวมาตลอดครับ — **จากฐานอะไรก็ได้ กลับมาเป็นฐานสิบ** ด้วยการกางน้ำหนักแล้วบวก

งั้นสมมติว่าถ้าโจทย์กลับทางละครับ — ให้ 47_{10} มา แล้วสั่งว่า **“convert to base 2”** น้องจะทำยังไง จะนั่งเดาว่าบิตไหนเป็น 1 บ้างหรือครับ ตอนนี้พี่จะให้**วิธีที่ไม่ต้องเดาเลยแม้แต่นิดเดียว** และมันมี 2 วิธีที่ต้องใช้คู่กัน เพราะส่วนจำนวนเต็มกับส่วนทศนิยม**ใช้คนละวิธีและอ่านคำตอบคนละทิศ** — ตรงนี้แหละคือกับดักที่ทำคนตกกันเยอะที่สุด

เข้าเรื่อง · กฎ 2 ข้อจากสไลด์

To convert from any decimal number to base r:

1. Use the repeated divide-by-r process (for whole numbers)

① Divide the decimal number by the radix. ② Save the remainder (first remainder is the **least significant digit**). ③ Repeat until the quotient is zero.

2. Use the repeated multiply-by-r process (for fractional numbers)

① Multiply the decimal fraction by the radix. ② Save the whole number portion of the result (even if zero) as a digit — the first result is written **immediately to the right of the radix point**. ③ Repeat using the fractional part until the fraction part is zero.

ของใกล้ตัว: ทอนเงินด้วยเหรียญที่มีอยู่

คิดว่าน้องมีเงิน 47 บาท แล้วต้องแลกเป็นเหรียญ 32, 16, 8, 4, 2, 1 บาท (กองละไม่เกิน 1 เหรียญ) ครับ — วิธีหารสั้นก็คือการ**ถามซ้ำ ๆ ว่า “แบ่งเป็นคู่ได้กี่คู่ แล้วเหลือเศษไหม”**

เศษที่เหลือแต่ละรอบ**คือบิตนั้นพอดี** ครับ เพราะเศษจากการหารด้วย 2 มีได้แค่ 0 กับ 1 — ตรงกับตัวเลขที่ฐานสองใช้ได้พอดีเป๊ะ นี่คือเหตุผลว่าทำไมวิธีนี้ถึงใช้ได้

ที่มาของวิธี — ทำไมเศษถึงกลายเป็นตัวเลขในหลักได้

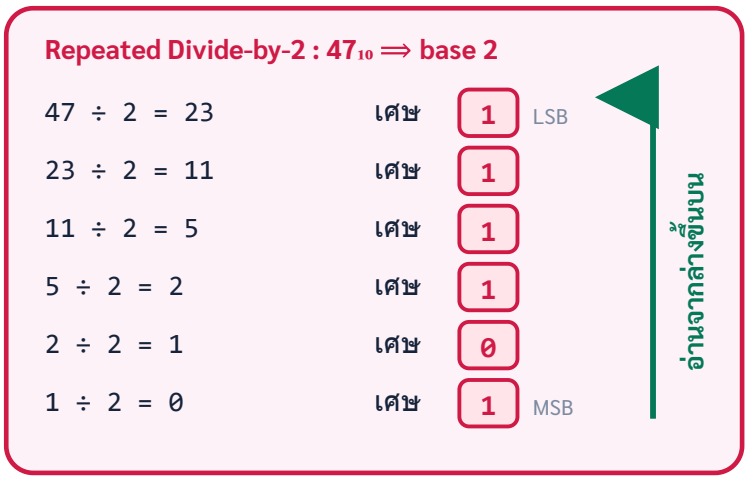
กางสูตร positional ของฐาน r ออกมาแล้วดึง r ออกจากทุกพจน์ยกเว้นพจน์สุดท้ายครับ:

$$N = \left(a_{n-1}r^{n-2} + \cdots + a_2 r^1 + a_1\right) \times r \; + \; a_0$$

พอหาร N ด้วย r $\Longrightarrow$ ผลหารคือก้อนในวงเล็บ · **เศษคือ a_0 พอดี**

เพราะฉะนั้นการหารครั้งแรกจะ**คายหลักขวาสุดออกมา**เสมอครับ (LSB) แล้วหารรอบต่อไปก็คายหลักถัดไป ไล่ไปเรื่อย ๆ จนหมด — **นี่คือเหตุผลที่ต้องอ่านคำตอบจากล่างขึ้นบน** ไม่ใช่ท่องจำครับ

วิธีที่ 1 — หารสั้นเก็บเศษ (ส่วนจำนวนเต็ม) · อ่านจากล่างขึ้นบน



ได้คำตอบ

101111_2

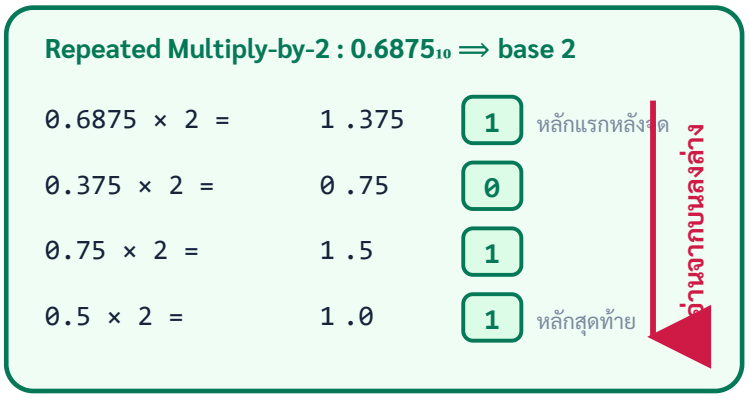
ตรวจกลับ:
32+8+4+2+1 = 47 ✓

หยุดเมื่อผลหารเป็นศูนย์ — ไม่ใช่หยุดเมื่อเศษเป็นศูนย์นะครับ ตรงนี้พลาดกันบ่อยมาก

กับดักข้อที่ 1 · หยุดผิดจังหวะ

ดูบรรทัดที่ 5 ในรูปครับ: $2 \div 2 = 1$ **เศษ 0** — ถ้าน้องเห็นเศษ 0 แล้วหยุด จะได้คำตอบ $01111_2 = 15$ ซึ่ง**ผิด** กติกาคือ `repeat until the quotient is zero` — ดูที่**ผลหาร** ไม่ใช่ที่เศษครับ ต้องทำต่อจนบรรทัด $1 \div 2 = 0$ เศษ 1 ถึงจะจบ

วิธีที่ 2 — คูณด้วยฐานเก็บตัวหน้าจุด (ส่วนทศนิยม) · อ่านจากบนลงล่าง



ได้คำตอบ

0.1011_2

ตรวจกลับ:
.5+.125+.0625=.6875 ✓

หยุดเมื่อส่วนทศนิยมเป็นศูนย์ — ในรูปคือบรรทัดที่ได้ 1.0 พอดี

กับดักตัวใหญ่ที่สุดของทั้ง EP · ทิศทางการอ่านสวนกัน

ส่วนจำนวนเต็ม — หาร

เศษตัวแรกที่ได้ = **หลักขวาสุด (LSB)**

⟹ ต้องอ่าน **จากล่างขึ้นบน** ครับ

ส่วนทศนิยม — คูณ

ตัวหน้าจุดตัวแรกที่ได้ = **หลักแรกหลังจุด**

⟹ ต้องอ่าน **จากบนลงล่าง** ครับ

ทิศตรงข้ามกันเป๊ะ และนี่คือจุดที่คนทำ Assignment ข้อ 6 ผิดกันมากที่สุดครับ — ถ้าอ่านฝั่งทศนิยมกลับทาง 0.6875 จะกลายเป็น $0.1101_2 = 0.8125$ ซึ่งผิด

ทางลัดจำทิศทาง · เหตุผลเดียวกันทั้งคู่

อย่าท่องว่า “หารอ่านขึ้น คูณอ่านลง” ครับ ให้จำเหตุผลอันเดียว:

“หลักที่ออกมาก่อน คือหลักที่อยู่ติดจุดที่สุด”

ฝั่งจำนวนเต็ม หลักที่ติดจุดคือหลักขวาสุด ⟹ เลยต้องเขียนย้อนขึ้นไปทางซ้าย

ฝั่งทศนิยม หลักที่ติดจุดคือหลักซ้ายสุด ⟹ เลยเขียนไล่ลงไปทางขวาได้เลย

เหตุผลเดียว ใช้ได้ทั้งสองฝั่ง ไม่มีทางสับสนครับ

เทียบของเก่า · ตอนที่ 3 ถึง 6

สังเกตว่าตอนนี้เราเดิน**ย้อนทาง**ของตอนที่แล้วเป๊ะ ๆ ครับ:

- **ตอนที่ 3–6** — ฐานอื่น ⟶ ฐานสิบ ด้วยการ **คูณน้ำหนักแล้วบวก**
- **ตอนนี้** — ฐานสิบ ⟶ ฐานอื่น ด้วยการ **หาร (หรือคูณ) แล้วเก็บเศษ**
- เพราะฉะนั้น **วิธีตรวจคำตอบของตอนนี้ ก็คือวิธีทำของตอนที่แล้ว** — แปลงเสร็จให้แปลงกลับเป็นฐานสิบเสมอ

ถ้าไม่ตรงแปลว่าผิด **ข้อสอบและ Assignment ตรวจได้ฟรี ๆ ทุกข้อครับ**

ศัพท์สอบตอนที่ 7

English	แปลว่า	ข้อสอบเขียนมาแบบนี้
repeated divide-by-r	หารด้วยฐานซ้ำ ๆ	ใช้กับ whole numbers
repeated multiply-by-r	คูณด้วยฐานซ้ำ ๆ	ใช้กับ fractional numbers
quotient	ผลหาร	“repeat until the **quotient** is zero”
remainder	เศษ	“save the **remainder**”
least significant digit	หลักขวาสุด	“first remainder is the least significant digit”

I DO พี่ทำโจทย์จากสไลด์ให้ดูครับ

ตัวอย่างที่พี่ทำ — สไลด์ Week 1 · Decimal to Hexadecimal Conversion

> Convert 47_{10} to hexadecimal.

1 — เป็นจำนวนเต็ม ⟹ **ใช้หารสั้น r = 16**

เลือกวิธีให้ถูกก่อน

47 ไม่มีจุดทศนิยม ⟹ ใช้ repeated divide-by-16 ครับ ถ้ามีจุดต้องแยกทำสองส่วน

2

```
47 ÷ 16 = 2
2 ÷ 16 = 0
```

15
2

หารซ้ำจนผลหารเป็น 0

$47 \div 16 = 2$ เศษ **15** · $2 \div 16 = 0$ เศษ **2**

ผลหารเป็น 0 แล้ว ⟹ หยุดครับ

3 — 15 → F (เศษเกิน 9 ต้องแปลงเป็นตัวอักษร)

แปลงเศษที่เกิน 9 เป็นตัวอักษร

เพราะฐานสิบหกไม่มีสัญลักษณ์ “15” ครับ ต้องเขียนเป็น **F**

ข้อนี้เฉพาะฐาน 16 เท่านั้น ฐาน 2 กับ 8 ไม่ต้องแปลง เพราะเศษไม่มีทางเกิน 9

4 — $2F_{16}$

อ่านจากล่างขึ้นบน + ตรวจกลับ

ล่างขึ้นบนได้ 2 แล้ว $F \Longrightarrow \mathbf{2F_{16}}$

ตรวจ: $2 \times 16 + 15 \times 1 = 32 + 15 = 47$ ✓ ตรงกับโจทย์ครับ

คำตอบ

$47 \div 16 = 2$ remainder $15 = F$ · $2 \div 16 = 0$ remainder 2

อ่านจากล่างขึ้นบน ⟹ $47_{10} = 2F_{16}$ ตรวจกลับ $2F_{16} = 2 \times 16 + 15 = 47$ ✓

“$47_{10} = 2F_{16}$ *since* $47 = 2 \times 16 + 15$ *and* $15 = F$.”

WE DO ทำด้วยกันครับ — ข้อนี้มีทั้งสองฝั่ง

ทำด้วยกัน โจทย์พี่แต่งเอง · ผสมสองวิธี

> Convert 45.5_{10} to base 2.

มีจุดทศนิยม ⟹ ต้องแยกทำ 2 ส่วนแล้วค่อยเอามาต่อกันครับ

1 45 | 0.5

แยกสองส่วนออกจากกัน

ส่วนจำนวนเต็ม = ... ⟹ ใช้วิธี .....

ส่วนทศนิยม = ... ⟹ ใช้วิธี .....

2

```
45 ÷ 2 = ? ?
?? ÷ 2 = ? ?
…
```

หารสั้นส่วนจำนวนเต็ม

ได้ ..... (อ่านจาก .....)

3

```
0.5 × 2 = ?
```

คูณสองส่วนทศนิยม

ได้ ..... (อ่านจาก .....)

4 ต่อกันคนละฝั่งจุด

ประกอบคำตอบ + ตรวจกลับ

45.5_{10} = ... $_2$

เฉลย WE DO

ขั้น 1 — แยกสองส่วน เพราะสองฝั่งใช้คนละวิธีและอ่านคนละทิศครับ: ส่วนจำนวนเต็ม = **45** ⟹ ใช้ **หารสั้นด้วย 2** · ส่วนทศนิยม = **0.5** ⟹ ใช้ **คูณด้วย 2**

ขั้น 2 — หารสั้น 45 จนผลหารเป็นศูนย์ เพราะกติกาบอกให้ดูผลหาร ไม่ใช่เศษ:

หารสั้น 45 ด้วย 2 — เก็บเศษทุกรอบ

```
45 ÷ 2 = 22  เศษ 1   (LSB)
22 ÷ 2 = 11  เศษ 0
11 ÷ 2 =  5  เศษ 1
 5 ÷ 2 =  2  เศษ 1
 2 ÷ 2 =  1  เศษ 0
 1 ÷ 2 =  0  เศษ 1   (MSB)
─────────────────────
อ่านล่างขึ้นบน = 101101
```

ขั้น 3 — คูณ 0.5 ด้วย 2 จนส่วนทศนิยมเป็นศูนย์:

คูณ 0.5 ด้วย 2 — เก็บตัวหน้าจุด

```
0.5 × 2 = 1.0   เก็บ 1 · เศษทศนิยมเหลือ 0 ⟹ หยุด
─────────────────────────────────────────────────
อ่านบนลงล่าง = .1
```

ขั้น 4 — ต่อสองฝั่งเข้าด้วยกัน เพราะจุดเป็นตัวคั่นเฉย ๆ ครับ ไม่ต้องคำนวณอะไรเพิ่ม: 101101 กับ $.1 \Longrightarrow 101101.1_2$

ขั้น 5 — ตรวจกลับเป็นฐานสิบ (นี่คือวิธีของตอนที่ 4 กับ 6 ครับ): $32 + 8 + 4 + 1 = 45$ และ $1 \times 2^{-1} = 0.5$ $\Longrightarrow$ รวม 45.5 ✓ ตรงกับโจทย์

ตอบ: $45.5_{10} = \mathbf{101101.1_2}$

“$45_{10} = 101101_2$ by repeated division by 2, and $0.5_{10} = 0.1_2$ by repeated multiplication by 2, so $45.5_{10} = 101101.1_2$.”

YOU DO ตาน้องครับ

Y7.1 สไลด์ Week 1 · Decimal to Octal Conversion

> Convert 47_{10} to octal, and convert 0.5625_{10} to octal.

เฉลย Y7.1

ขั้น 1 — ส่วนจำนวนเต็ม เลือกวิธีหารสั้นด้วย 8 เพราะ 47 เป็นจำนวนเต็มและฐานปลายทางคือ 8 ครับ:

หารสั้น 47 ด้วย 8

```
47 ÷ 8 = 5  เศษ 7   (LSD)
 5 ÷ 8 = 0  เศษ 5   (MSD)
─────────────────────────
อ่านล่างขึ้นบน = 57
```

ขั้น 2 — ตรวจกลับทันที เพราะตรวจได้ฟรีครับ: $57_8 = 5 \times 8 + 7 = 40 + 7 = 47$ ✓

ขั้น 3 — ส่วนทศนิยม เลือกวิธีคูณด้วย 8 เพราะ 0.5625 เป็นเศษส่วน:

คูณ 0.5625 ด้วย 8 — เก็บตัวหน้าจุด

```
0.5625 × 8 = 4.5    เก็บ 4 · เหลือ 0.5
0.5    × 8 = 4.0    เก็บ 4 · เหลือ 0 ⟹ หยุด
อ่านบนลงล่าง = .44
```

ขั้น 4 — ตรวจกลับ: $0.44_8 = 4 \times \frac{1}{8} + 4 \times \frac{1}{64} = 0.5 + 0.0625 = 0.5625$ ✓

ตอบ: $47_{10} = \mathbf{57_8}$ · $0.5625_{10} = \mathbf{0.44_8}$

"$47_{10} = 57_8$ *and* $0.5625_{10} = 0.44_8$*."*

Y7.2 สไลด์ Week 1 · Decimal to Binary / Hexadecimal (Fraction)

> Convert 0.65625_{10} to hexadecimal.

ระวังตัวหน้าจุดที่เกิน 9 ครับ

เฉลย Y7.2

ขั้น 1 — เลือกวิธี เพราะเป็นส่วนทศนิยมล้วน ⟹ ใช้ repeated multiply-by-16 ครับ (ห้ามใช้หารเด็ดขาด หารใช้กับจำนวนเต็มเท่านั้น)

ขั้น 2 — คูณรอบแรก: $0.65625 \times 16 = 10.5$ ⟹ เก็บตัวหน้าจุดคือ **10** เหลือเศษ 0.5

ขั้น 3 — แปลง 10 เป็นสัญลักษณ์ฐานสิบหก เพราะฐาน 16 ไม่มีสัญลักษณ์ "10" ครับ ⟹ เขียนเป็น **A**

ขั้น 4 — คูณรอบสอง: $0.5 \times 16 = 8.0$ ⟹ เก็บ **8** เหลือเศษ 0 ⟹ หยุด

คูณ 0.65625 ด้วย 16

```
0.65625 × 16 = 10.5   เก็บ 10 = A · เหลือ 0.5
0.5     × 16 =  8.0   เก็บ 8      · เหลือ 0 ⟹ หยุด
อ่านบนลงล่าง = .A8
```

ขั้น 5 — ตรวจกลับเป็นฐานสิบ: $0.A8_{16} = 10 \times \frac{1}{16} + 8 \times \frac{1}{256} = 0.625 + 0.03125 = 0.65625$ ✓

ตอบ: $0.65625_{10} = \mathbf{0.A8_{16}}$

"$0.65625 \times 16 = 10.5$ *(digit A),* $0.5 \times 16 = 8.0$ *(digit 8), so* $0.65625_{10} = 0.A8_{16}$*."*

Y7.3

> Convert 100_{10} to base 2, base 8 and base 16, and verify each answer.

เฉลย Y7.3

ขั้น 1 — base 2 ด้วยการหารสั้นด้วย 2 เพราะ 100 เป็นจำนวนเต็มครับ:

หารสั้น 100 ด้วย 2

```
100 ÷ 2 = 50  เศษ 0
 50 ÷ 2 = 25  เศษ 0
 25 ÷ 2 = 12  เศษ 1
 12 ÷ 2 =  6  เศษ 0
  6 ÷ 2 =  3  เศษ 0
  3 ÷ 2 =  1  เศษ 1
  1 ÷ 2 =  0  เศษ 1
─────────────────────
อ่านล่างขึ้นบน = 1100100
```

ขั้น 2 — base 8 ด้วยการหารสั้นด้วย 8:

หารสั้น 100 ด้วย 8

```
100 ÷ 8 = 12  เศษ 4
 12 ÷ 8 =  1  เศษ 4
  1 ÷ 8 =  0  เศษ 1
─────────────────────
อ่านล่างขึ้นบน = 144
```

ขั้น 3 — base 16 ด้วยการหารสั้นด้วย 16:

หารสั้น 100 ด้วย 16

```
100 ÷ 16 = 6  เศษ 4
  6 ÷ 16 = 0  เศษ 6
─────────────────────
อ่านล่างขึ้นบน = 64
```

ขั้น 4 — ตรวจกลับทั้งสามอันเป็นฐานสิบ เพราะทุกอันต้องได้ 100 เท่ากันครับ:

$1100100_2 = 64 + 32 + 4 = 100$ ✓ · $144_8 = 1 \times 64 + 4 \times 8 + 4 = 64 + 32 + 4 = 100$ ✓ · $64_{16} = 6 \times 16 + 4 = 96 + 4 = 100$ ✓

ขั้น 5 — กับดักที่ต้องระวัง คำตอบฐานสิบหกได้ 64 ซึ่ง**หน้าตาเหมือนเลขหกสิบสี่** แต่มันคือ 100_{10} ครับ — **ต้องเขียนตัวห้อยกำกับเสมอ** ไม่งั้นสื่อสารผิด

ตอบ: $100_{10} = \mathbf{1100100_2} = \mathbf{144_8} = \mathbf{64_{16}}$

"$100_{10} = 1100100_2 = 144_8 = 64_{16}$, verified by converting each back to decimal."

Y7.4

> Try to convert 0.1_{10} to base 2 using the repeated multiply-by-2 process. What happens, and what does this tell you about storing decimal fractions in a computer?

ทำสัก 8 รอบแล้วสังเกตดูครับ

เฉลย Y7.4

ขั้น 1 — ลงมือคูณตามกติกาไปเรื่อย ๆ เพราะโจทย์ให้สังเกตเอง ต้องทำจริงก่อนครับ:

คูณ 0.1 ด้วย 2

```
0.1 × 2 = 0.2
0.2 × 2 = 0.4
0.4 × 2 = 0.8
0.8 × 2 = 1.6   เหลือ 0.6
0.6 × 2 = 1.2   เหลือ 0.2   ← ซ้ำกับรอบที่ 2
0.2 × 2 = 0.4
0.4 × 2 = 0.8
0.8 × 2 = 1.6
─────────────────────────
อ่านบนลงล่าง = .00011001100110011…
```

ขั้น 2 — สังเกตว่าเกิดอะไรขึ้น เพราะพอเศษกลับมาเป็น 0.2 อีกครั้ง **ทุกอย่างจะวนซ้ำเดิม**ครับ $\Longrightarrow$ ส่วนทศนิยม**ไม่มีวันเป็นศูนย์** เงื่อนไขหยุดจึงไม่เกิดขึ้นเลย

ขั้น 3 — อธิบายสาเหตุ เพราะ $0.1 = \frac{1}{10}$ และ $10 = 2 \times 5$ มีตัวประกอบ **5** อยู่ ซึ่งฐาน 2 สร้างไม่ได้ (ฐาน 2 สร้างได้แต่ $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$) $\Longrightarrow$ เศษส่วนนี้จึงเป็นทศนิยมซ้ำไม่รู้จบในฐานสอง

ขั้น 4 — สรุปผลกับคอมพิวเตอร์ เครื่องเก็บบิตได้จำกัด (32 หรือ 64 บิต) จึงต้อง**ตัดทิ้ง**ตรงจุดหนึ่ง $\Longrightarrow$ ค่าที่เก็บได้จึงเป็นค่า**ประมาณ** ไม่ใช่ 0.1 เป๊ะ นี่คือเหตุผลที่โปรแกรมคำนวณ $0.1 + 0.2$ แล้วไม่ได้ 0.3 พอดี

ขั้น 5 — โยงกลับไปตอนที่ 1 อาการนี้ตรงกับข้อเสียของดิจิทัลที่สไลด์เขียนไว้เป๊ะครับ: `conversion … can result in loss of accuracy and information`

ตอบ: กระบวนการไม่จบ — ได้ $0.1_{10} = 0.0\overline{0011}_2$ เป็นทศนิยมซ้ำไม่รู้จบ คอมพิวเตอร์จึงเก็บได้แค่ค่าประมาณ

“The multiplication never reaches a zero fraction: $0.1_{10} = 0.00011001100110\ldots_2$ *repeats forever, because* $1/10$ *has a factor of 5 that base 2 cannot represent. A computer must truncate it, so decimal fractions such as 0.1 are stored only approximately.”*

8 binary ↔ octal ↔ hex — จับกลุ่ม 3 บิต / 4 บิต

ตะขอเกี่ยว

ตอนที่ 7 น้องแปลง 47_{10} เป็นฐาน 16 ด้วยการหารสองรอบใช่ไหมครับ — ไม่ยากเลย

งั้นสมมติว่าโจทย์ให้ 1000010111110110_2 (16 บิต) แล้วสั่งว่า **“convert to base 16”** ละครับ ถ้าน้องทำตามวิธีเดิม ต้องกางน้ำหนัก 16 หลักบวกกันให้ได้ค่าฐานสิบก่อน แล้วค่อยหารด้วย 16 อีกหลายรอบ — **ประมาณ 20 ขั้น และมีโอกาสบวกเลขผิดสูงมาก**
ตอนนี้พี่จะให้ทางลัดที่ทำเสร็จใน **10 วินาที ไม่ต้องคูณไม่ต้องหารเลยแม้แต่ครั้งเดียว** ครับ และนี่คือ Assignment ข้อ 7 พอดี

ของใกล้ตัว: จัดดินสอใส่กล่องเป็นชุด ๆ

ถ้ามีดินสอ 12 แท่งกองรวมกัน นับยากครับ แต่ถ้าจัดใส่กล่องละ 3 แท่ง จะได้ 4 กล่องพอดี — มองปุ๊บรู้ปั๊บ

การแปลง binary ↔ octal ก็คือ**การจัดบิตใส่กล่อง**ครับ กล่องละ 3 บิตสำหรับฐาน 8 และกล่องละ 4 บิตสำหรับฐาน 16 **ไม่มีการคำนวณอะไรเลย มีแค่การจัดกลุ่มแล้วอ่านจากตาราง 0–15 ในตอนที่ 5**

เข้าเรื่อง · กฎจากสไลด์

Base conversions can also be conducted between binary to/from octal or hexadecimal numbers very easily by using the following rule:

3 binary digits = 1 octal digit

เพราะ $2^3 = 8$ — 3 บิตแทนค่าได้ 0 ถึง 7 พอดีเป๊ะกับตัวเลขฐานแปด 1 ตัว

4 binary digits = 1 hexadecimal digit

เพราะ $2^4 = 16$ — 4 บิตแทนค่าได้ 0 ถึง 15 พอดีเป๊ะกับตัวเลขฐานสิบหก 1 ตัว

ที่มา — ทำไมทางลัดนี้ถึงใช้ได้ (และทำไมฐาน 10 ใช้ไม่ได้)

ทางลัดนี้ใช้ได้เฉพาะตอนที่ **ฐานหนึ่งเป็นกำลังพอดีของอีกฐานหนึ่ง** ครับ

ลองดูน้ำหนักของฐานสองเรียงกัน: $\ldots, 2^5, 2^4, 2^3, 2^2, 2^1, 2^0$
ทีนี้จับ 3 ตัวมัดเป็นก้อน: $(2^5 2^4 2^3)$ กับ $(2^2 2^1 2^0)$ — ก้อนขวามีน้ำหนักรวมสูงสุด 7 และก้อนซ้ายทั้งก้อนมีค่าคูณ $2^3 = 8$ อยู่ข้างหน้า

$$2^3 = 8 = 8^1 \quad \text{และ} \quad 2^6 = 64 = 8^2$$

ทุก 3 บิตพอดีคือ 1 หลักฐานแปด — ขอบของกลุ่มไปตรงกับขอบของหลักเป๊ะ

ส่วนฐาน 10 ทำแบบนี้**ไม่ได้**ครับ เพราะ 10 ไม่ใช่กำลังของ 2 ($2^3 = 8, 2^4 = 16$ ไม่มี 10) ขอบของกลุ่มบิตจะไม่ตรงกับขอบของหลักฐานสิบเลย — **นี่คือเหตุผลว่าทำไมแปลง binary → decimal ยังต้องกางน้ำหนักบวกกันอยู่ แต่ binary → octal/hex ใช้จับกลุ่มได้**

กฎเหล็ก: จับกลุ่ม จากจุดทศนิยม ออกไปทั้งสองทาง



ศูนย์ที่เติมเข้าไป**ต้องอยู่ขอบนอกเสมอ** — ซ้ายสุด (leading zero) หรือขวาสุด (trailing zero) ตัวไหนก็ไม่เปลี่ยนค่าครับ เพราะมันอยู่ห่างจุดออกไป

กับดักข้อที่ 1 · จับกลุ่มผิดจุดเริ่ม

ถ้าเลข**ไม่มีจุดทศนิยม** ให้ถือว่าจุดอยู่**ขวาสุด** ⟹ จับกลุ่มจาก**ขวาไปซ้าย** เสมอครับ

เช่น 10111_2 เป็นฐานแปด: ถูก ⟹ 10 111 เติมเป็น 010 111 $= 27_8$ · ผิด ⟹ 101 11 แล้วอ่านเป็น 53_8 ซึ่ง**ผิด** (ตรวจ: $10111_2 = 23_{10}$, $27_8 = 23$ ✓, $53_8 = 43$ ✗)

กับดักข้อที่ 2 · เติมศูนย์ผิดฝั่งในส่วนทศนิยม

ในส่วน**ทศนิยม** ต้องเติมศูนย์ที่**ขวาสุด**ครับ ไม่ใช่ซ้าย

0.11_2 เป็นฐานสิบหก: ถูก ⟹ $.1100 = 0.C_{16} = 0.75$ ✓ · ผิด ⟹ $.0011 = 0.3_{16} = 0.1875$ ✗
เหตุผลง่ายมากครับ — ศูนย์ที่เติมต้องอยู่**ไกลจากจุด** ไม่งั้นมันจะไปดันบิตจริงให้เลื่อนตำแหน่ง

ทางลัด · แปลง octal ↔ hex ต้องผ่าน binary เสมอ

ไม่มีทางลัดจับกลุ่มระหว่างฐาน 8 กับฐาน 16 โดยตรงครับ เพราะ 16 ไม่ใช่กำลังของ 8

ต้อง**แตกเป็นบิตก่อน แล้วจับกลุ่มใหม่**: octal → (3 บิตต่อหลัก) → binary → (จับกลุ่มใหม่ 4 บิต) → hex
เช่น $57_8 \to 101\ 111 \to 0010\ 1111 \to 2F_{16}$ ✓ (ตรงกับที่พี่ทำใน I DO ตอนที่ 7 พอดีครับ)

ศัพท์สอบตอนที่ 8

English	แปลว่า	ข้อสอบเขียนมาแบบนี้
group / grouping	จับกลุ่มบิต	“group the bits in fours”
pad with zeros	เติมศูนย์ให้ครบกลุ่ม	“pad the leftmost group with leading zeros”
leading zero	ศูนย์นำหน้า (ซ้ายสุด)	ใช้กับส่วนจำนวนเต็ม
trailing zero	ศูนย์ต่อท้าย (ขวาสุด)	ใช้กับส่วนทศนิยม

I DO พี่ทำโจทย์จากสไลด์ให้ดูครับ

ตัวอย่างที่พี่ทำ — สไลด์ Week 1 · Binary to Octal Conversion

> Convert 101111010011_2 to octal.

1

ปลายทางคือฐาน 8
⟹ **จับกลุ่มละ 3 บิต**

เลือกขนาดกลุ่มจากฐานปลายทาง

ฐาน 8 ⟹ กลุ่มละ **3** บิต เพราะ $2^3 = 8$ ครับ (ถ้าเป็นฐาน 16 จะใช้ 4 บิต)

2



จับกลุ่มจากขวาไปซ้าย

เพราะไม่มีจุดทศนิยม ⟹ ถือว่าจุดอยู่ขวาสุดครับ

101 111 010 011 — **ลงตัวพอดี 4 กลุ่ม ไม่ต้องเติมศูนย์** (12 บิต หารด้วย 3 ลงตัว)

3

```
101 = 4+0+1 = 5
111 = 4+2+1 = 7
010 = 0+2+0 = 2     011 = 3
```

แปลงแต่ละกลุ่มด้วยน้ำหนัก 4-2-1

ในกลุ่ม 3 บิต น้ำหนักคือ 4, 2, 1 ครับ (จากตารางตอนที่ 5)

$101 = 5 \cdot 111 = 7 \cdot 010 = 2 \cdot 011 = 3$

4

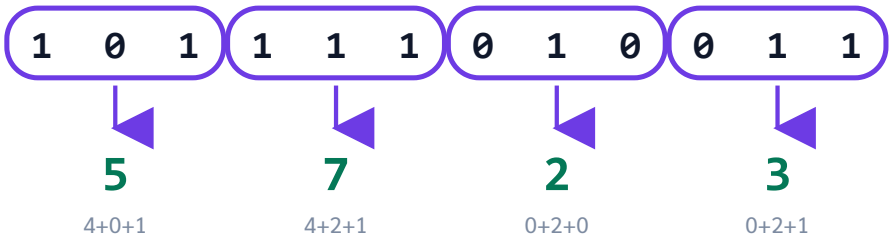
5723_8

เรียงต่อกันตามลำดับเดิม

เขียนเรียงจากซ้ายไปขวาตามกลุ่มเดิมเลยครับ — **ห้ามสลับ**

ตรวจ: $5723_8 = 5(512) + 7(64) + 2(8) + 3 = 2560 + 448 + 16 + 3 = 3027$ และ $101111010011_2 = 2048 + 512 + 256 + 128 + 64 + 16 + 2 + 1 = 3027$ ✓

จับกลุ่มละ 3 บิต จากขวาไปซ้าย



คำตอบ

$\underbrace{101}_{5}\ \underbrace{111}_{7}\ \underbrace{010}_{2}\ \underbrace{011}_{3}$

$101111010011_2 = 5723_8$ — ตรวจกลับได้ 3027_{10} ทั้งคู่ ✓

“Grouping the bits in threes from the right gives 101 111 010 011 = 5723_8.”

WE DO ทำด้วยกันครับ — คราวนี้ย้อนทาง

ทำด้วยกัน สไลด์ Week 1 · Octal to Binary Conversion

> Convert 4106_8 to base 2.

ย้อนทางง่ายกว่าอีกครับ — แตกทีละหลัก

1 4 1 0 6

แยกทีละหลัก

ฐาน 8 ⟹ แต่ละหลักกลายเป็น ..... บิต

2 4 → ??? 1 → ??? 0 → ??? 6 → ???

แปลงทุกหลักเป็น 3 บิต (ต้องครบ 3 เสมอ)

$4 =$ ..... $\cdot 1 =$ ..... $\cdot 0 =$ ..... $\cdot 6 =$ .....

3 ต่อกันแล้วตัด leading zero

ต่อกันตามลำดับ

$4106_8 =$ ..... $_2$

เฉลย WE DO

ขั้น 1 — ฐาน 8 ⟹ แต่ละหลักกลายเป็น 3 บิต เพราะ $2^3 = 8$ ครับ และ**ต้องเขียนครบ 3 บิตทุกหลัก** แม้ค่าจะน้อย ไม่งั้นบิตจะเลื่อนตำแหน่ง

ขั้น 2 — แปลงทีละหลักด้วยน้ำหนัก 4-2-1 เพราะเป็นน้ำหนักของกลุ่ม 3 บิตครับ:

$4 = 4+0+0 \Rightarrow \mathbf{100}$ · $1 = 0+0+1 \Rightarrow \mathbf{001}$ · $0 \Rightarrow \mathbf{000}$ · $6 = 4+2+0 \Rightarrow \mathbf{110}$

ขั้น 3 — ต่อกันตามลำดับเดิม: $100\ 001\ 000\ 110 = 100001000110_2$

บิตซ้ายสุดเป็น 1 อยู่แล้ว ⟹ ไม่มี leading zero ให้ตัดครับ

ขั้น 4 — ตรวจกลับ 2 ทาง เพราะข้อนี้ตรวจง่ายมาก:

① จับกลุ่มกลับ: $100\ 001\ 000\ 110 \rightarrow 4\ 1\ 0\ 6$ ✓ ได้เลขเดิม

② เทียบค่าฐานสิบ: $4106_8 = 4(512)+1(64)+0(8)+6 = 2048+64+6 = 2118$ และ $100001000110_2 = 2048+64+4+2 = 2118$ ✓

ตอบ: $4106_8 = \mathbf{100001000110_2}$

"Each octal digit expands to three bits: $4 = 100, 1 = 001, 0 = 000, 6 = 110$, *so* $4106_8 = 100001000110_2$*."*

YOU DO ตาน้องครับ

Y8.1 สไลด์ Week 1 · Binary to Hexadecimal Conversion

> Convert 1011111001100011_2 to base 16.

เฉลย Y8.1

ขั้น 1 — เลือกขนาดกลุ่ม เพราะปลายทางเป็นฐาน 16 และ $2^4 = 16$ ⟹ จับกลุ่มละ **4 บิต** ครับ

ขั้น 2 — จับกลุ่มจากขวาไปซ้าย เพราะไม่มีจุดทศนิยม ⟹ ถือว่าจุดอยู่ขวาสุด:

$1011\ 1110\ 0110\ 0011$ — มี 16 บิต หารด้วย 4 ลงตัว ⟹ ไม่ต้องเติมศูนย์

ขั้น 3 — แปลงแต่ละกลุ่มด้วยน้ำหนัก 8-4-2-1 แล้วเปลี่ยนเป็นสัญลักษณ์ฐานสิบหก:

$1011 = 8+0+2+1 = 11 \Rightarrow \mathbf{B}$ · $1110 = 8+4+2+0 = 14 \Rightarrow \mathbf{E}$

$0110 = 0+4+2+0 = 6 \Rightarrow \mathbf{6}$ · $0011 = 0+0+2+1 = 3 \Rightarrow \mathbf{3}$

ขั้น 4 — เรียงต่อกันตามลำดับเดิม: $BE63_{16}$

ขั้น 5 — ตรวจกลับ ด้วยการแตกกลับเป็นบิต: $B \rightarrow 1011, E \rightarrow 1110, 6 \rightarrow 0110, 3 \rightarrow 0011$ ⟹ 1011111001100011_2 ✓ ตรงกับโจทย์เป๊ะ

จับกลุ่ม 4 บิต

1011	1110	0110	0011
B	**E**	**6**	**3**

ตอบ: $1011111001100011_2 = \mathbf{BE63_{16}}$

“Grouping in fours from the right: 1011 1110 0110 0011 = B E 6 3, so the answer is $BE63_{16}$.”

Y8.2 สไลด์ Week 1 · Hexadecimal to Binary Conversion

> Convert $A29C_{16}$ to base 2.

เฉลย Y8.2

ขั้น 1 — แปลงตัวอักษรเป็นค่าก่อน เพราะต้องรู้ค่าถึงจะเขียนบิตได้ครับ: $A = 10 \cdot C = 12$

ขั้น 2 — แตกทุกหลักเป็น 4 บิตเต็ม เพราะฐาน 16 $\Longrightarrow$ 4 บิตต่อหลัก และ**ห้ามเขียนไม่ครบ 4**:

$A = 10 = 8 + 0 + 2 + 0 \Rightarrow \mathbf{1010} \cdot 2 = 0 + 0 + 2 + 0 \Rightarrow \mathbf{0010}$

$9 = 8 + 0 + 0 + 1 \Rightarrow \mathbf{1001} \cdot C = 12 = 8 + 4 + 0 + 0 \Rightarrow \mathbf{1100}$

ขั้น 3 — ต่อกันตามลำดับเดิม: $1010\ 0010\ 1001\ 1100 = 1010001010011100_2$

ขั้น 4 — ตรวจกลับด้วยการจับกลุ่ม 4 บิตอีกครั้ง: $1010 \to A, 0010 \to 2, 1001 \to 9, 1100 \to C \Longrightarrow A29C_{16}$ ✓

แตกทีละหลัก หลักละ 4 บิต

A	2	9	C
1010	**0010**	**1001**	**1100**

ตอบ: $A29C_{16} = \mathbf{1010001010011100_2}$

“Each hex digit expands to four bits: $A = 1010$, $2 = 0010$, $9 = 1001$, $C = 1100$, so $A29C_{16} = 1010001010011100_2$.”

Y8.3

> Convert 11010.101_2 to **both** octal and hexadecimal.

ข้อนี้มีจุดทศนิยม ต้องจับกลุ่มจากจุดออกไปทั้งสองทางครับ

เฉลย Y8.3

ขั้น 1 — หาค่าฐานสิบไว้ตรวจก่อน เพราะข้อนี้ต้องตอบสองฐาน ต้องมีตัวกลางไว้เทียบครับ: $11010.101_2 = 16 + 8 + 0 + 2 + 0 + 0.5 + 0 + 0.125 = 26.625$

ขั้น 2 — ฐาน 8: จับกลุ่มละ 3 บิต จากจุดออกไปทั้งสองทาง

ฝั่งซ้าย $11010 \Longrightarrow 11\ 010$ เติมศูนย์**ซ้ายสุด** $\Longrightarrow 011\ 010$

ฝั่งขวา $101 \Longrightarrow$ ครบ 3 พอดี $\Longrightarrow 101$

ฐาน 8 — กลุ่มละ 3 บิต

```
011  010 . 101
 3    2  .  5
```

$\Longrightarrow 32.5_8$ — ตรวจ: $3(8) + 2 + 5(\frac{1}{8}) = 24 + 2 + 0.625 = 26.625$ ✓

ขั้น 3 — ฐาน 16: จับกลุ่มละ 4 บิต จากจุดออกไปทั้งสองทาง

ฝั่งซ้าย $11010 \Longrightarrow 1\ 1010$ เติมศูนย์**ซ้ายสุด** $\Longrightarrow 0001\ 1010$

ฝั่งขวา $101 \Longrightarrow$ ขาดไป 1 บิต เติมศูนย์**ขวาสุด** $\Longrightarrow 1010$

ฐาน 16 — กลุ่มละ 4 บิต

```
0001  1010 . 1010
  1    A  .   A
```

$\Longrightarrow 1A.A_{16}$ — ตรวจ: $1(16) + 10 + 10(\frac{1}{16}) = 16 + 10 + 0.625 = 26.625$ ✓

ขั้น 4 — เน้นจุดที่พลาดง่าย สังเกตว่าฝั่งซ้ายเติมศูนย์**ซ้ายสุด** แต่ฝั่งขวาเติมศูนย์**ขวาสุด** — **คนละทิศกัน** เพราะศูนย์ที่เติมต้องอยู่ไกลจากจุดเสมอครับ ถ้าเผลอเติมเป็น .0101 จะได้ $0.5_{16} = 0.3125$ ซึ่งผิด

ตอบ: $11010.101_2 = \mathbf{32.5_8} = \mathbf{1A.A_{16}}$ **(ทั้งคู่** $= 26.625_{10}$**)**

"Grouping outward from the binary point: 011 010 . 101 = 32.5_8*, and 0001 1010 . 1010 =* $1A.A_{16}$*; both equal* 26.625_{10}*."*

STOP

เฉลย Assignment #1

ตั้งแต่หน้านี้ไปคือเฉลย Assignment ข้อ 1–7 ครบทุกข้อย่อยครับ ถ้าน้องยังไม่ได้ลองทำเอง พี่ขอให้กลับไปทำก่อนนะครับ เพราะ Assignment คิดเป็น **25%** ของเกรด และข้อสอบกลางภาคจะถามวิธีเดียวกันนี้แบบไม่มีเฉลยให้เปิด

ทุกข้อพี่เฉลยตามโครง **6 ชั้น** เหมือนกันหมด: ① โจทย์ต้นฉบับ + สิ่งที่โจทย์ซ่อนไว้ → ② เลือกวิธีและบอกเหตุผล → ③ ไล่ทีละขั้นพร้อมภาพ → ④ คำตอบสุดท้าย → ⑤ ตรวจด้วยวิธีที่สอง → ⑥ กับดักของข้อนั้น

9 เฉลย Assignment #1 ข้อ 1 และ 2

อ่านโจทย์ให้ขาดก่อน

ข้อ 1 สั่งว่า `Describe the following decimal numbers using the positional numbering system` — **ไม่มีคำว่า determine the decimal value** ครับ เพราะเลขมันเป็นฐานสิบอยู่แล้ว ถ้าไปตอบว่า “$= 10724$” เฉย ๆ จะได้ 0 คะแนน **สิ่งที่เขาต้องการคือประโยคผลบวกของพจน์** $a_i \times r^i$ ทุกหลักครับ

ส่วนข้อ 2 เพิ่มคำว่า `and determine their equivalent decimal values` เข้ามา ⟹ ต้องเขียน**ทั้งประโยคพจน์และค่าฐานสิบ** ครับ

ข้อ 1 (a) — 10724_{10}

① โจทย์ต้นฉบับ — Assignment #1 · ข้อ 1a

> Describe the following decimal numbers using the positional numbering system: (a) 10724_{10}

แปล: จงอธิบาย 10724_{10} ด้วยระบบเลขประจำหลัก
โจทย์ซ่อนอะไรไว้: ข้อนี้มี**หลักที่เป็นศูนย์อยู่กลางเลข** (10 7̲24 ตัวที่สองคือ 0) คนชอบข้ามหลักนั้นแล้วเขียนพจน์ขาดไป 1 พจน์ ทำให้หลักซ้ายเลื่อนตำแหน่งผิดทั้งหมดครับ

② เตรียมก่อนลงมือ

ใช้วิธี: กางสูตร positional ตรง ๆ ครับ เพราะโจทย์สั่ง `describe` ไม่ได้สั่งให้แปลงฐาน

สูตรที่ใช้: $N = a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1 r^1 + a_0 r^0$ โดยข้อนี้ $r = 10$ และ $n = 5 \Rightarrow$ เลขชี้กำลังสูงสุด $= n - 1 = 4$

③ กางน้ำหนักทุกหลัก — 10724 ฐานสิบ

1	0	7	2	4
10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
10000	0	700	20	4

③ ไล่ทีละขั้น → ④ คำตอบ → ⑤ ตรวจ

ขั้น 1 — นับหลักก่อน เพราะเลขชี้กำลังสูงสุดคือ $n - 1$ ครับ: 1 0 7 2 4 มี **5 หลัก** $\Rightarrow$ สูงสุดคือ 10^4

ขั้น 2 — เขียนน้ำหนักจากขวาไปซ้าย เพราะเริ่มจากซ้ายมักนับพลาด: $10^0 = 1$, $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$, $10^4 = 10000$ — ตัวซ้ายสุดได้ 10^4 ตรงกับขั้น 1 ✓

ขั้น 3 — คูณทีละหลัก โดย<u>ต้องเขียนหลักที่เป็นศูนย์ด้วย</u> เพราะพจน์ 0×10^3 คือตัวยึดตำแหน่งของหลัก 10^4 ครับ:

$$1 \times 10^4 = 10000 \cdot 0 \times 10^3 = 0 \cdot 7 \times 10^2 = 700 \cdot 2 \times 10^1 = 20 \cdot 4 \times 10^0 = 4$$

ขั้น 4 — บวกทุกพจน์: $10000 + 0 + 700 + 20 + 4 = 10724$

④ **คำตอบ:** $10724_{10} = 1 \times 10^4 + 0 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 4 \times 10^0 = \mathbf{10724_{10}}$

⑤ **ตรวจด้วยวิธีที่สอง — บวกกลับเป็นฐานสิบ:** $10000 + 0 + 700 + 20 + 4 = 10724$ ซึ่ง**เท่ากับเลขเดิมเป๊ะ** ✓
(เพราะเราอยู่ในฐานสิบอยู่แล้ว ผลบวกจึงต้องออกมาเท่ากับตัวเลขที่โจทย์ให้เสมอ — ถ้าไม่ตรงแปลว่าน้ำหนัก

ผิด กลับไปดูขั้น 2 ครับ)

"$10724_{10} = 1 \times 10^4 + 0 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 4 \times 10^0 = 10724.$"

⑥ กับดักของข้อนี้

ลืมเขียนพจน์ 0×10^3 ครับ ถ้าข้ามหลักศูนย์ไป น้องจะเขียนเป็น $1 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 4 \times 10^0$ ซึ่งได้ **1724** — ผิดไป 9000

วิธีกันพลาด: นับจำนวนพจน์ที่เขียนเสร็จ ต้องเท่ากับจำนวนหลักพอดี ข้อนี้ 5 หลัก ⟹ ต้องมี 5 พจน์ครับ

หัวใจของข้อนี้: หลักที่เป็นศูนย์ก็ยังเป็นพจน์หนึ่ง ห้ามข้าม

ข้อ 1 (b) — 1638_{10}

① โจทย์ต้นฉบับ — Assignment #1 · ข้อ 1b

> Describe the following decimal numbers using the positional numbering system: (b) 1638_{10}

แปล: จงอธิบาย 1638_{10} ด้วยระบบเลขประจำหลัก

โจทย์ซ่อนอะไรไว้: ข้อนี้**ไม่มีหลักศูนย์เลย** ทุกหลักมีค่าหมด กับดักจึงย้ายไปอยู่ที่ **การนับเลขชี้กำลัง** แทน — 4 หลัก ต้องจบที่ 10^3 ไม่ใช่ 10^4 ครับ

② เตรียมก่อนลงมือ

ใช้วิธี: กางสูตร positional เหมือนข้อ (a) เพราะคำสั่งเดียวกันครับ

สูตรที่ใช้: $r = 10, n = 4 \Longrightarrow$ เลขชี้กำลังไล่จาก 10^3 ลงมาถึง 10^0

③ กางน้ำหนักทุกหลัก — 1638 ฐานสิบ

1	6	3	8
10^3	10^2	10^1	10^0
1000	600	30	8

③ ไล่ทีละขั้น → ④ คำตอบ → ⑤ ตรวจ

ขั้น 1 — นับหลัก เพราะต้องรู้เลขชี้กำลังตัวบนสุดก่อน: 1 6 3 8 มี **4 หลัก** ⟹ สูงสุดคือ 10^3 (ไม่ใช่ 10^4 เพราะนับเริ่มที่ 0)

ขั้น 2 — เขียนน้ำหนักจากขวาไปซ้าย: $1, 10, 100, 1000 \Longrightarrow 10^0, 10^1, 10^2, 10^3$ — ตัวซ้ายสุดได้ 10^3 ตรงกับขั้น 1 ✓

ขั้น 3 — คูณทีละหลัก เพราะทุกหลักต้องมีพจน์ของตัวเอง:

$1 \times 10^3 = 1000 \cdot 6 \times 10^2 = 600 \cdot 3 \times 10^1 = 30 \cdot 8 \times 10^0 = 8$

ขั้น 4 — บวกทุกพจน์: $1000 + 600 + 30 + 8 = 1638$

> ④ **คำตอบ:** $1638_{10} = 1 \times 10^3 + 6 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 8 \times 10^0 = \mathbf{1638_{10}}$

⑤ **ตรวจด้วยวิธีที่สอง — บวกกลับเป็นฐานสิบ:** $1000 + 600 + 30 + 8 = 1638$ ตรงกับเลขเดิม ✓
ตรวจซ้ำอีกชั้น: จำนวนพจน์ที่เขียนได้ = 4 พจน์ = จำนวนหลักพอดี ✓
"$1638_{10} = 1 \times 10^3 + 6 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 8 \times 10^0 = 1638$."

⑥ กับดักของข้อนี้

เริ่มเลขชี้กำลังที่ 1 แทนที่จะเป็น 0 ครับ ถ้าพลาดจะเขียนเป็น $1 \times 10^4 + 6 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 8 \times 10^1$ ซึ่งได้ **16380** — ผิดไป 10 เท่าพอดี

วิธีกันพลาด: จำว่า**หลักหน่วยคือ r^0 เสมอ** และ $r^0 = 1$ ทุกฐาน เขียนหลักขวาสุดก่อนแล้วค่อยไล่ไปซ้าย

หัวใจของข้อนี้: เลขชี้กำลังเริ่มนับที่ศูนย์จากหลักขวาสุด

ข้อ 1 (c) — 297_{10}

① โจทย์ต้นฉบับ — Assignment #1 · ข้อ 1c

> Describe the following decimal numbers using the positional numbering system: (c) 297_{10}

แปล: จงอธิบาย 297_{10} ด้วยระบบเลขประจำหลัก
โจทย์ซ่อนอะไรไว้: ข้อนี้สั้นที่สุดในสามข้อ กับดักคือ**ความมั่นใจเกิน** — คนมักตอบสั้น ๆ ว่า "$= 297$" แล้วไม่เขียนพจน์ ซึ่งไม่ตอบคำสั่ง `describe` ครับ

② เตรียมก่อนลงมือ

ใช้วิธี: กางสูตร positional ครับ ต่อให้เลขจะสั้นแค่ไหนก็ต้องเขียนครบทุกพจน์

สูตรที่ใช้: $r = 10, n = 3 \Longrightarrow$ พจน์แรกคือ $a_2 \times 10^2$

③ กางน้ำหนักทุกหลัก — 297 ฐานสิบ

2	9	7
10^2	10^1	10^0
200	90	7

③ ไล่ทีละขั้น → ④ คำตอบ → ⑤ ตรวจ

ขั้น 1 — นับหลัก: $2\,9\,7$ มี **3 หลัก** $\Longrightarrow$ เลขชี้กำลังสูงสุด $= 3 - 1 = 2$

ขั้น 2 — เขียนน้ำหนักจากขวาไปซ้าย: $10^0 = 1,\ 10^1 = 10,\ 10^2 = 100$ ✓

ขั้น 3 — คูณทีละหลัก: $2 \times 100 = 200 \cdot 9 \times 10 = 90 \cdot 7 \times 1 = 7$

ขั้น 4 — บวกทุกพจน์: $200 + 90 + 7 = 297$

④ **คำตอบ:** $297_{10} = 2 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 7 \times 10^0 = \mathbf{297_{10}}$

⑤ **ตรวจด้วยวิธีที่สอง — บวกกลับเป็นฐานสิบ:** $200 + 90 + 7 = 297$ ✓
และตรวจซ้ำ: 3 หลัก $\Longrightarrow$ 3 พจน์ ✓ · ทุกหลักน้อยกว่า 10 $\Longrightarrow$ เป็นเลขฐานสิบที่ถูกต้อง ✓
"$297_{10} = 2 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 7 \times 10^0 = 297.$"

⑥ กับดักของข้อนี้

ตอบสั้นเกินไป ครับ เขียนแค่ "$297_{10} = 297$" ได้ 0 คะแนน เพราะไม่ได้ทำสิ่งที่โจทย์สั่ง

คำว่า describe using the positional numbering system คือ**คำสั่งให้แสดงกระบวนการ** $\Longrightarrow$ คะแนนอยู่ที่**ประโยคพจน์** ไม่ได้อยู่ที่ตัวเลขคำตอบ
เขียนเป็นสองบรรทัดจะปลอดภัยที่สุด: บรรทัดแรกเป็นพจน์ $a_i \times r^i$ บรรทัดที่สองเป็นผลบวก

หัวใจของข้อนี้: อ่านคำสั่งให้ขาด — "describe" คือให้แสดงพจน์ ไม่ใช่ให้ตอบตัวเลข

ข้อ 2 (a) — 11101_2

① โจทย์ต้นฉบับ — Assignment #1 · ข้อ 2a

> Describe the following binary numbers using the positional numbering system and determine their equivalent decimal values: (a) 11101_2

แปล: จงอธิบาย 11101_2 ด้วยระบบเลขประจำหลัก และหาค่าฐานสิบที่เท่ากัน
โจทย์ซ่อนอะไรไว้: คำสั่งข้อ 2 มี**สองส่วน** ครับ — ทั้ง describe (เขียนพจน์) และ determine the decimal value (ตอบตัวเลข) **ต้องทำทั้งคู่** ต่างจากข้อ 1 ที่ทำแค่ส่วนแรก

② เตรียมก่อนลงมือ

ใช้วิธี: กางสูตร positional ด้วย $r = 2$ ครับ เพราะโจทย์ให้เลขฐานสองมาแล้วอยากได้ฐานสิบ $\Longrightarrow$ ทิศทาง "ฐานอื่น → ฐานสิบ" $\Longrightarrow$ ใช้คูณน้ำหนักแล้วบวก (ไม่ใช่หารสั้น — หารสั้นใช้ตอนเดินย้อนทาง)

สูตรที่ใช้: $r = 2, n = 5 \Longrightarrow$ น้ำหนัก $2^4\ 2^3\ 2^2\ 2^1\ 2^0 = 16\ 8\ 4\ 2\ 1$

③ กางน้ำหนักทุกหลัก — 11101 ฐานสอง

1	1	1	0	1
2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
16	8	4	0	1

③ ไล่ทีละขั้น → ④ คำตอบ → ⑤ ตรวจ

ขั้น 1 — อ่านตัวห้อยแล้วนับบิต เพราะน้ำหนักขึ้นกับฐานครับ: $r = 2$ และมี **5 บิต** $\Longrightarrow$ MSB มีน้ำหนัก $2^4 = 16$

ขั้น 2 — เขียนน้ำหนักจากขวาไปซ้าย โดยคูณสองไปเรื่อย ๆ: $1 \to 2 \to 4 \to 8 \to 16 \Longrightarrow$ ครบ 5 ตัวพอดี ตรงกับจำนวนบิต ✓

ขั้น 3 — คูณทีละบิต เพราะฐานสองคูณง่ายมาก — บิต 1 คือเอาน้ำหนักมาเต็ม ๆ บิต 0 คือทิ้ง:

$1 \times 16 = 16 \cdot 1 \times 8 = 8 \cdot 1 \times 4 = 4 \cdot 0 \times 2 = 0 \cdot 1 \times 1 = 1$

ขั้น 4 — บวกเฉพาะบิตที่เป็น 1: $16 + 8 + 4 + 1 = 29$

④ **คำตอบ:** $11101_2 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 16 + 8 + 4 + 0 + 1 = \mathbf{29_{10}}$

⑤ **ตรวจด้วยวิธีที่สอง — แปลงกลับด้วยการหารสั้น (วิธีของตอนที่ 7):**

ตรวจ: 29 กลับไปเป็นฐานสอง ต้องได้ 11101

```
29 ÷ 2 = 14   เศษ 1
14 ÷ 2 =  7   เศษ 0
 7 ÷ 2 =  3   เศษ 1
 3 ÷ 2 =  1   เศษ 1
 1 ÷ 2 =  0   เศษ 1
─────────────────────
อ่านล่างขึ้นบน = 11101 ✓ ตรงกับโจทย์
```

"$11101_2 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 29_{10}$."

⑥ กับดักของข้อนี้

อ่านเลขฐานสองเป็นชื่อหลักของฐานสิบ ครับ เห็น 11101 แล้วนึกว่า “หนึ่งหมื่นหนึ่งพันหนึ่งร้อยหนึ่ง” แล้วเขียนน้ำหนักเป็น $10000, 1000, 100, 10, 1 \Longrightarrow$ จะได้ **11101** ซึ่งผิด

วิธีกันพลาด: เขียนน้ำหนักลงกระดาษก่อนเสมอ ถ้าเขียน 16 8 4 2 1 ไว้ใต้บิตแล้ว จะไม่มีทางหลุดไปใช้น้ำหนักฐานสิบครับ และเช็คขนาดคำตอบ: 5 บิตต้องอยู่ในช่วง 0 ถึง $2^5 - 1 = 31$ — ค่า 11101 ที่ตอบผิดนั้นเกินช่วงไปไกลมาก

หัวใจของข้อนี้: เขียนน้ำหนัก 16-8-4-2-1 ลงใต้บิตก่อนคิดเสมอ

ข้อ 2 (b) — 10010_2

① โจทย์ต้นฉบับ — Assignment #1 · ข้อ 2b

> Describe the following binary numbers using the positional numbering system and determine their equivalent decimal values: (b) 10010_2

แปล: จงอธิบาย 10010_2 ด้วยระบบเลขประจำหลัก และหาค่าฐานสิบ
โจทย์ซ่อนอะไรไว้: ข้อนี้มีบิต 1 แค่ **2 ตัว** และบิต 0 ถึง 3 ตัว — กับดักคือ**การนับตำแหน่งของบิต 1 ผิด** เพราะบิต 0 ที่ติดกันหลายตัวทำให้ตาลาย

② เตรียมก่อนลงมือ

ใช้วิธี: กางสูตร positional ด้วย $r = 2$ เหมือนข้อ (a) ครับ

เทคนิคเพิ่มสำหรับข้อนี้: เพราะมีบิต 1 น้อย พี่จะใช้วิธี **“เขียนน้ำหนักครบทุกหลักก่อน แล้วค่อยชี้ว่าบิตไหนเป็น 1”** จะกันการนับตำแหน่งพลาดได้ครับ

③ กางน้ำหนักทุกหลัก — 10010 ฐานสอง

1	0	0	1	0
2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
16	0	0	2	0

③ ไล่ทีละขั้น → ④ คำตอบ → ⑤ ตรวจ

ขั้น 1 — นับบิต เพราะต้องรู้น้ำหนักของ MSB: มี **5 บิต** $\Longrightarrow$ MSB คือ $2^4 = 16$

ขั้น 2 — เขียนน้ำหนักครบทั้ง 5 ตำแหน่ง จากขวาไปซ้าย: $1, 2, 4, 8, 16$

ขั้น 3 — ชี้ว่าบิตไหนเป็น 1 เพราะข้อนี้บิต 1 มีน้อย การไล่แบบนี้เร็วและแม่นกว่าครับ:
บิตซ้ายสุดเป็น 1 ⟹ อยู่ที่น้ำหนัก **16** · บิตที่สี่จากซ้าย (หรือที่สองจากขวา) เป็น 1 ⟹ อยู่ที่น้ำหนัก **2**
ที่เหลือเป็น 0 หมด ⟹ ไม่ส่งค่าเข้าผลรวมเลย

ขั้น 4 — บวก: $16 + 2 = 18$

④ **คำตอบ:** $10010_2 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 16 + 0 + 0 + 2 + 0 = \mathbf{18_{10}}$

⑤ ตรวจด้วยวิธีที่สอง — แปลงกลับด้วยการหารสั้น:

ตรวจ: 18 กลับไปเป็นฐานสอง ต้องได้ 10010

```
18 ÷ 2 = 9  เศษ 0
 9 ÷ 2 = 4  เศษ 1
 4 ÷ 2 = 2  เศษ 0
 2 ÷ 2 = 1  เศษ 0
 1 ÷ 2 = 0  เศษ 1
─────────────────
อ่านล่างขึ้นบน = 10010 ✓ ตรงกับโจทย์
```

"$10010_2 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 18_{10}$."

⑥ กับดักของข้อนี้

นับตำแหน่งบิต 1 ตัวที่สองผิด ครับ บิต 1 ตัวนั้นอยู่ที่ $2^1 = 2$ แต่คนมักนับจากซ้ายแล้วคิดว่าอยู่ที่ $2^2 = 4$ ⟹ ได้คำตอบ **20**

วิธีกันพลาด: นับตำแหน่งจากขวาเสมอ ห้ามนับจากซ้าย บิตขวาสุดคือตำแหน่ง 0 แล้วไล่ 1, 2, 3, 4 ไปทางซ้ายครับ
ตรวจง่าย ๆ อีกอย่าง: บิตสุดท้ายเป็น **0** ⟹ คำตอบต้องเป็น**เลขคู่** — 18 เป็นเลขคู่ ✓ ผ่าน

หัวใจของข้อนี้: นับตำแหน่งบิตจากขวาเสมอ และเช็คคู่-คี่จากบิตสุดท้าย

ข้อ 2 (c) — 01001_2

① โจทย์ต้นฉบับ — Assignment #1 · ข้อ 2c

> Describe the following binary numbers using the positional numbering system and determine their equivalent decimal values: (c) 01001_2

แปล: จงอธิบาย 01001_2 ด้วยระบบเลขประจำหลัก และหาค่าฐานสิบ
โจทย์ซ่อนอะไรไว้: ข้อนี้ขึ้นต้นด้วย **0** ครับ — เป็น leading zero ที่ไม่เปลี่ยนค่า แต่**ยังต้องเขียนพจน์ของมัน** เพราะโจทย์เขียนมา 5 หลัก และมันคือตัวกำหนดว่าหลักซ้ายสุดอยู่ที่ 2^4

② เตรียมก่อนลงมือ

ใช้วิธี: กางสูตร positional ด้วย $r = 2$ ครับ

ข้อควรระวังเฉพาะข้อนี้: ห้ามตัด 0 ตัวหน้าทิ้งก่อนนับหลัก เพราะโจทย์ให้มา 5 หลัก คำตอบก็ควรเขียนครบ 5 พจน์ให้ตรงกับโจทย์ครับ (ตัดทิ้งแล้วค่าไม่เปลี่ยน แต่จะไม่ตรงกับที่โจทย์เขียนมา)

③ กางน้ำหนักทุกหลัก — 01001 ฐานสอง

0	1	0	0	1
2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
0	8	0	0	1

③ ไล่ทีละขั้น → ④ คำตอบ → ⑤ ตรวจ

ขั้น 1 — นับบิตตามที่โจทย์เขียนมา เพราะต้องเขียนพจน์ให้ครบตามโจทย์: มี **5 บิต** $\Longrightarrow$ หลักซ้ายสุดอยู่ที่ $2^4 = 16$

ขั้น 2 — เขียนน้ำหนักจากขวาไปซ้าย: $1, 2, 4, 8, 16$ ✓

ขั้น 3 — คูณทีละบิต รวมบิตแรกที่เป็นศูนย์ด้วย:
$0 \times 16 = 0 \cdot 1 \times 8 = 8 \cdot 0 \times 4 = 0 \cdot 0 \times 2 = 0 \cdot 1 \times 1 = 1$

ขั้น 4 — บวกเฉพาะบิตที่เป็น 1: $8 + 1 = 9$

④ **คำตอบ:** $01001_2 = 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 0 + 8 + 0 + 0 + 1 = \mathbf{9_{10}}$

⑤ **ตรวจด้วยวิธีที่สอง — แปลงกลับด้วยการหารสั้น:**

ตรวจ: 9 กลับไปเป็นฐานสอง ต้องได้ 1001

```
9 ÷ 2 = 4  เศษ 1
4 ÷ 2 = 2  เศษ 0
2 ÷ 2 = 1  เศษ 0
1 ÷ 2 = 0  เศษ 1
─────────────────
อ่านล่างขึ้นบน = 1001 = 01001 (เติม leading zero) ✓
```

การหารสั้นให้ผลเป็น 1001 (4 บิต) ซึ่งเท่ากับ 01001 ที่โจทย์เขียนมา เพราะ **leading zero ไม่เปลี่ยนค่า** ครับ ✓

"$01001_2 = 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 9_{10}$."

⑥ กับดักของข้อนี้

เผลอนับ leading zero เป็นบิตที่มีค่า หรือ **ตัดทิ้งแล้วเลื่อนน้ำหนักผิด** ครับ

ถ้าตัด 0 หน้าทิ้งเป็น 1001 แต่ยังใช้น้ำหนักชุดเดิม 16-8-4-2-1 โดยไล่ผิดตำแหน่ง จะได้ $16 + 2 = \mathbf{18}$ ซึ่งผิด

วิธีกันพลาด: ถ้าจะตัดศูนย์หน้าทิ้ง **ต้องเขียนน้ำหนักใหม่ทั้งชุด** ($1001 \Longrightarrow$ น้ำหนัก 8-4-2-1) หรือง่ายกว่านั้น คือ**อย่าตัดเลย** เขียนตามโจทย์ให้ครบ 5 พจน์ครับ

หัวใจของข้อนี้: leading zero ไม่เปลี่ยนค่า แต่เปลี่ยนจำนวนหลักที่ต้องเขียน

10 เฉลย Assignment #1 ข้อ 3 และ 4

สองข้อนี้ต่างจากข้อ 2 ตรงไหน

คำสั่งเหมือนข้อ 2 เป๊ะครับ (describe ... and determine their equivalent decimal values) เปลี่ยนแค่**ฐาน** — ข้อ 3 เป็นฐาน 8 ข้อ 4 เป็นฐาน 16

เพราะฉะนั้น**วิธีคิดเหมือนเดิมทุกอย่าง** เปลี่ยนแค่ตัว r ในสูตร: น้ำหนักฐาน 8 คือ $1, 8, 64, 512$ · น้ำหนักฐาน 16 คือ $1, 16, 256, 4096$

ของใหม่มีอย่างเดียวคือข้อ 4 มีตัวอักษร ซึ่งต้องแปลงเป็นเลขก่อนคูณครับ

ข้อ 3.1 — 231_8

① โจทย์ต้นฉบับ — Assignment #1 · ข้อ 3.1

> Describe the following octal numbers using the positional numbering system and determine their equivalent decimal values: (1) 231_8

แปล: จงอธิบาย 231_8 ด้วยระบบเลขประจำหลัก และหาค่าฐานสิบที่เท่ากัน

โจทย์ซ่อนอะไรไว้: ตัวเลข 231 หน้าตาเหมือนเลขฐานสิบทุกประการ ⟹ กับดักคือ**เผลออ่านเป็นสองร้อยสามสิบเอ็ด** ต้องดูตัวห้อยให้ดีว่าเป็น 8 ครับ

② เตรียมก่อนลงมือ

ใช้วิธี: กางสูตร positional ด้วย $r = 8$ ครับ เพราะทิศทางคือ “ฐานอื่น → ฐานสิบ” ⟹ คูณน้ำหนักแล้วบวก (ไม่ใช่หารสั้น)

สูตรที่ใช้: $N = a_2 \cdot 8^2 + a_1 \cdot 8^1 + a_0 \cdot 8^0$ ⟹ น้ำหนัก $64, 8, 1$

ตรวจความถูกต้องของโจทย์ก่อน: ทุกหลักต้องน้อยกว่า 8 — $2, 3, 1$ ผ่านหมด ✓

③ กางน้ำหนักทุกหลัก — 231 ฐานแปด

2	3	1
8^2	8^1	8^0
128	24	1

③ ไล่ทีละขั้น → ④ คำตอบ → ⑤ ตรวจ

ขั้น 1 — อ่านตัวห้อยแล้วนับหลัก เพราะน้ำหนักขึ้นกับฐานครับ: $r = 8$ และมี **3 หลัก** ⟹ เลขชี้กำลังสูงสุด $= 3 - 1 = 2$

ขั้น 2 — เขียนน้ำหนักจากขวาไปซ้าย โดยคูณแปดไปเรื่อย ๆ: $1 \to 8 \to 64 \Longrightarrow 8^0, 8^1, 8^2$ ครบ 3 ตัว ตรงกับจำนวนหลัก ✓

ขั้น 3 — คูณทีละหลัก เพราะทุกหลักต้องมีพจน์ของตัวเอง:

$2 \times 8^2 = 2 \times 64 = 128 \cdot 3 \times 8^1 = 3 \times 8 = 24 \cdot 1 \times 8^0 = 1 \times 1 = 1$

ขั้น 4 — บวกทุกพจน์: $128 + 24 + 1 = 153$

④ คำตอบ: $231_8 = 2 \times 8^2 + 3 \times 8^1 + 1 \times 8^0 = 128 + 24 + 1 = \mathbf{153_{10}}$

⑤ ตรวจด้วยวิธีที่สอง — แปลง 153 กลับเป็นฐานแปดด้วยการหารสั้น:

ตรวจ: 153 ต้องกลับมาเป็น 231

```
153 ÷ 8 = 19  เศษ 1
 19 ÷ 8 =  2  เศษ 3
  2 ÷ 8 =  0  เศษ 2
-----------------
อ่านล่างขึ้นบน = 231 ✓ ตรงกับโจทย์
```

"$231_8 = 2 \times 8^2 + 3 \times 8^1 + 1 \times 8^0 = 153_{10}$."

⑥ กับดักของข้อนี้

ใช้น้ำหนักฐานสิบเพราะเลขหน้าตาเหมือนฐานสิบ ครับ ถ้าเผลอใช้ $100, 10, 1$ จะได้ $200 + 30 + 1 = \mathbf{231}$ ซึ่งบังเอิญเท่ากับตัวเลขที่โจทย์ให้พอดี — **ดูเหมือนถูก แต่ผิดสนิท**

วิธีกันพลาด: ถ้าคำตอบฐานสิบที่ได้**เท่ากับตัวเลขที่โจทย์เขียนมาเป๊ะ ๆ** ให้สงสัยไว้ก่อนเลยครับ เพราะเลขฐาน 8 ที่แปลงเป็นฐาน 10 ต้องได้ค่า**น้อยกว่า**เสมอ (เพราะน้ำหนัก 64 น้อยกว่า 100) — $153 < 231$ ✓ สมเหตุสมผล

หัวใจของข้อนี้: ฐาน 8 แปลงเป็นฐาน 10 แล้วค่าต้องน้อยลงเสมอ

ข้อ 3.2 — 64_8

① โจทย์ต้นฉบับ — Assignment #1 · ข้อ 3.2

> Describe the following octal numbers using the positional numbering system and determine their equivalent decimal values: (2) 64_8

แปล: จงอธิบาย 64_8 ด้วยระบบเลขประจำหลัก และหาค่าฐานสิบ

โจทย์ซ่อนอะไรไว้: เลข 64 เป็นเลขที่คุ้นตามากในวิชานี้ (เพราะ $8^2 = 64$ และ $2^6 = 64$) คนจึงมัก**ตอบ 64 ไปเลยโดยไม่คิด** ทั้งที่ 64_8 ไม่ใช่ 64 ครับ

② เตรียมก่อนลงมือ

ใช้วิธี: กางสูตร positional ด้วย $r = 8$ ครับ

สูตรที่ใช้: มีแค่ 2 หลัก $\Longrightarrow N = a_1 \cdot 8^1 + a_0 \cdot 8^0 \Longrightarrow$ น้ำหนัก $8, 1$
ตรวจโจทย์ก่อน: หลัก 6 และ 4 น้อยกว่า 8 ทั้งคู่ ✓ เป็นเลขฐานแปดที่ถูกต้อง

③ กางน้ำหนักทุกหลัก — 64 ฐานแปด

6	4
8^1	8^0
48	4

③ ไล่ทีละขั้น → ④ คำตอบ → ⑤ ตรวจ

ขั้น 1 — นับหลัก เพราะจำนวนหลักเป็นตัวกำหนดเลขชี้กำลังสูงสุดครับ: มี **2 หลัก** $\Longrightarrow$ สูงสุดคือ 8^1 (ไม่ใช่ 8^2)

ขั้น 2 — เขียนน้ำหนักจากขวาไปซ้าย: $8^0 = 1 \cdot 8^1 = 8$ ✓

ขั้น 3 — คูณทีละหลัก: $6 \times 8^1 = 6 \times 8 = 48$ · $4 \times 8^0 = 4 \times 1 = 4$

ขั้น 4 — บวกทุกพจน์: $48 + 4 = 52$

④ **คำตอบ:** $64_8 = 6 \times 8^1 + 4 \times 8^0 = 48 + 4 = \mathbf{52_{10}}$

⑤ ตรวจด้วยวิธีที่สอง — แปลง 52 กลับเป็นฐานแปด:

ตรวจ: 52 ต้องกลับมาเป็น 64

```
52 ÷ 8 = 6   เศษ 4
 6 ÷ 8 = 0   เศษ 6
─────────────────
อ่านล่างขึ้นบน = 64 ✓ ตรงกับโจทย์
```

ตรวจชั้นที่สอง: เลขฐานแปด 2 หลักต้องอยู่ในช่วง 0 ถึง $8^2 - 1 = 63 \Longrightarrow 52$ ตกในช่วงนี้ ✓ (ถ้าตอบ 64 จะเกินช่วงทันที $\Longrightarrow$ รู้ได้เลยว่าผิด)
“$64_8 = 6 \times 8^1 + 4 \times 8^0 = 52_{10}$.”

⑥ กับดักของข้อนี้

ตอบ 64 ตามที่ตาเห็น ครับ — $64_8 \neq 64_{10}$ เลขฐานแปด 2 หลักมากสุดได้แค่ $77_8 = 63_{10}$ เท่านั้น ⟹ ไม่มีทางถึง 64 ได้เลย

วิธีกันพลาด: ก่อนตอบ ให้เช็ค**ช่วงค่าสูงสุด**ของจำนวนหลักนั้นก่อนครับ
ฐาน r จำนวน n หลัก ⟹ ค่ามากสุดคือ $r^n - 1$ · ข้อนี้ $8^2 - 1 = 63$
เทคนิคนี้ใช้ตรวจได้ทุกข้อในหน้านี้เลยครับ

หัวใจของข้อนี้: เลขฐาน r จำนวน n หลัก มีค่าสูงสุดแค่ $r^n - 1$

ข้อ 3.3 — 157_8

① โจทย์ต้นฉบับ — Assignment #1 · ข้อ 3.3

> Describe the following octal numbers using the positional numbering system and determine their equivalent decimal values: (3) 157_8

แปล: จงอธิบาย 157_8 ด้วยระบบเลขประจำหลัก และหาค่าฐานสิบ
โจทย์ซ่อนอะไรไว้: ข้อนี้มีหลัก **7** ซึ่งเป็น**ตัวเลขที่ใหญ่ที่สุดที่ฐานแปดใช้ได้** เป็นตัวเช็คว่าน้องเข้าใจเงื่อนไข $0 \leq a_i < 8$ จริงไหมครับ

② เตรียมก่อนลงมือ

ใช้วิธี: กางสูตร positional ด้วย $r = 8$ ครับ

สูตรที่ใช้: 3 หลัก ⟹ น้ำหนัก $64, 8, 1$

ตรวจโจทย์ก่อน: หลัก $1, 5, 7$ — ตัวใหญ่สุดคือ 7 ซึ่ง**ยังน้อยกว่า 8** ⟹ ถูกต้อง ✓ (ถ้าเจอ 8 หรือ 9 แปลว่าไม่ใช่เลขฐานแปด)

③ กางน้ำหนักทุกหลัก — 157 ฐานแปด

1	5	7
8^2	8^1	8^0
64	40	7

③ ไล่ทีละขั้น → ④ คำตอบ → ⑤ ตรวจ

ขั้น 1 — นับหลัก: มี **3 หลัก** ⟹ เลขชี้กำลังสูงสุด $= 2$

ขั้น 2 — เขียนน้ำหนักจากขวาไปซ้าย: $1 \to 8 \to 64 \Longrightarrow 8^0, 8^1, 8^2$ ✓

ขั้น 3 — คูณทีละหลัก:

$1 \times 8^2 = 1 \times 64 = 64 \;\cdot\; 5 \times 8^1 = 5 \times 8 = 40 \;\cdot\; 7 \times 8^0 = 7 \times 1 = 7$

ขั้น 4 — บวกทุกพจน์: $64 + 40 + 7 = 111$

④ คำตอบ: $157_8 = 1 \times 8^2 + 5 \times 8^1 + 7 \times 8^0 = 64 + 40 + 7 = \mathbf{111_{10}}$

⑤ ตรวจด้วยวิธีที่สอง — แปลง 111 กลับเป็นฐานแปด:

ตรวจ: 111 ต้องกลับมาเป็น 157

```
111 ÷ 8 = 13   เศษ 7
 13 ÷ 8 =  1   เศษ 5
  1 ÷ 8 =  0   เศษ 1
─────────────────────
อ่านล่างขึ้นบน = 157 ✓ ตรงกับโจทย์
```

ตรวจชั้นที่สอง: ฐานแปด 3 หลักอยู่ในช่วง 0 ถึง $8^3 - 1 = 511 \Longrightarrow 111$ ตกในช่วง ✓

"$157_8 = 1 \times 8^2 + 5 \times 8^1 + 7 \times 8^0 = 111_{10}$."

⑥ กับดักของข้อนี้

คูณ 5×8 **ผิดเป็น** $5 \times 10 = 50$ ครับ เพราะสมองเราชินกับฐานสิบมาก ถ้าพลาดจะได้ $100 + 50 + 7 =$ **157** ซึ่งเท่ากับตัวเลขที่โจทย์เขียนมาเป๊ะ — อาการเดียวกับข้อ 3.1

วิธีกันพลาด: เขียนแถวน้ำหนักลงกระดาษก่อนคูณเสมอ ถ้าเขียน 64-8-1 ไว้แล้ว มือจะไม่หลุดไปคูณ 100-10-1 ครับ

และจำหลักการตรวจไว้: แปลงจากฐานเล็กมาฐานสิบแล้ว**ตัวเลขต้องไม่เหมือนเดิม**

หัวใจของข้อนี้: 7 คือตัวเลขใหญ่สุดของฐานแปด และน้ำหนักคือ 64-8-1 ไม่ใช่ 100-10-1

ข้อ 4.1 — $C98_{16}$

① โจทย์ต้นฉบับ — Assignment #1 · ข้อ 4.1

> Describe the following hexadecimal numbers using the positional numbering system and determine their equivalent decimal values: (1) $C98_{16}$

แปล: จงอธิบาย $C98_{16}$ ด้วยระบบเลขประจำหลัก และหาค่าฐานสิบ

โจทย์ซ่อนอะไรไว้: มี**ตัวอักษร C อยู่หลักซ้ายสุด** ซึ่งเป็นหลักที่มีน้ำหนักมากที่สุด ($16^2 = 256$) $\Longrightarrow$ ถ้าแปลง C ผิด คำตอบจะเพี้ยนมากที่สุดด้วย ต้องแปลง $C = 12$ ให้ถูกก่อนครับ

② เตรียมก่อนลงมือ

ใช้วิธี: กางสูตร positional ด้วย $r = 16$ ครับ แต่**เพิ่มขั้นตอนใหม่ 1 ขั้นก่อนคูณ** คือแปลงตัวอักษรเป็นค่าฐานสิบ

ตารางที่ต้องใช้: $A = 10, B = 11, C = 12, D = 13, E = 14, F = 15$
น้ำหนัก: 3 หลัก $\Longrightarrow 16^2 = 256, 16^1 = 16, 16^0 = 1$

③ กางน้ำหนักทุกหลัก — C98 ฐานสิบหก (C = 12)

C	9	8
16^2	16^1	16^0
3072	144	8

③ ไล่ทีละขั้น → ④ คำตอบ → ⑤ ตรวจ

ขั้น 1 — แปลงตัวอักษรเป็นค่าฐานสิบก่อน เพราะคูณตัวอักษรไม่ได้ครับ: $C = 12$ (ส่วน 9 กับ 8 เป็นตัวเลขอยู่แล้ว)

ขั้น 2 — นับหลักแล้วเขียนน้ำหนักจากขวาไปซ้าย โดยคูณสิบหกไปเรื่อย ๆ: $1 \to 16 \to 256 \Longrightarrow$ $16^0, 16^1, 16^2$ ครบ 3 ตัว ✓

ขั้น 3 — คูณทีละหลัก ใช้ค่าที่แปลงแล้วในขั้น 1:
$12 \times 16^2 = 12 \times 256 = 3072 \cdot 9 \times 16^1 = 9 \times 16 = 144 \cdot 8 \times 16^0 = 8 \times 1 = 8$

ขั้น 4 — บวกทุกพจน์: $3072 + 144 + 8 = 3224$

④ **คำตอบ:** $C98_{16} = 12 \times 16^2 + 9 \times 16^1 + 8 \times 16^0 = 3072 + 144 + 8 = \mathbf{3224_{10}}$

⑤ ตรวจด้วยวิธีที่สอง — แปลง 3224 กลับเป็นฐานสิบหก:

ตรวจ: 3224 ต้องกลับมาเป็น C98

```
3224 ÷ 16 = 201  เศษ  8  →  8
 201 ÷ 16 =  12  เศษ  9  →  9
  12 ÷ 16 =   0  เศษ 12  →  C
─────────────────────────────
อ่านล่างขึ้นบน = C98 ✓ ตรงกับโจทย์
```

ตรวจชั้นที่สอง: ฐานสิบหก 3 หลักอยู่ในช่วง 0 ถึง $16^3 - 1 = 4095 \Longrightarrow 3224$ ตกในช่วง ✓
"$C98_{16} = 12 \times 16^2 + 9 \times 16^1 + 8 \times 16^0 = 3224_{10}$."

⑥ กับดักของข้อนี้

จำค่าตัวอักษรผิดตำแหน่ง ครับ คนมักนับ $A = 1$ (ตามลำดับตัวอักษร) แทนที่จะเป็น $A = 10$ ถ้าคิดว่า $C = 3$ จะได้ $3 \times 256 + 144 + 8 = \mathbf{920}$

วิธีกันพลาด: จำจุดยึด $A = 10$ ตัวเดียวพอครับ แล้วนับต่อ: A=10, B=11, C=12, D=13, E=14, F=15 หรือจำแบบนี้: **F คือตัวสุดท้าย = 15** เพราะฐาน 16 ใช้ได้ถึง $16 - 1 = 15$ พอดี

หัวใจของข้อนี้: แปลงตัวอักษรเป็นเลขให้เสร็จก่อน แล้วค่อยคูณน้ำหนัก

ข้อ 4.2 — $BD2_{16}$

① โจทย์ต้นฉบับ — Assignment #1 · ข้อ 4.2

> Describe the following hexadecimal numbers using the positional numbering system and determine their equivalent decimal values: (2) $BD2_{16}$

แปล: จงอธิบาย $BD2_{16}$ ด้วยระบบเลขประจำหลัก และหาค่าฐานสิบ
โจทย์ซ่อนอะไรไว้: ข้อนี้มี**ตัวอักษรสองตัวติดกัน** (B และ D) ⟹ ต้องแปลงสองครั้ง และ B กับ D อยู่ห่างกันในตาราง (11 กับ 13) ⟹ สลับกันแล้วผิดทันทีครับ

② เตรียมก่อนลงมือ

ใช้วิธี: กางสูตร positional ด้วย $r = 16$ ครับ
ขั้นเตรียม: แปลงตัวอักษรทั้งสองตัวลงกระดาษก่อนเลย ⟹ $B = 11$ และ $D = 13$
น้ำหนัก: 3 หลัก ⟹ $256, 16, 1$

③ กางน้ำหนักทุกหลัก — BD2 ฐานสิบหก (B = 11, D = 13)

B	D	2
16^2	16^1	16^0
2816	208	2

③ ไล่ทีละขั้น → ④ คำตอบ → ⑤ ตรวจ

ขั้น 1 — แปลงตัวอักษรทั้งสองตัว เพราะข้อนี้มีสองตัว ต้องแยกให้ชัดก่อนคูณครับ: $B = 11$ (หลัก 16^2) และ $D = 13$ (หลัก 16^1)

ขั้น 2 — เขียนน้ำหนักจากขวาไปซ้าย: $16^0 = 1, 16^1 = 16, 16^2 = 256$ ✓

ขั้น 3 — คูณทีละหลัก:

$11 \times 256 = 2816$ (คิดง่าย ๆ: $10 \times 256 = 2560$ แล้วบวก 256 อีกหนึ่งชุด)

$13 \times 16 = 208$ (คิดง่าย ๆ: $13 \times 16 = 13 \times 10 + 13 \times 6 = 130 + 78$)

$2 \times 1 = 2$

ขั้น 4 — บวกทุกพจน์: $2816 + 208 + 2 = 3026$

④ คำตอบ: $BD2_{16} = 11 \times 16^2 + 13 \times 16^1 + 2 \times 16^0 = 2816 + 208 + 2 = \mathbf{3026_{10}}$

⑤ ตรวจด้วยวิธีที่สอง — แปลง 3026 กลับเป็นฐานสิบหก:

ตรวจ: 3026 ต้องกลับมาเป็น BD2

```
3026 ÷ 16 = 189   เศษ  2  →  2
 189 ÷ 16 =  11   เศษ 13  →  D
  11 ÷ 16 =   0   เศษ 11  →  B
─────────────────────────────
อ่านล่างขึ้นบน = BD2 ✓ ตรงกับโจทย์
```

"$BD2_{16} = 11 \times 16^2 + 13 \times 16^1 + 2 \times 16^0 = 3026_{10}$."

⑥ กับดักของข้อนี้

สลับค่า B กับ D ครับ ถ้าใช้ $B = 13, D = 11$ จะได้ $13 \times 256 + 11 \times 16 + 2 = 3328 + 176 + 2 =$ **3506**

วิธีกันพลาด: เขียนคู่ค่าไว้ข้างโจทย์ก่อนลงมือทุกครั้งครับ เช่นเขียนว่า "B=11, D=13" ไว้มุมกระดาษ แล้วค่อยแทนค่า

ตรวจแบบเร็ว: ตัวอักษรที่มาก่อนในลำดับ A-B-C-D-E-F ต้องมีค่า**น้อยกว่า**เสมอ $\Longrightarrow$ B ต้องน้อยกว่า D ✓

หัวใจของข้อนี้: เขียนค่าของตัวอักษรทุกตัวลงกระดาษก่อนแทนค่า

ข้อ 4.3 — $70E_{16}$

① โจทย์ต้นฉบับ — Assignment #1 · ข้อ 4.3

> Describe the following hexadecimal numbers using the positional numbering system and determine their equivalent decimal values: (3) $70E_{16}$

แปล: จงอธิบาย $70E_{16}$ ด้วยระบบเลขประจำหลัก และหาค่าฐานสิบ

โจทย์ซ่อนอะไรไว้: ข้อนี้รวม**สองกับดักไว้ในข้อเดียว** — มีทั้ง**หลักศูนย์ตรงกลาง** (เหมือนข้อ 1a) และ**ตัวอักษร E** ที่อยู่หลักขวาสุด ครับ

② เตรียมก่อนลงมือ

ใช้วิธี: กางสูตร positional ด้วย $r = 16$ ครับ

ขั้นเตรียม: $E = 14$

เตือนตัวเอง: หลักกลางเป็น $0 \Longrightarrow$ ยังต้องเขียนพจน์ 0×16^1 ให้ครบ เพราะมันคือตัวยึดตำแหน่งของหลัก 16^2 ครับ

③ กางน้ำหนักทุกหลัก — 70E ฐานสิบหก (E = 14)

7	0	E
16^2	16^1	16^0
1792	0	14

③ ไล่ทีละขั้น → ④ คำตอบ → ⑤ ตรวจ

ขั้น 1 — แปลงตัวอักษร เพราะต้องได้ตัวเลขก่อนคูณครับ: $E = 14$

ขั้น 2 — นับหลักแล้วเขียนน้ำหนัก: มี **3 หลัก** $\Longrightarrow 16^2 = 256, 16^1 = 16, 16^0 = 1$ ✓

ขั้น 3 — คูณทีละหลัก โดย<u>ไม่ข้ามหลักศูนย์</u>:

$7 \times 256 = 1792$ $(7 \times 256 = 7 \times 250 + 7 \times 6 = 1750 + 42)$

$0 \times 16 = 0$ (ต้องเขียนพจน์นี้ด้วย)

$14 \times 1 = 14$

ขั้น 4 — บวกทุกพจน์: $1792 + 0 + 14 = 1806$

④ **คำตอบ:** $70E_{16} = 7 \times 16^2 + 0 \times 16^1 + 14 \times 16^0 = 1792 + 0 + 14 = \mathbf{1806_{10}}$

⑤ ตรวจด้วยวิธีที่สอง — แปลง 1806 กลับเป็นฐานสิบหก:

ตรวจ: 1806 ต้องกลับมาเป็น 70E

```
1806 ÷ 16 = 112   เศษ 14  →  E
 112 ÷ 16 =   7   เศษ  0  →  0
   7 ÷ 16 =   0   เศษ  7  →  7
─────────────────────────────
อ่านล่างขึ้นบน = 70E ✓ ตรงกับโจทย์
```

สังเกตว่ารอบที่สองได้**เศษ 0** แต่**ห้ามหยุด** เพราะผลหารยังเป็น 7 ไม่ใช่ 0 ครับ — ตรงนี้คือกับดักการหยุดผิดจังหวะจากตอนที่ 7 พอดี

"$70E_{16} = 7 \times 16^2 + 0 \times 16^1 + 14 \times 16^0 = 1806_{10}$*."*

⑥ กับดักของข้อนี้

ข้ามหลักศูนย์แล้วเลื่อนน้ำหนักผิด ครับ ถ้าตัดหลักกลางทิ้งเหลือ $7E$ แล้วคิดว่า 7 ยังอยู่ที่ 256 จะได้ $1792 + 14 = 1806$ (บังเอิญถูก) แต่ถ้าเลื่อนน้ำหนักตามจำนวนหลักที่เหลือ จะได้ $7 \times 16 + 14 = \mathbf{126}$

กับดักที่สอง: อ่าน E เป็นค่า 15 (สับสนกับ F) $\Longrightarrow$ ได้ **1807** — ผิดไป 1 ซึ่งเป็นความผิดที่จับได้ยากที่สุด

วิธีกันพลาด: ตรวจด้วยหลักคู่-คี่ครับ — หลักขวาสุดคือ $E = 14$ เป็นเลข**คู่** และพจน์อื่นเป็นพหุคูณของ 16 ซึ่งคู่หมด $\Longrightarrow$ **คำตอบต้องเป็นเลขคู่** 1806 คู่ ✓ · 1807 คี่ ✗ จับได้ทันที

หัวใจของข้อนี้: หลักศูนย์ต้องเขียนพจน์ และ E คือ 14 ไม่ใช่ 15

11 เฉลย Assignment #1 ข้อ 5, 6 และ 7

สามข้อสุดท้ายยากขึ้นตรงไหน

ข้อ 5 — เพิ่ม**จุดทศนิยม** เข้ามา ⟹ ต้องใช้น้ำหนักติดลบจากตอนที่ 6 ครับ และ**โจทย์คละฐานทั้ง 4 ฐานในข้อเดียว** (2, 8, 10, 16) เพื่อทดสอบว่าน้องอ่านตัวห้อยจริงไหม

ข้อ 6 — **กลับทิศทาง** เป็นฐานสิบ → ฐานอื่น ⟹ ต้องใช้หารสั้นและคูณด้วยฐานจากตอนที่ 7 **และสองข้อย่อยใช้คนละวิธี อ่านคำตอบคนละทิศ**

ข้อ 7 — เป็นการแปลงระหว่างฐานที่เป็นกำลังของสอง ⟹ ใช้**จับกลุ่มบิต**จากตอนที่ 8 ทำได้ใน 10 วินาที ถ้าจับกลุ่มถูกจุดครับ

ข้อ 5.1 — 1010.01_2

① โจทย์ต้นฉบับ — Assignment #1 · ข้อ 5.1

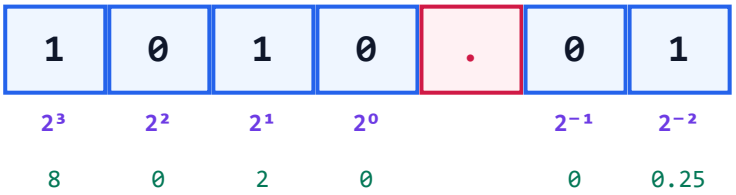
> Describe the following numbers using the positional numbering system and determine their equivalent decimal values: (1) 1010.01_2

แปล: จงอธิบาย 1010.01_2 ด้วยระบบเลขประจำหลัก และหาค่าฐานสิบ
โจทย์ซ่อนอะไรไว้: หลักแรก**หลังจุด**เป็น 0 และหลักที่สองเป็น 1 ⟹ คนมักอ่านผิดเป็น 2^{-1} ทั้งที่บิต 1 ตัวนั้นอยู่ที่ 2^{-2} ครับ ผลคือคำตอบเพี้ยนไปสองเท่า

② เตรียมก่อนลงมือ

ใช้วิธี: กางสูตร positional ด้วย $r = 2$ **แต่ต้องแยกสองฝั่งของจุดก่อน** ครับ เพราะน้ำหนักคนละชุด
สูตรที่ใช้: ฝั่งซ้ายไล่ 2^0 ขึ้นไป · ฝั่งขวาไล่ 2^{-1} ลงมา
ฝั่งซ้าย 1010 (4 บิต) ⟹ น้ำหนัก $8, 4, 2, 1$ · ฝั่งขวา 01 (2 บิต) ⟹ น้ำหนัก $0.5, 0.25$

③ กางน้ำหนักทุกหลัก — 1010.01 ฐานสอง



③ ไล่ทีละขั้น → ④ คำตอบ → ⑤ ตรวจ

ขั้น 1 — ตัดตรงจุดออกเป็นสองฝั่ง เพราะสองฝั่งใช้น้ำหนักคนละชุด ถ้าปนกันจะพังทั้งข้อครับ: ฝั่งซ้าย 1010 · ฝั่งขวา 01

ขั้น 2 — เขียนน้ำหนักไล่ออกจากจุด ทั้งสองทาง เพราะจุดคือศูนย์กลาง ไม่ใช่ขอบ:

ซ้ายมือจุดคือ $2^0 = 1$ แล้วไล่ขึ้น $\Longrightarrow 2^3 = 8, 2^2 = 4, 2^1 = 2, 2^0 = 1$

ขวามือจุดคือ $2^{-1} = 0.5$ แล้วไล่ลง $\Longrightarrow 2^{-1} = 0.5, 2^{-2} = 0.25$

ขั้น 3 — คูณทีละหลักทั้งสองฝั่ง:

ซ้าย: $1 \times 8 = 8 \cdot 0 \times 4 = 0 \cdot 1 \times 2 = 2 \cdot 0 \times 1 = 0$

ขวา: $0 \times 0.5 = 0 \cdot 1 \times 0.25 = 0.25$

ขั้น 4 — บวกรวมสองฝั่ง: $(8 + 0 + 2 + 0) + (0 + 0.25) = 10 + 0.25 = 10.25$

④ **คำตอบ:** $1010.01_2 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} = 8 + 2 + 0.25 = \mathbf{10.25_{10}}$

⑤ ตรวจด้วยวิธีที่สอง — แปลง 10.25 กลับเป็นฐานสองด้วยวิธีของตอนที่ 7:

ตรวจ: 10.25 ต้องกลับมาเป็น 1010.01

```
ส่วนจำนวนเต็ม 10          ส่วนทศนิยม 0.25
10 ÷ 2 = 5  เศษ 0           0.25 × 2 = 0.5  เก็บ 0
 5 ÷ 2 = 2  เศษ 1           0.5  × 2 = 1.0  เก็บ 1  หยุด
 2 ÷ 2 = 1  เศษ 0
 1 ÷ 2 = 0  เศษ 1
─────────────────────────────────────────────────────
ล่างขึ้นบน = 1010        บนลงล่าง = .01   →  1010.01 ✓
```

"$1010.01_2 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} = 10.25_{10}$."

⑥ กับดักของข้อนี้

เริ่มเลขชี้กำลังฝั่งขวาที่ 2^0 ครับ ถ้าพลาดจะได้ $0 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} = 0.5 \Longrightarrow$ คำตอบกลายเป็น **10.5**

วิธีกันพลาด: 2^0 ถูกใช้ไปแล้วที่หลัก**ติดซ้าย**ของจุดครับ ฝั่งขวาจึงต้องเริ่มที่ 2^{-1} เสมอ — **ไม่มีหลักไหนมีน้ำหนัก** r^0 **สองครั้ง**

ตรวจแบบเร็ว: ส่วนทศนิยมฐานสองที่ลงท้ายด้วยบิต 1 ที่ตำแหน่ง 2^{-2} ต้องหารด้วย 0.25 ลงตัว — $0.25 \div 0.25 = 1$ ✓ ส่วน 0.5 ก็ลงตัวเหมือนกัน จึงต้องดูตำแหน่งบิตให้แน่ใจอีกที

หัวใจของข้อนี้: ฝั่งขวาของจุดเริ่มที่ 2^{-1} **เสมอ ไม่มี** 2^0 **ซ้ำ**

ข้อ 5.2 — 74.23_8

① โจทย์ต้นฉบับ — Assignment #1 · ข้อ 5.2

> Describe the following numbers using the positional numbering system and determine their equivalent decimal values: (2) 74.23_8

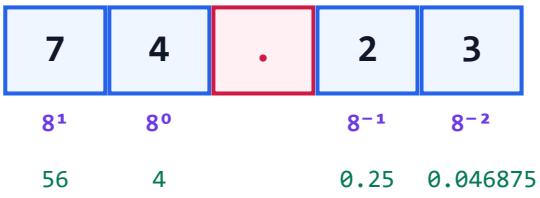
แปล: จงอธิบาย 74.23_8 ด้วยระบบเลขประจำหลัก และหาค่าฐานสิบ
โจทย์ซ่อนอะไรไว้: เป็น**ฐานแปดที่มีจุดทศนิยม** $\Longrightarrow$ น้ำหนักฝั่งขวาคือ $\frac{1}{8}$ และ $\frac{1}{64}$ **ไม่ใช่** $\frac{1}{10}$ **กับ** $\frac{1}{100}$ — คนพลาดตรงนี้มากที่สุดในข้อ 5 ครับ

② เตรียมก่อนลงมือ

ใช้วิธี: กางสูตร positional ด้วย $r = 8$ แยกสองฝั่งของจุดครับ

สูตรที่ใช้: ฝั่งซ้าย $8^1 = 8, 8^0 = 1$ · ฝั่งขวา $8^{-1} = \frac{1}{8} = 0.125, 8^{-2} = \frac{1}{64} = 0.015625$
เทคนิคที่จะใช้: คิดฝั่งขวาเป็น**เศษส่วนที่มีส่วนร่วมเป็น 64** ก่อน แล้วค่อยหารครั้งเดียว จะแม่นกว่าคูณทศนิยมยาว ๆ ครับ

③ กางน้ำหนักทุกหลัก — 74.23 ฐานแปด



③ ไล่ทีละขั้น → ④ คำตอบ → ⑤ ตรวจ

ขั้น 1 — ตัดตรงจุด เพราะน้ำหนักคนละชุดครับ: ฝั่งซ้าย 74 · ฝั่งขวา 23
ตรวจโจทย์ด้วย: ทุกหลัก $(7, 4, 2, 3)$ น้อยกว่า 8 ✓ เป็นเลขฐานแปดที่ถูกต้อง

ขั้น 2 — เขียนน้ำหนักไล่ออกจากจุด:
ซ้าย: 4 อยู่ที่ $8^0 = 1$ · 7 อยู่ที่ $8^1 = 8$
ขวา: 2 อยู่ที่ $8^{-1} = \frac{1}{8}$ · 3 อยู่ที่ $8^{-2} = \frac{1}{64}$

ขั้น 3 — คูณทีละหลัก:
ซ้าย: $7 \times 8 = 56$ · $4 \times 1 = 4 \Longrightarrow$ รวม 60
ขวา: $2 \times \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{16}{64}$ · $3 \times \frac{1}{64} = \frac{3}{64}$

ขั้น 4 — รวมฝั่งขวาเป็นเศษส่วนเดียวก่อนแล้วค่อยหาร เพราะกันการพิมพ์ทศนิยมผิดครับ: $\frac{16}{64} + \frac{3}{64} = \frac{19}{64} = 0.296875$

ขั้น 5 — บวกรวมสองฝั่ง: $60 + 0.296875 = 60.296875$

④ **คำตอบ:** $74.23_8 = 7 \times 8^1 + 4 \times 8^0 + 2 \times 8^{-1} + 3 \times 8^{-2} = 56 + 4 + 0.25 + 0.046875 =$ $\mathbf{60.296875_{10}}$

⑤ ตรวจด้วยวิธีที่สอง — แปลง 60.296875 กลับเป็นฐานแปด:

ตรวจ: 60.296875 ต้องกลับมาเป็น 74.23

```
ส่วนจำนวนเต็ม 60              ส่วนทศนิยม 0.296875
60 ÷ 8 = 7   เศษ 4              0.296875 × 8 = 2.375   เก็บ 2
 7 ÷ 8 = 0   เศษ 7              0.375    × 8 = 3.0     เก็บ 3   หยุด
─────────────────────────────────────────────────────────────────
ล่างขึ้นบน = 74                 บนลงล่าง = .23   →   74.23 ✓
```

"$74.23_8 = 7 \times 8^1 + 4 \times 8^0 + 2 \times 8^{-1} + 3 \times 8^{-2} = 60.296875_{10}$."

⑥ กับดักของข้อนี้

ใช้น้ำหนักฐานสิบกับฝั่งทศนิยม ครับ — เห็น .23 แล้วอ่านเป็น "จุดสองสาม" $\Longrightarrow$ ได้ $60 + 0.23 =$ **60.23** ซึ่งผิด

กับดักที่สอง: อ่าน 23_8 ทั้งก้อนเป็น 19 แล้วหารด้วย **8** (แทนที่จะเป็น $8^2 = 64$) $\Longrightarrow$ ได้ $60 + 2.375 =$ **62.375**

วิธีกันพลาด: จำว่า**ตัวหารคือฐานยกกำลังจำนวนหลักหลังจุด**ครับ — 2 หลักหลังจุดในฐาน 8 $\Longrightarrow$ หารด้วย $8^2 = 64$

ตรวจแบบเร็ว: ส่วนทศนิยมของทุกฐานต้องน้อยกว่า 1 เสมอ $\Longrightarrow 0.296875 < 1$ ✓

หัวใจของข้อนี้: จุดทศนิยมของฐาน 8 ซอยเป็น $\frac{1}{8}$ กับ $\frac{1}{64}$ ไม่ใช่ $\frac{1}{10}$

ข้อ 5.3 — 910.85_{10}

① โจทย์ต้นฉบับ — Assignment #1 · ข้อ 5.3

> Describe the following numbers using the positional numbering system and determine their equivalent decimal values: (3) 910.85_{10}

แปล: จงอธิบาย 910.85_{10} ด้วยระบบเลขประจำหลัก และหาค่าฐานสิบ

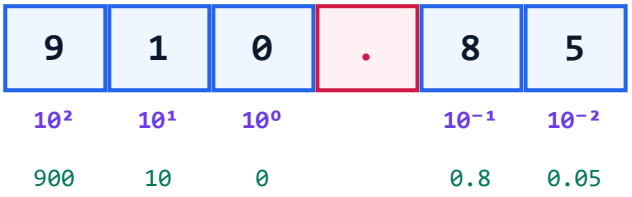
โจทย์ซ่อนอะไรไว้: ข้อนี้**เป็นฐานสิบอยู่แล้ว** $\Longrightarrow$ คำตอบค่าฐานสิบคือตัวมันเอง กับดักคือ**คนคิดว่าโจทย์พิมพ์ผิดแล้วข้ามไป** — แต่จริง ๆ อาจารย์ใส่มาเพื่อให้เห็นว่า **ฐานสิบที่ใช้ทุกวันก็อยู่ในระบบเดียวกันเป๊ะ** รวมทั้งฝั่งทศนิยมด้วยครับ

② เตรียมก่อนลงมือ

ใช้วิธี: กางสูตร positional ด้วย $r = 10$ แยกสองฝั่งของจุดครับ

สูตรที่ใช้: ฝั่งซ้าย $10^2, 10^1, 10^0$ · ฝั่งขวา $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0.1$ และ $10^{-2} = \frac{1}{100} = 0.01$
ชื่อที่เราเรียกกันมาตลอดคือ “ทศนิยมตำแหน่งที่หนึ่ง/สอง” ก็คือ 10^{-1} กับ 10^{-2} นี่เองครับ

③ กางน้ำหนักทุกหลัก — 910.85 ฐานสิบ



③ ไล่ทีละขั้น → ④ คำตอบ → ⑤ ตรวจ

ขั้น 1 — ตัดตรงจุด: ฝั่งซ้าย 910 (3 หลัก) · ฝั่งขวา 85 (2 หลัก)

ขั้น 2 — เขียนน้ำหนักไล่ออกจากจุด เพราะกฎเดียวกับทุกฐานครับ:
ซ้าย: 0 อยู่ที่ $10^0 = 1 \cdot 1$ อยู่ที่ $10^1 = 10 \cdot 9$ อยู่ที่ $10^2 = 100$
ขวา: 8 อยู่ที่ $10^{-1} = 0.1 \cdot 5$ อยู่ที่ $10^{-2} = 0.01$

ขั้น 3 — คูณทีละหลัก โดยไม่ข้ามหลักศูนย์:
$9 \times 100 = 900 \cdot 1 \times 10 = 10 \cdot 0 \times 1 = 0 \cdot 8 \times 0.1 = 0.8 \cdot 5 \times 0.01 = 0.05$

ขั้น 4 — บวกทุกพจน์: $900 + 10 + 0 + 0.8 + 0.05 = 910.85$

④ **คำตอบ:** $910.85_{10} = 9 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 0 \times 10^0 + 8 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2} = \mathbf{910.85_{10}}$

⑤ **ตรวจด้วยวิธีที่สอง — เขียนฝั่งทศนิยมเป็นเศษส่วนแล้วรวมใหม่:** $\frac{8}{10} + \frac{5}{100} = \frac{80}{100} + \frac{5}{100} = \frac{85}{100} = 0.85$ ✓
รวมกับส่วนจำนวนเต็ม $910 \Longrightarrow 910.85$ **ตรงกับเลขเดิมเป๊ะ** ✓
(ตรวจซ้ำอีกชั้น: จำนวนพจน์ที่เขียนได้ = 5 พจน์ = จำนวนหลักทั้งหมด (3 + 2) พอดี ✓)
“$910.85_{10} = 9 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 0 \times 10^0 + 8 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2} = 910.85$.”

⑥ กับดักของข้อนี้

ตอบสั้นว่า “$= 910.85$ อยู่แล้ว” โดยไม่กางพจน์ครับ — ได้ 0 คะแนน เพราะคำสั่งคือ describe using the positional numbering system

กับดักที่สอง: ลืมพจน์ $0 \times 10^0 \Longrightarrow$ เขียนได้แค่ 4 พจน์ ซึ่งไม่ครบตามจำนวนหลักที่โจทย์ให้มา

วิธีกันพลาด: นับพจน์ที่เขียนเสร็จ ต้องเท่ากับจำนวนหลักทั้งซ้ายและขวาของจุดรวมกันครับ ข้อนี้ $3 + 2 = 5$ พจน์

หัวใจของข้อนี้: ฐานสิบที่ใช้ทุกวันก็คือ positional system เดียวกัน ไม่ใช่ข้อยกเว้น

ข้อ 5.4 — $C7.A1_{16}$

① โจทย์ต้นฉบับ — Assignment #1 · ข้อ 5.4

> Describe the following numbers using the positional numbering system and determine their equivalent decimal values: (4) $C7.A1_{16}$

แปล: จงอธิบาย $C7.A1_{16}$ ด้วยระบบเลขประจำหลัก และหาค่าฐานสิบ

โจทย์ซ่อนอะไรไว้: ข้อนี้ยากที่สุดในข้อ 5 ครับ เพราะรวมทุกอย่างไว้ — **มีตัวอักษรทั้งสองฝั่งของจุด** (C ฝั่งซ้าย, A ฝั่งขวา) และ**น้ำหนักฝั่งขวาคือ** $\frac{1}{16}$ **กับ** $\frac{1}{256}$

② เตรียมก่อนลงมือ

ใช้วิธี: กางสูตร positional ด้วย $r = 16$ แยกสองฝั่งของจุดครับ

ขั้นเตรียม: แปลงตัวอักษรทั้งหมดก่อน $\Longrightarrow C = 12$ และ $A = 10$

น้ำหนัก: ซ้าย $16^1 = 16, 16^0 = 1$ · ขวา $16^{-1} = \frac{1}{16} = 0.0625, 16^{-2} = \frac{1}{256} = 0.00390625$

③ กางน้ำหนักทุกหลัก — C7.A1 ฐานสิบหก (C = 12, A = 10)

C	7	.	A	1
16^1	16^0		16^{-1}	16^{-2}
192	7		0.625	0.00390625

③ ไล่ทีละขั้น → ④ คำตอบ → ⑤ ตรวจ

ขั้น 1 — แปลงตัวอักษรทั้งสองตัวก่อน เพราะคูณตัวอักษรไม่ได้ครับ: $C = 12$ (อยู่หลัก 16^1) และ $A = 10$ (อยู่หลัก 16^{-1})

ขั้น 2 — ตัดตรงจุดแล้วเขียนน้ำหนักไล่ออกจากจุด:

ซ้าย: 7 อยู่ที่ $16^0 = 1 \cdot C$ อยู่ที่ $16^1 = 16$

ขวา: A อยู่ที่ $16^{-1} = \frac{1}{16} \cdot 1$ อยู่ที่ $16^{-2} = \frac{1}{256}$

ขั้น 3 — คูณฝั่งซ้าย: $12 \times 16 = 192 \cdot 7 \times 1 = 7 \Longrightarrow$ รวม 199

ขั้น 4 — คูณฝั่งขวา โดยรวมเป็นเศษส่วนส่วนร่วม 256 ก่อน เพราะกันพิมพ์ทศนิยมผิดครับ:

$10 \times \frac{1}{16} = \frac{10}{16} = \frac{160}{256} \cdot 1 \times \frac{1}{256} = \frac{1}{256}$

$\frac{160}{256} + \frac{1}{256} = \frac{161}{256} = 0.62890625$

ขั้น 5 — บวกรวมสองฝั่ง: $199 + 0.62890625 = 199.62890625$

④ **คำตอบ:** $C7.A1_{16} = 12 \times 16^1 + 7 \times 16^0 + 10 \times 16^{-1} + 1 \times 16^{-2} = 192 + 7 + 0.625 + 0.00390625 = \mathbf{199.62890625_{10}}$

⑤ ตรวจด้วยวิธีที่สอง — แปลง 199.62890625 กลับเป็นฐานสิบหก:

ตรวจ: 199.62890625 ต้องกลับมาเป็น C7.A1

```
ส่วนจำนวนเต็ม 199          ส่วนทศนิยม 0.62890625
199 ÷ 16 = 12  เศษ  7        0.62890625 × 16 = 10.0625  เก็บ 10 = A
 12 ÷ 16 =  0  เศษ 12        0.0625     × 16 =  1.0     เก็บ 1   หยุด
               → C
─────────────────────────────────────────────────────────────────
ล่างขึ้นบน = C7            บนลงล่าง = .A1   →  C7.A1 ✓
```

"$C7.A1_{16} = 12 \times 16^1 + 7 \times 16^0 + 10 \times 16^{-1} + 1 \times 16^{-2} = 199.62890625_{10}$*."*

⑥ กับดักของข้อนี้

ลืมว่าตัวอักษรฝั่งขวาของจุดก็ต้องแปลงเหมือนกัน ครับ คนมักแปลง C ตัวเดียวแล้วอ่าน A ผิดเป็น 1 $\Longrightarrow$ ได้ $199 + \frac{1}{16} + \frac{1}{256}$ = **199.06640625**

กับดักที่สอง: ใช้น้ำหนัก $\frac{1}{10}$ กับ $\frac{1}{100}$ ฝั่งขวา $\Longrightarrow$ ได้ $199 + 1.01 =$ **200.01** ซึ่ง**เกิน 200** ทั้งที่ส่วนทศนิยมต้องน้อยกว่า 1 — ผิดชัดเจน

วิธีกันพลาด: ตรวจ 2 ชั้นครับ — ① ส่วนทศนิยมต้อง**น้อยกว่า 1** เสมอ ($0.62890625 < 1$ ✓) ② ส่วนจำนวนเต็ม $C7_{16}$ ต้องน้อยกว่า $16^2 = 256$ ($199 < 256$ ✓)

หัวใจของข้อนี้: ตัวอักษรฝั่งขวาของจุดก็คือตัวเลข ต้องแปลงก่อนคูณเหมือนกัน

ข้อ 6 (a) — $6781_{10} \Rightarrow$ base 8

① โจทย์ต้นฉบับ — Assignment #1 · ข้อ 6a

> Convert the following decimal numbers to the specified base: (a) $6781_{10} \Rightarrow$ base 8

แปล: จงแปลง 6781_{10} ไปเป็นฐาน 8
โจทย์ซ่อนอะไรไว้: ทิศทางกลับกับข้อ 1–5 ทั้งหมด ครับ — คราวนี้เริ่มจากฐานสิบ $\Rightarrow$ **ห้ามใช้การคูณน้ำหนักแล้วบวก ต้องใช้หารสั้น** และต้องอ่านคำตอบ**จากล่างขึ้นบน**

② เตรียมก่อนลงมือ

ใช้วิธี: repeated divide-by-8 ครับ เพราะ 6781 เป็น**จำนวนเต็ม** และทิศทางคือ ฐานสิบ → ฐานอื่น

กฎ 3 ข้อจากสไลด์: ① หารด้วยฐาน ② เก็บเศษ (เศษตัวแรกคือหลักขวาสุด) ③ ทำซ้ำจนกว่า**ผลหาร**จะเป็นศูนย์

คาดคะเนคำตอบก่อน: $8^4 = 4096$ และ $8^5 = 32768 \Rightarrow 4096 \le 6781 < 32768 \Rightarrow$ คำตอบต้องมี **5 หลัก** ครับ (เอาไว้ตรวจตอนท้าย)

③ Repeated Divide-by-8 : $6781_{10} \Rightarrow$ base 8

6781 ÷ 8 = 847	เศษ	5	หลักขวาสุด
847 ÷ 8 = 105	เศษ	7	
105 ÷ 8 = 13	เศษ	1	
13 ÷ 8 = 1	เศษ	5	
1 ÷ 8 = 0	เศษ	1	หลักซ้ายสุด

อ่านล่างขึ้นบน

④ คำตอบ

$$15175_8$$

5 หลัก — ตรงกับที่คาดไว้ในขั้นเตรียม ✓

สังเกตว่า**เศษทุกตัวน้อยกว่า 8 เสมอ** — ถ้าได้เศษ 8 ขึ้นไปเมื่อไหร่ แปลว่าหารผิดครับ

③ ไล่ทีละขั้น → ④ คำตอบ → ⑤ ตรวจ

ขั้น 1 — $6781 \div 8$: $8 \times 847 = 6776$ เหลือ $6781 - 6776 = 5 \Rightarrow$ ผลหาร 847 **เศษ 5** (นี่คือหลักขวาสุด เพราะเป็นเศษตัวแรก)

ขั้น 2 — $847 \div 8$: $8 \times 105 = 840$ เหลือ $7 \Rightarrow$ ผลหาร 105 **เศษ 7**

ขั้น 3 — $105 \div 8$: $8 \times 13 = 104$ เหลือ $1 \Rightarrow$ ผลหาร 13 **เศษ 1**

ขั้น 4 — $13 \div 8$: $8 \times 1 = 8$ เหลือ $5 \Rightarrow$ ผลหาร 1 **เศษ 5**

ขั้น 5 — $1 \div 8$: $8 \times 0 = 0$ เหลือ $1 \Rightarrow$ ผลหาร **0 เศษ 1 ⇒ ผลหารเป็นศูนย์แล้ว หยุดได้**

ขั้น 6 — อ่านเศษจากล่างขึ้นบน เพราะเศษตัวแรกคือหลักขวาสุดครับ: $1, 5, 1, 7, 5$

④ คำตอบ: $6781_{10} = \mathbf{15175_8}$

⑤ ตรวจด้วยวิธีที่สอง — กางน้ำหนักกลับเป็นฐานสิบ (วิธีของข้อ 3):

ตรวจ: 15175 ฐานแปด ต้องได้ 6781

1	5	1	7	5
8^4	8^3	8^2	8^1	8^0
4096	2560	64	56	5

$4096 + 2560 + 64 + 56 + 5 = 6781$ ✓ **ตรงกับโจทย์เป๊ะ**

"$6781_{10} = 15175_8$*, since* $1 \times 8^4 + 5 \times 8^3 + 1 \times 8^2 + 7 \times 8^1 + 5 \times 8^0 = 6781$*."*

⑥ กับดักของข้อนี้

อ่านเศษจากบนลงล่าง ครับ ถ้าพลาดจะได้ **57151_8** ซึ่งเท่ากับ $5(4096) + 7(512) + 1(64) + 5(8) + 1 = 24645$ — ผิดไปไกลมาก

กับดักที่สอง: หยุดตอนเห็นเศษเล็ก ๆ เช่นหยุดที่ขั้น 4 $\Longrightarrow$ ได้ $5175_8 = 2685$ ซึ่งผิด **ต้องหารจนผลหารเป็น 0 เท่านั้น**

วิธีกันพลาด 2 ชั้น: ① คาดคะเนจำนวนหลักไว้ก่อน ($8^4 \le 6781 < 8^5 \Longrightarrow$ 5 หลัก) แล้วเช็คว่าคำตอบมี 5 หลักจริงไหม ② เศษทุกตัวต้องน้อยกว่าฐาน — ที่นี่ทุกตัวน้อยกว่า 8 ✓

หัวใจของข้อนี้: หารจนผลหารเป็นศูนย์ แล้วอ่านเศษจากล่างขึ้นบน

ข้อ 6 (b) — $0.2890625_{10} \Rightarrow$ base 16

① โจทย์ต้นฉบับ — Assignment #1 · ข้อ 6b

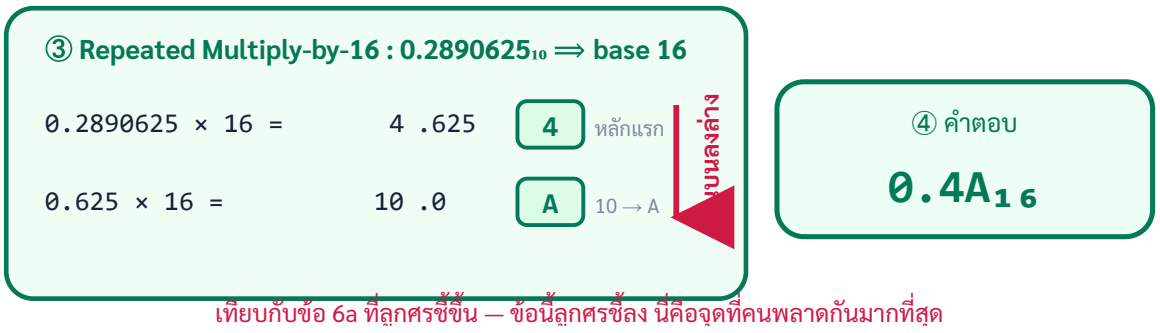
> Convert the following decimal numbers to the specified base: (b) $0.2890625_{10} \Rightarrow$ base 16

แปล: จงแปลง 0.2890625_{10} ไปเป็นฐาน 16
โจทย์ซ่อนอะไรไว้: เป็น**ส่วนทศนิยมล้วน ไม่มีส่วนจำนวนเต็ม** $\Longrightarrow$ ต้องใช้ **คูณ** ไม่ใช่หาร และต้องอ่านคำตอบ**จากบนลงล่าง** ซึ่ง**ทิศตรงข้ามกับข้อ 6a ที่เพิ่งทำไป** — นี่คือกับดักที่วางไว้ครับ

② เตรียมก่อนลงมือ

ใช้วิธี: `repeated multiply-by-16` ครับ เพราะเป็นเศษส่วน $\Longrightarrow$ หารสั้นใช้ไม่ได้เลย

กฎ 3 ข้อจากสไลด์: ① คูณเศษส่วนด้วยฐาน ② เก็บ**ตัวหน้าจุด** (ตัวแรกเขียนติดขวาของจุดทันที) ③ ทำซ้ำกับส่วนทศนิยมที่เหลือจนกว่ามันจะเป็นศูนย์
เตือนไว้ก่อน: ถ้าตัวหน้าจุดออกมาเกิน 9 ต้องแปลงเป็นตัวอักษร A–F ครับ



เทียบกับข้อ 6a ที่ลูกศรชี้ขึ้น — ข้อนี้ลูกศรชี้ลง นี่คือจุดที่คนพลาดกันมากที่สุด

③ ไล่ทีละขั้น → ④ คำตอบ → ⑤ ตรวจ

ขั้น 1 — คูณรอบแรก: $0.2890625 \times 16 = 4.625$
$\Longrightarrow$ เก็บตัวหน้าจุดคือ **4** (เขียนติดขวาของจุดทันที) · เหลือส่วนทศนิยม 0.625 ไปทำต่อ

ขั้น 2 — คูณรอบสอง โดยใช้**เฉพาะส่วนทศนิยมที่เหลือ** (ห้ามเอา 4 ติดไปด้วย): $0.625 \times 16 = 10.0$
$\Longrightarrow$ เก็บตัวหน้าจุดคือ **10** · เหลือส่วนทศนิยม 0

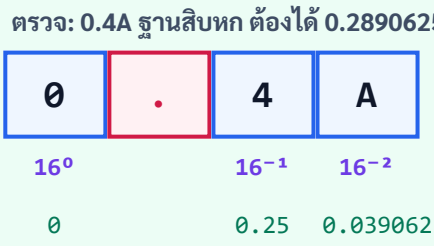
ขั้น 3 — แปลง 10 เป็นสัญลักษณ์ฐานสิบหก เพราะฐาน 16 ไม่มีสัญลักษณ์ที่เขียนว่า “10” ครับ $\Longrightarrow 10 = A$

ขั้น 4 — ตรวจเงื่อนไขหยุด: ส่วนทศนิยมเหลือ 0 พอดี $\Longrightarrow$ **หยุดได้** (ถ้าไม่เป็นศูนย์ต้องคูณต่อ หรือปัดตามจำนวนหลักที่โจทย์กำหนด)

ขั้น 5 — อ่านตัวหน้าจุดจากบนลงล่าง เพราะตัวแรกที่ได้คือหลักที่ติดจุดที่สุดครับ: 4 แล้ว A

④ คำตอบ: $0.2890625_{10} = \mathbf{0.4A_{16}}$

⑤ ตรวจด้วยวิธีที่สอง — กางน้ำหนักติดลบกลับเป็นฐานสิบ (วิธีของข้อ 5):



$4 \times \frac{1}{16} + 10 \times \frac{1}{256} = \frac{64}{256} + \frac{10}{256} = \frac{74}{256} = 0.2890625$ ✓ **ตรงกับโจทย์เป๊ะ**
“$0.2890625 \times 16 = 4.625$ *(digit 4) and* $0.625 \times 16 = 10.0$ *(digit A), so* $0.2890625_{10} = 0.4A_{16}$*.”*

⑥ กับดักของข้อนี้

อ่านคำตอบจากล่างขึ้นบนเพราะเพิ่งทำข้อ 6a มา ครับ ⟹ ได้ $0.A4_{16}$ ซึ่งเท่ากับ $\frac{160}{256} + \frac{4}{256} = 0.640625$ — ผิด

กับดักที่สอง: เขียนตัวหน้าจุดรอบที่สองเป็น “10” ตรง ๆ ⟹ ได้ 0.410_{16} ซึ่งอ่านได้ว่ามี 3 หลัก (4, 1, 0) ผิดความหมายไปเลย **ต้องเขียน A**

กับดักที่สาม: เอา 4.625 ทั้งก้อนไปคูณต่อ ⟹ ตัวเลขบานปลายทันที **ต้องเอาเฉพาะส่วนทศนิยม** 0.625 **ไปคูณ** ครับ

วิธีกันพลาด: เขียนคำว่า “ลง” ไว้ข้างบันไดคูณทุกครั้ง และ**ตรวจกลับด้วยการกางน้ำหนักเสมอ** — ผิดทิศเมื่อไหร่ตัวเลขจะไม่ตรงทันทีครับ

หัวใจของข้อนี้: ฝั่งทศนิยมใช้คูณ และอ่านลง — ทิศตรงข้ามกับข้อ 6a

ข้อ 7 (a) — $1000010111110110_2 \Rightarrow$ base 16

① โจทย์ต้นฉบับ — Assignment #1 · ข้อ 7a

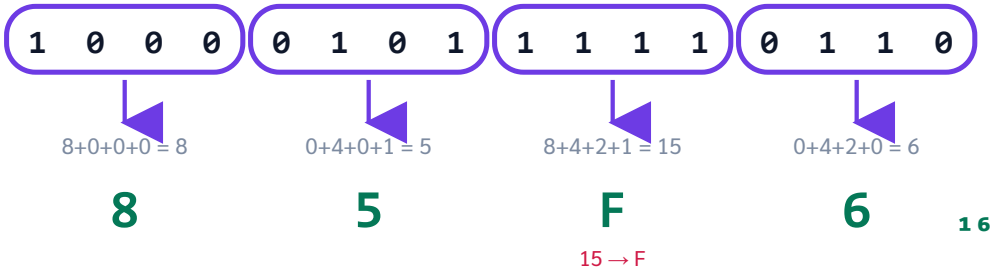
> Convert the following numbers to the specified base: (a) $1000010111110110_2 \Rightarrow$ base 16

แปล: จงแปลง 1000010111110110_2 ไปเป็นฐาน 16
โจทย์ซ่อนอะไรไว้: ทั้งสองฐานเป็น**กำลังของสอง** ($2 = 2^1$ และ $16 = 2^4$) ⟹ **ห้ามผ่านฐานสิบ** ให้จับกลุ่ม 4 บิตเลย ถ้าเดินผ่านฐานสิบจะเสียเวลาและพลาดง่ายมากครับ

② เตรียมก่อนลงมือ

ใช้วิธี: จับกลุ่ม 4 บิต ครับ เพราะ $2^4 = 16$ ⟹ 4 บิต = 1 หลักฐานสิบหกพอดี
จับกลุ่มจากไหน: โจทย์ไม่มีจุดทศนิยม ⟹ ถือว่าจุดอยู่**ขวาสุด** ⟹ จับกลุ่ม**จากขวาไปซ้าย**
นับบิตก่อน: 1000010111110110 มี **16 บิต** ⟹ $16 \div 4 = 4$ ลงตัว ⟹ ได้ 4 กลุ่มพอดี **ไม่ต้องเติมศูนย์** และคำตอบต้องมี 4 หลัก

③ จับกลุ่มละ 4 บิต จากขวาไปซ้าย (16 บิต ⟹ 4 กลุ่มพอดี)



น้ำหนักในกลุ่ม 4 บิตคือ **8-4-2-1** เสมอ — ใช้ชุดเดิมทุกกลุ่ม ไม่ต้องนับตำแหน่งใหม่ครับ

③ ไล่ทีละขั้น → ④ คำตอบ → ⑤ ตรวจ

ขั้น 1 — เลือกขนาดกลุ่มจากฐานปลายทาง เพราะฐาน 16 คู่กับ 4 บิตครับ ⟹ จับกลุ่มละ **4**

ขั้น 2 — จับกลุ่มจากขวาไปซ้าย เพราะจุดทศนิยมอยู่ขวาสุด (ถึงจะไม่ได้เขียนไว้): $\underbrace{1000}\ \underbrace{0101}\ \underbrace{1111}\ \underbrace{0110}$ — ครบ 4 กลุ่ม ไม่ต้องเติมศูนย์

ขั้น 3 — แปลงแต่ละกลุ่มด้วยน้ำหนัก 8-4-2-1 เพราะทุกกลุ่มใช้น้ำหนักชุดเดียวกัน:

$1000 = 8+0+0+0 = 8 \Rightarrow \mathbf{8}$

$0101 = 0+4+0+1 = 5 \Rightarrow \mathbf{5}$

$1111 = 8+4+2+1 = 15 \Rightarrow \mathbf{F}$ (เกิน 9 ⟹ ต้องแปลงเป็นตัวอักษร)

$0110 = 0+4+2+0 = 6 \Rightarrow \mathbf{6}$

ขั้น 4 — เรียงต่อกันตามลำดับเดิม เพราะกลุ่มซ้ายสุดยังเป็นหลักซ้ายสุดอยู่ ⟹ $8, 5, F, 6$

④ **คำตอบ:** $1000010111110110_2 = \mathbf{85F6_{16}}$

⑤ ตรวจด้วยวิธีที่สอง — แตกกลับเป็นบิต แล้วเทียบค่าฐานสิบ:

ตรวจขั้นที่ 1 — แตกกลับทีละหลัก ต้องได้บิตชุดเดิม

```
  8     5     F     6
1000  0101  1111  0110   →  1000010111110110 ✓
```

ตรวจขั้นที่ 2 — เทียบค่าฐานสิบทั้งสองฝั่ง:

$85F6_{16} = 8(4096) + 5(256) + 15(16) + 6 = 32768 + 1280 + 240 + 6 = 34294$

$1000010111110110_2 = 32768 + 1024 + 256 + 128 + 64 + 32 + 16 + 4 + 2 = 34294$ ✓ เท่ากันพอดี

“Grouping in fours from the right: 1000 0101 1111 0110 = 8 5 F 6, so the answer is $85F6_{16}$.”

⑥ กับดักของข้อนี้

จับกลุ่มจากซ้ายไปขวา ครับ ในข้อนี้บังเอิญ 16 บิตหารด้วย 4 ลงตัว ⟹ จับจากซ้ายก็ได้ผลเหมือนกัน **แต่นั่นคือความบังเอิญ** — ถ้าโจทย์ให้ 14 บิตหรือ 15 บิตมา การจับจากซ้ายจะผิดทันที **ให้ติดนิสัยจับจากขวาเสมอครับ**

กับดักที่สอง: ลืมแปลง $1111 = 15$ เป็น **F** ⟹ เขียนเป็น 85156_{16} ซึ่งกลายเป็นเลข 5 หลัก ผิดตั้งแต่จำนวนหลักแล้ว

วิธีกันพลาด: นับหลักคำตอบเทียบกับจำนวนกลุ่มครับ — 4 กลุ่ม ⟹ ต้องได้ 4 หลักเป๊ะ ถ้าได้ 5 หลักแปลว่ามีกลุ่มไหนที่ลืมแปลงเป็นตัวอักษร

หัวใจของข้อนี้: จับกลุ่ม 4 บิตจากขวา และจำนวนกลุ่มต้องเท่ากับจำนวนหลักของคำตอบ

ข้อ 7 (b) — $D5C9_{16} \Rightarrow$ base 2

① โจทย์ต้นฉบับ — Assignment #1 · ข้อ 7b

> Convert the following numbers to the specified base: (b) $D5C9_{16} \Rightarrow$ base 2

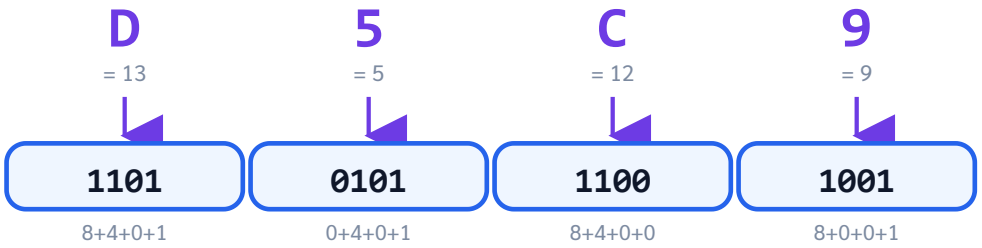
แปล: จงแปลง $D5C9_{16}$ ไปเป็นฐาน 2
โจทย์ซ่อนอะไรไว้: เป็นการ**ย้อนทางของข้อ 7a** $\Rightarrow$ แตกทีละหลักเป็น 4 บิต กับดักคือ**เขียนบิตไม่ครบ 4 ตัวในหลักที่มีค่าน้อย** เช่นเขียน $9 = 1001$ ถูก แต่ถ้าเจอ 2 แล้วเขียนแค่ 10 บิตทั้งชุดจะเลื่อนตำแหน่งพังหมดครับ

② เตรียมก่อนลงมือ

ใช้วิธี: แตกทีละหลักเป็น 4 บิต ครับ เพราะ $16 = 2^4$

ขั้นเตรียม: แปลงตัวอักษรก่อน $\Rightarrow D = 13$ และ $C = 12$
คาดคะเนคำตอบก่อน: 4 หลักฐานสิบหก × 4 บิต $\Rightarrow$ ได้ **16 บิต** และหลักซ้ายสุดคือ $D = 13 \geq 8 \Rightarrow$ บิตซ้ายสุดต้องเป็น 1 (ไม่มี leading zero ให้ตัด)

③ แตกทีละหลัก หลักละ 4 บิตเต็ม



ทุกหลักต้องได้ **4 บิตเต็ม** ห้ามย่อ — ยกเว้นบิตซ้ายสุดของทั้งเลขที่ตัด leading zero ได้ครับ

③ ไล่ทีละขั้น → ④ คำตอบ → ⑤ ตรวจ

ขั้น 1 — แปลงตัวอักษรเป็นค่าฐานสิบก่อน เพราะต้องรู้ค่าถึงจะเขียนบิตได้ครับ: $D = 13 \cdot 5 \cdot C = 12 \cdot 9$

ขั้น 2 — แตกทีละหลักเป็น 4 บิต ด้วยน้ำหนัก 8-4-2-1 (ถามทีละตัวว่า “เอา 8 ไหม เอา 4 ไหม เอา 2 ไหม เอา 1 ไหม”):

$D = 13$: เอา 8 (เหลือ 5) · เอา 4 (เหลือ 1) · ไม่เอา 2 · เอา 1 $\Rightarrow \mathbf{1101}$

5: ไม่เอา 8 · เอา 4 (เหลือ 1) · ไม่เอา 2 · เอา 1 $\Rightarrow \mathbf{0101}$

$C = 12$: เอา 8 (เหลือ 4) · เอา 4 (เหลือ 0) · ไม่เอา · ไม่เอา $\Rightarrow \mathbf{1100}$

9: เอา 8 (เหลือ 1) · ไม่เอา 4 · ไม่เอา 2 · เอา 1 $\Rightarrow \mathbf{1001}$

ขั้น 3 — ต่อกันตามลำดับเดิม เพราะลำดับหลักไม่เปลี่ยน: 1101 0101 1100 1001

ขั้น 4 — ตรวจ leading zero: บิตซ้ายสุดเป็น 1 อยู่แล้ว $\Rightarrow$ ไม่มีอะไรให้ตัดครับ

④ คำตอบ: $D5C9_{16} = \mathbf{1101010111001001_2}$ (16 บิต)

⑤ ตรวจด้วยวิธีที่สอง — จับกลุ่ม 4 บิตกลับ แล้วเทียบค่าฐานสิบ:

ตรวจชั้นที่ 1 — จับกลุ่ม 4 บิตกลับ ต้องได้ D5C9

```
1101  0101  1100  1001
  D     5     C     9   →  D5C9 ✓
```

ตรวจชั้นที่ 2 — เทียบค่าฐานสิบ:

$D5C9_{16} = 13(4096) + 5(256) + 12(16) + 9 = 53248 + 1280 + 192 + 9 = 54729$

$1101010111001001_2 = 32768 + 16384 + 4096 + 1024 + 256 + 128 + 64 + 8 + 1 = 54729$ ✓ เท่ากันพอดี

"Each hex digit expands to four bits: $D = 1101$, $5 = 0101$, $C = 1100$, $9 = 1001$, so $D5C9_{16} = 1101010111001001_2$."

⑥ กับดักของข้อนี้

เขียนบิตไม่ครบ 4 ตัว ครับ ถ้าเขียน $5 = 101$ (3 บิต) แทน 0101 จะได้ $1101\,101\,1100\,1001$ ซึ่งมีแค่ 15 บิต $\Longrightarrow$ ทุกบิตทางซ้ายเลื่อนตำแหน่งผิดหมด ค่าที่ได้กลายเป็น **27625** แทนที่จะเป็น 54729

กับดักที่สอง: สลับ C กับ D $\Longrightarrow$ ได้ $1100\,0101\,1101\,1001$ ซึ่งผิด

วิธีกันพลาด: นับบิตทั้งหมดก่อนส่ง ครับ — n หลักฐานสิบหก $\Longrightarrow$ ต้องได้ $4n$ บิตพอดี (ข้อนี้ 4 หลัก $\Longrightarrow$ 16 บิต)

ถ้านับได้ไม่ครบ แปลว่ามีหลักไหนเขียนบิตขาดแน่นอน

หัวใจของข้อนี้: ทุกหลักฐานสิบหกต้องกลายเป็น 4 บิตเต็ม นับบิตรวมให้ครบ $4n$ ก่อนส่ง

สรุปเช็คลิสต์ Assignment #1 ข้อ 1–7

ข้อ	โจทย์ให้อะไร	ต้องใช้วิธีไหน	คำตอบ
1a–c	เลขฐานสิบ	กางพจน์ (ไม่ต้องแปลง)	$10724 \cdot 1638 \cdot 297$
2a–c	เลขฐานสอง	คูณน้ำหนักแล้วบวก	$\mathbf{29 \cdot 18 \cdot 9}$
3.1–3.3	เลขฐานแปด	คูณน้ำหนัก $64, 8, 1$	$\mathbf{153 \cdot 52 \cdot 111}$
4.1–4.3	เลขฐานสิบหก	แปลงตัวอักษร → คูณน้ำหนัก	$\mathbf{3224 \cdot 3026 \cdot 1806}$
5.1–5.4	เลขมีจุด 4 ฐาน	แยกสองฝั่งจุด + น้ำหนักติดลบ	$\mathbf{10.25 \cdot 60.296875 \cdot 910.85 \cdot 199.62890625}$
6a	ฐานสิบ → ฐาน 8	หารสั้น · อ่านขึ้น	$\mathbf{15175_8}$
6b	ฐานสิบ → ฐาน 16 (ทศนิยม)	คูณด้วยฐาน · อ่านลง	$\mathbf{0.4A_{16}}$
7a	ฐาน 2 → ฐาน 16	จับกลุ่ม 4 บิต	$\mathbf{85F6_{16}}$
7b	ฐาน 16 → ฐาน 2	แตกหลักละ 4 บิต	$\mathbf{1101010111001001_2}$

ทั้ง 20 ข้อย่อยพี่ตรวจซ้ำด้วยการ**แปลงกลับเป็นฐานสิบ**ทุกข้อแล้วครับ น้องก็ควรทำแบบเดียวกันในห้องสอบ เพราะมันคือการตรวจที่ไม่ต้องใช้ความรู้ใหม่เลย

12 กับดักรวม · สรุปหน้าเดียว · เช็คลิสต์ก่อนสอบ

กับดักรวมของทั้ง EP — 12 ตัวที่ทำคนตกมากที่สุด

พี่รวมกับดักทุกตัวที่เจอในชีทนี้ไว้ที่เดียวครับ ก่อนเข้าห้องสอบให้อ่านตารางนี้รอบเดียว แล้วน้องจะกันคะแนนหลุดมือได้เกือบทั้งหมด

#	กับดัก	คำตอบผิดที่จะได้	วิธีกัน
1	เลขชี้กำลังเริ่มที่ 1 แทนที่จะเป็น 0	$1638 \rightarrow 16380$ (ผิด 10 เท่า)	หลักขวาสุดของส่วนจำนวนเต็มคือ r^0 เสมอ
2	ข้ามหลักที่เป็นศูนย์ ไม่เขียนพจน์	$10724 \rightarrow 1724$	นับพจน์ที่เขียนได้ ต้องเท่ากับจำนวนหลัก
3	ตอบสั้นโดยไม่กางพจน์	ได้ 0 คะแนนทั้งที่เลขถูก	“describe” = ต้องแสดงพจน์ $a_i \times r^i$
4	ใช้น้ำหนักฐานสิบกับเลขฐานอื่น	$231_8 \rightarrow 231$ (ควรได้ 153)	เขียนแถวน้ำหนักลงกระดาษก่อนคูณเสมอ
5	จำค่าตัวอักษรฐานสิบหกผิด	$C = 3$ แทน 12	จำจุดยึด $A = 10 \cdot F = 15$ แล้วนับต่อ
6	เลขชี้กำลังฝั่งขวาของจุดเริ่มที่ 0	$1010.01_2 \rightarrow 10.5$ (ควรได้ 10.25)	ฝั่งขวาเริ่มที่ r^{-1} เพราะ r^0 ถูกใช้ไปแล้ว
7	ฝั่งทศนิยมใช้ $\frac{1}{10}$ ทุกฐาน	$74.23_8 \rightarrow 60.23$	ตัวหารคือ r^k เมื่อ k = จำนวนหลักหลังจุด
8	**หารสั้นแล้วอ่านผิดทิศ**	$6781 \rightarrow 57151_8$	เศษตัวแรก = หลักขวาสุด $\Longrightarrow$ อ่านล่างขึ้นบน
9	**คูณด้วยฐานแล้วอ่านผิดทิศ**	$0.2890625 \rightarrow 0.A4_{16}$	ตัวแรกที่ได้ = หลักติดจุด $\Longrightarrow$ อ่านบนลงล่าง
10	หยุดหารตอนเห็นเศษเป็นศูนย์	$47 \rightarrow 01111_2$ (ควรได้ 101111)	หยุดเมื่อ**ผลหาร**เป็นศูนย์ ไม่ใช่เศษ
11	จับกลุ่มบิตจากซ้าย / คร่อมจุด	$10111_2 \rightarrow 53_8$ (ควรได้ 27)	จับกลุ่มจาก**จุด**ออกไปทั้งสองทางเสมอ
12	แตกหลักเป็นบิตไม่ครบ 3 หรือ 4 ตัว	$D5C9 \rightarrow$ 15 บิต (ควรได้ 16)	n หลัก hex $\Longrightarrow 4n$ บิต · octal $\Longrightarrow 3n$ บิต

กับดักตัวที่อันตรายที่สุด — ข้อ 8 กับ 9 คู่กัน

Assignment ข้อ 6 วางกับดักคู่นี้ไว้ตรง ๆ ครับ — **6a ให้หาร 6b ให้คูณ และอ่านคำตอบคนละทิศ** คนที่ทำ 6a เสร็จแล้วรีบทำ 6b ต่อ มักติดนิสัย “อ่านขึ้น” มาด้วย แล้วตอบ $0.A4_{16}$ ผิดทันที

ให้จำเหตุผลเดียว ไม่ต้องจำสองกฎ: หลักที่ออกมาก่อน คือหลักที่อยู่ติดจุดที่สุดเสมอ

ฝั่งจำนวนเต็ม หลักติดจุดอยู่**ขวาสุด** ⟹ ต้องเขียนย้อนขึ้นไปทางซ้าย

ฝั่งทศนิยม หลักติดจุดอยู่**ซ้ายสุด** ⟹ เขียนไล่ลงไปทางขวาได้เลย

สรุปหน้าเดียว — เปิดหน้านี้ก่อนเข้าห้องสอบ

EP01 · ดิจิทัลคืออะไร + ระบบเลขฐาน

1. digital vs analog

digital = ค่าแยกขาด นับได้ (สวิตช์ไฟ 2 ท่า) · **analog** = ค่าต่อเนื่อง นับไม่ถ้วน (สวิตช์หรี่ไฟ)

ข้อดีดิจิทัล: ทน noise · เก็บแน่น · ก๊อปได้เหมือนเดิม | ข้อเสีย: แปลง A→D แล้ว**ข้อมูลหาย**

2. logic level และ digital pulse

positive logic (วิชานี้ใช้): HIGH = 1, LOW = 0 · ช่วงตรงกลางคือ **invalid region**

t_r วัดที่ **10% → 90%** · t_f วัดที่ **90% → 10%** · t_w วัดที่ **50%**

leading/trailing ตัดสินด้วย**เวลา** · **rising/falling** ตัดสินด้วย**ทิศทาง** — คนละเกณฑ์กัน

3. สูตรกลาง — ใช้ได้ทุกฐาน เปลี่ยนแค่ r

$$N = a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1 r^1 + a_0 r^0 + a_{-1}r^{-1} + a_{-2}r^{-2} + \cdots$$

เงื่อนไข: $0 \le a_i < r$ — ตัวเลขในหลักต้องน้อยกว่าฐานเสมอ

n หลักในฐาน r แทนค่าได้ r^n แบบ · ค่ามากสุดคือ $r^n - 1$

4. น้ำหนักที่ต้องเขียนได้ทันที

ฐาน 2: **1 2 4 8 16 32 64 128 256 512 1024**

ฐาน 8: **1 8 64 512 4096** | ฐาน 16: **1 16 256 4096**

ฝั่งทศนิยมคือ**ส่วนกลับ**: ฐาน 2 ⟹ $0.5, 0.25, 0.125$ · ฐาน 8 ⟹ $\frac{1}{8}, \frac{1}{64}$ · ฐาน 16 ⟹ $\frac{1}{16}, \frac{1}{256}$

5. ตัวอักษรฐานสิบหก (ท่องแค่นี้)

A = 10 · B = 11 · C = 12 · D = 13 · E = 14 · F = 15

จำจุดยึดแค่ **A = 10** กับ **F = 15** แล้วนับต่อได้เลยครับ

6. ฐานอื่น → ฐานสิบ

คูณน้ำหนักแล้วบวก — เขียนแถวน้ำหนักใต้ทุกหลักก่อนเสมอ

ฐานสองใช้ทางลัด: **บวกเฉพาะหลักที่เป็น 1** ไม่ต้องคูณเลย

7. ฐานสิบ → ฐานอื่น (2 วิธี ทิศตรงข้าม)

ส่วนจำนวนเต็ม — หารด้วยฐานซ้ำ ๆ เก็บเศษ · หยุดเมื่อ**ผลหาร**เป็น 0 · **อ่านล่างขึ้นบน**

ส่วนทศนิยม — คูณด้วยฐานซ้ำ ๆ เก็บตัวหน้าจุด · หยุดเมื่อ**เศษทศนิยม**เป็น 0 · **อ่านบนลงล่าง**

เหตุผลเดียวกันทั้งคู่: **หลักที่ออกมาก่อน คือหลักที่ติดจุดที่สุด**

8. binary ↔ octal ↔ hex (ทางลัดที่ไวสุด)

3 บิต = 1 หลักฐานแปด (เพราะ $2^3 = 8$) · **4 บิต = 1 หลักฐานสิบหก** (เพราะ $2^4 = 16$)

จับกลุ่มจากจุดทศนิยมออกไปทั้งสองทาง · ไม่มีจุด $\Longrightarrow$ จุดอยู่ขวาสุด

เติมศูนย์ที่**ขอบนอก**เสมอ: ฝั่งซ้ายเติมซ้ายสุด · ฝั่งขวาเติมขวาสุด

octal ↔ hex **ต้องผ่าน binary** เพราะ 16 ไม่ใช่กำลังของ 8

9. ตารางที่ต้องท่อง — แค่ 0 ถึง 15 พอ

0000–$1111 \Longrightarrow 0$–$15 \Longrightarrow$ hex 0–F

ไม่ต้องท่องจริง ๆ ก็ได้ครับ ใช้น้ำหนัก **8-4-2-1** ถามทีละตัวว่า “เอาไหม” เช่น $13 \Longrightarrow$ เอา 8 · เอา 4 · ไม่เอา 2 · เอา $1 \Longrightarrow 1101$

10. วิธีตรวจคำตอบที่ใช้ได้ทุกข้อ (ฟรี ไม่ต้องรู้อะไรเพิ่ม)

① **แปลงกลับเป็นฐานสิบแล้วเทียบ** — ถ้าไม่ตรงแปลว่าผิดแน่นอน

② **เช็คช่วงค่า**: n หลักฐาน $r \Longrightarrow$ มากสุด $r^n - 1$ (เช่น 64_8 เป็น 64 ไม่ได้ เพราะ 2 หลักมากสุด 63)

③ **เช็คคู่-คี่**: บิตสุดท้ายเป็น 0 $\Longrightarrow$ คำตอบต้องเป็นเลขคู่

④ **นับจำนวนหลัก/บิต**: 4 กลุ่ม $\Longrightarrow$ 4 หลัก · n หลัก hex $\Longrightarrow 4n$ บิต

เช็คลิสต์ก่อนส่งกระดาษ

อ่านโจทย์

- ☐ อ่าน**ตัวห้อย**บอกฐานแล้วหรือยัง
- ☐ โจทย์สั่ง `describe` อย่างเดียว หรือสั่ง `determine the decimal value` ด้วย
- ☐ มี**จุดทศนิยม**ไหม ถ้ามีต้องแยกทำสองส่วน
- ☐ ทิศทางเป็นฐานอื่น→ฐานสิบ หรือฐานสิบ→ฐานอื่น

ก่อนส่ง

- ☐ เขียน**พจน์ครบทุกหลัก** รวมหลักที่เป็นศูนย์
- ☐ แปลงตัวอักษร A–F เป็นเลขก่อนคูณแล้ว
- ☐ **แปลงกลับเป็นฐานสิบ**ตรวจแล้วทุกข้อ
- ☐ เขียน**ตัวห้อยบอกฐาน**กำกับคำตอบแล้ว

คำแนะนำเรื่องเวลาในห้องสอบ

ข้อสอบวิชานี้**ใช้เครื่องคิดเลขได้**ครับ แต่พี่แนะนำให้ทำมือในสองกรณีนี้:

① **binary ↔ octal ↔ hex** — จับกลุ่มด้วยมือเร็วกว่ากดเครื่องคิดเลขมาก และไม่มีทางกดผิด
② **ข้อที่ถามวิธีทำ** — เขียนบันไดหารสั้น/คูณให้เห็นครบ เพราะ**คะแนนอยู่ที่ขั้นตอน** ถ้าเขียนแค่คำตอบจากเครื่องคิดเลขจะได้คะแนนไม่เต็มครับ
ใช้เครื่องคิดเลขเป็น**ตัวตรวจ**ตอนท้ายจะคุ้มที่สุด

EP นี้เชื่อมกับ EP ต่อไปยังไง



Midterm 23 ก.ย. ครอบ Week 1–7 · Assignment คิด 25% ของเกรด

เตรียมตัวไป EP02

ตอนนี้น้องอ่านและแปลงเลขฐานสองได้แล้วครับ **แต่ถ้าจะเอามาบวกลบคูณหารกันล่ะครับ แล้วเลขติดลบเก็บยังไงในเมื่อมีแค่ 0 กับ 1**

คิดดูดี ๆ นะครับ — บนกระดาษเราเขียนเครื่องหมายลบ “−” นำหน้าได้ แต่ในวงจรมีแค่สายที่เป็น HIGH กับ LOW **ไม่มีสายไหนที่แปลว่า “ลบ”** เลย แล้ววิศวกรเขาแก้ปัญหานี้ยังไง — EP02 จะพาไป**ดูบวก-ลบ-คูณ-หารฐานสอง** พร้อมตัวทดและตัวยืมทุกหลัก แล้วจบด้วย **1's complement กับ 2's complement** ซึ่งเป็นวิธีที่คอมพิวเตอร์ทุกเครื่องบนโลกใช้เก็บเลขติดลบจริง ๆ ครับ
เนื้อหา EP02 คือสไลด์ Week 1 หน้าที่เหลือ และ Assignment #1 ข้อ 8–15 ครับ

แหล่งอ้างอิงของชีทนี้

แหล่ง	ส่วนที่ใช้	ใช้ทำอะไรในชีทนี้
EES 271-01 Introduction-2026 (revised) สไลด์ Week 1 · Dr. Prasertsak Charoen	หน้า 1–17	digital vs analog · ตารางเทคโนโลยี 0/1 · ระบบเสียง analog/digital · binary digits & logic levels · digital pulse · positional numbering system · decimal & binary numbers

แหล่ง	ส่วนที่ใช้	ใช้ทำอะไรในชีทนี้
EES 271-01 Introduction-2026 (revised)	หน้า 26–34	octal & hexadecimal numbers · conversion table 0–15 · fractional numbers · base conversions (divide-by-r / multiply-by-r) · binary ↔ octal ↔ hex grouping · ตัวอย่างที่สไลด์เว้นช่องว่างไว้ทั้งหมด (52, 849, 6031, 1011, 11101, 101000, 37, 264, 5201, C9, F8A, 10.01, D3.2A, 47, 0.6875, 0.65625, 0.5625, 101111010011, 4106, 1011111001100011, A29C)
EES271 Assignment #1	ข้อ 1–7 (20 ข้อย่อย)	ตอนที่ 9, 10, 11 — เฉลยละเอียด 6 ชั้นทุกข้อย่อย (ข้อ 8–15 เรื่อง complement และเลขมีเครื่องหมาย อยู่ใน EP02)
Floyd, *Digital Fundamentals* 10th Edition, Prentice Hall, 2009	Ch. 1–2	ตำราหลักของวิชา — นิยาม digital pulse (rise/fall time, overshoot, ringing, droop) และรูปแบบสัญลักษณ์ที่ใช้ตลอดวิชา
tools/dig.py เครื่องมือตรวจคำตอบของชีทชุดนี้	ทุกตัวเลขในชีท	ตรวจคำตอบทั้ง 20 ข้อย่อยของ Assignment และทุกตัวอย่างใน I DO / WE DO / YOU DO ด้วยการแปลงไปและแปลงกลับ

คำสุดท้ายของ EP นี้

ถ้าน้องอ่านมาถึงตรงนี้แล้วรู้สึกว่า “มันก็แค่สูตรเดียวใช้ซ้ำไปมา” — **น้องเข้าใจถูกแล้วครับ** ทั้ง EP นี้มีสูตรจริง ๆ แค่บรรทัดเดียว คือ $N = \sum a_i r^i$ ที่เหลือคือการเปลี่ยนค่า r กับการเดินย้อนทางเท่านั้น

เรื่องนี้จะเป็นพื้นให้ทุก EP ที่เหลือของวิชาครับ — เลขคณิตฐานสองใน EP02, floating point ใน EP03, รหัส BCD/Gray ใน EP04 ไปจนถึงตารางค่าความจริงใน EP07 **ถ้าตอนนี้แน่น ที่เหลือจะง่ายลงเยอะเลยครับ**