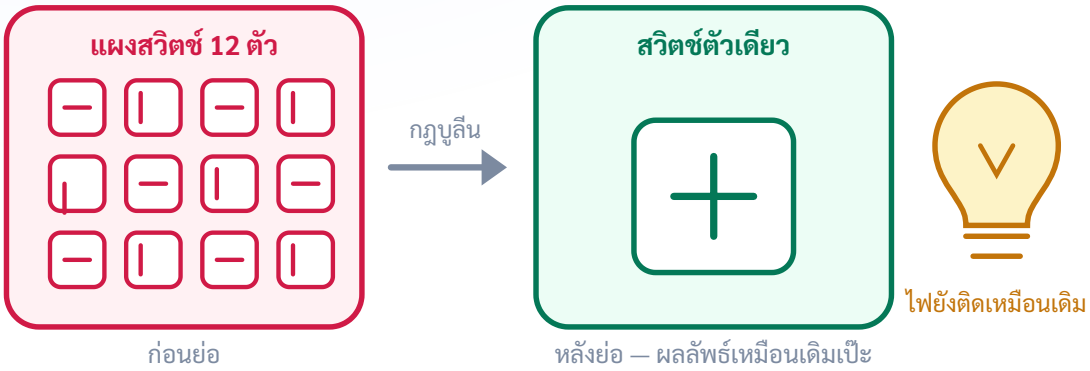
06 EP

พีชคณิตบูลีน
วงจร 20 เกต ย่อเหลือ 5 เกตได้ยังไง

กฎบูลีน 12 ชุดพร้อมวงจรก่อน-หลัง · De Morgan และคาถา “ขีดแตก เครื่องหมายพลิก” · วิธีลอกขีดซ้อนขีดทีละชั้น · consensus theorem · SOP / POS และ standard form



ลดจำนวนเกตโดยที่ตารางค่าความจริงไม่เปลี่ยนแม้แต่แถวเดียวครับ

พี่สอนน้องแบบไม่ต้องมีพื้นฐานมาก่อนเลยครับ · อ้างอิงสไลด์ EES271 Week 3 (หน้า 21–46) + Assignment #3 ข้อ 3, 4, 5

ตอนนี้เราจะเดินไปทางไหนกัน

EP นี้แบ่งเป็นสามช่วงชัดเจนครับ — **ช่วงแรก (หัวข้อ 1–2) คือ “คลังกฎ”** ที่ต้องมีติดตัวก่อน · **ช่วงที่สอง (หัวข้อ 3–7) คือ “วิธีใช้กฎ”** โดยเฉพาะ De Morgan กับขีดซ้อนขีด · **ช่วงที่สาม (หัวข้อ 8–11) คือเฉลย Assignment ข้อ 3, 4, 5 ครบทั้ง 12 ข้อย่อยแบบไม่ย่อ**

1	ทำไมต้องย่อนิพจน์ + Boolean addition / multiplication	ภาพรวม
2	กฎพีชคณิตบูลีน 12 ชุด — แต่ละกฎประหยัดเกตไปกี่ตัว	คลังกฎ
3	De Morgan — ขีดแตก เครื่องหมายพลิก	หัวใจของ EP
4	ขีดซ้อนขีด — แตกทีละชั้นจากบนลงล่าง	ข้อ 3 ถามล้วน ๆ
5	ย่อนิพจน์จริง — ลำดับการลงมือที่ใช้ได้ทุกข้อ	ต้องฝึกมือ
6	Consensus theorem — พจน์ที่มีก็เหมือนไม่มี	ข้อ 5
7	SOP / POS และ standard form	ปูทาง EP07
8	เฉลย Assignment ข้อ 3 (a) (b) (c)	เฉลยเต็ม
9	เฉลย Assignment ข้อ 3 (d) (e) (f)	เฉลยเต็ม
10	เฉลย Assignment ข้อ 3 (g) (h) (i)	เฉลยเต็ม
11	เฉลย Assignment ข้อ 4 (a) (b) และข้อ 5	ข้อยากที่สุด
12	กับดักรวม + สรุปหน้าเดียว + เช็คลิสต์ก่อนสอบ	ทวนก่อนสอบ

วิธีใช้ชีทนี้ — I DO / WE DO / YOU DO

ทุกหัวข้อสอนจบด้วยลำดับเดียวกันสามขั้นครับ อย่าข้ามขั้นไหนนะครับ

I DO — พี่ทำให้ดู
พี่ทำโจทย์ให้ดูทีละขั้น **ทุกขั้นบอกด้วยว่าทำไมถึงทำแบบนั้น** และทุกบรรทัดมี**ชื่อกฎกำกับ** เพราะข้อสอบวิชานี้ให้คะแนนที่ชื่อกฎด้วยครับ

WE DO — ทำด้วยกัน
พี่เว้นช่องว่างไว้ให้น้องเติม **ลองเติมเองก่อนแล้วค่อยดูเฉลยข้างล่าง** เฉลยจะอธิบายทุกช่องพร้อมเหตุผลครับ

YOU DO — ตาน้อง
น้องทำเองทั้งข้อ **เฉลยอยู่ติดกันทันที** แต่พี่ขอให้ทำให้จบก่อนค่อยเลื่อนดูนะครับ ไม่งั้นจะได้แค่ความรู้สึกว่า “ง่ายจัง”

ข้อตกลงเรื่องภาษาและสัญลักษณ์

โจทย์ทุกข้อพี่พิมพ์เป็นภาษาอังกฤษตามข้อสอบจริง แล้วอธิบายวิธีคิดเป็นภาษาไทยข้างล่างครับ น้องต้องคุ้นกับคำว่า `Apply De Morgan's laws to the following expressions` · `Using Boolean algebra techniques, simplify` · `Eliminate the consensus terms` ให้ได้

เรื่องขีดบน: วิชานี้ใช้ **ขีดบน** ($\overline{A}$) ล้วน ๆ ทั้งสไลด์และ Assignment ครับ มีสไลด์เดียวที่ใช้ `A'` — **สองอันนี้ความหมายเดียวกันเป๊ะ** พี่จะเขียนขีดบนเป็นหลักเพื่อให้ตรงกับ Assignment

คะแนนของวิชานี้

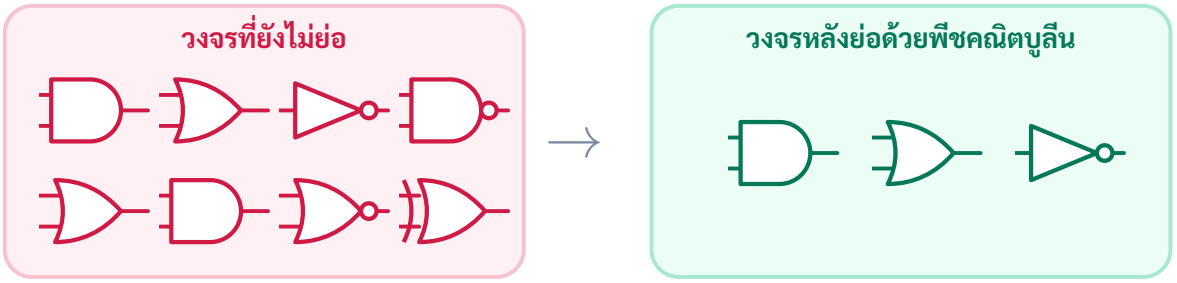
Assignment 25% · Midterm 35% · Final 40% ครับ — **หัวข้อ 8 ถึง 11 คือเฉลย Assignment #3 ข้อ 3, 4, 5 ซึ่งกินคะแนน 25% โดยตรง** และ**ข้อ 3 ทั้ง 9 ข้อย่อยคือข้อที่พลาดง่ายที่สุด** เพราะอ่านขีดผิดตัวเดียวก็ผิดทั้งข้อ พี่จึงทำละเอียดที่สุดตรงนั้นครับ

1 ทำไมต้องย่อนิพจน์ ทั้งที่วงจรมันก็ทำงานได้อยู่แล้ว

ตะขอเกี่ยว · รับจาก EP05

จบ EP05 น้องอ่านวงจรเป็นแล้วครับ — เห็นสัญลักษณ์ AND ก็รู้ว่า “ต้อง 1 ทุกขาถึงจะออก 1” เห็น NOR ก็รู้ว่า “ออก 1 ตอนที่ทุกขาเป็น 0” และเขียนนิพจน์บูลีนกำกับปลายสายได้แล้วด้วย

ตอนนี้น้องอ่านวงจรได้แล้ว แต่ถ้าวงจรมันใหญ่จนใช้เกต 20 ตัวล่ะครับ จะลดให้เหลือ 5 ตัวโดยที่ผลลัพธ์เหมือนเดิมเป๊ะได้ไหม — คำตอบคือได้ครับ และเครื่องมือที่ใช้ลด ชื่อว่า `Boolean algebra` ซึ่งเป็นเนื้อหาทั้งหมดของ EP นี้



เกตเยอะ = ชิปเยอะ = แพงและกินไฟ — ผลลัพธ์ทุกแถวของตารางค่าความจริงเหมือนเดิมเป๊ะ

นิพจน์เดียวกันเขียนได้หลายหน้าตาครับ — งานของ EP นี้คือเลือกหน้าตาที่ใช้เกตน้อยที่สุด

ของใกล้ตัว: ทางไปกบเหลาที่อ้อมกับทางที่ตรง

สมมติกบเหลาอยู่ในลิ้นชักบนสุดครับ วิธีที่ 1 คือ **“เปิดลิ้นชักล่าง → ปิด → เปิดลิ้นชักกลาง → ปิด → เปิดลิ้นชักบน → หยิบกบเหลา”** วิธีที่ 2 คือ **“เปิดลิ้นชักบน → หยิบกบเหลา”**

สองวิธีนี้ได้กบเหลาเหมือนกันเป๊ะ ต่างกันแค่จำนวนขั้นตอนครับ — พีชคณิตบูลีนก็คือกฎที่บอกว่า “ขั้นตอนไหนตัดทิ้งได้บ้างโดยที่ผลลัพธ์ไม่เปลี่ยน” แล้วในวงจรจริง **ขั้นตอนที่ตัดทิ้งได้ = เกตที่ไม่ต้องซื้อ = เงินที่ไม่ต้องจ่าย และไฟที่ไม่ต้องกิน**ครับ

นิยาม · จำเป็นต้องรู้

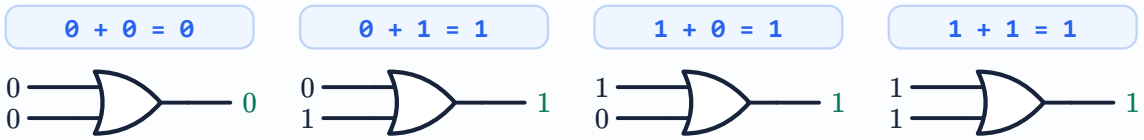
Boolean algebra is the mathematics of digital logic.

พีชคณิตบูลีนคือ**คณิตศาสตร์ของตรรกะดิจิทัล**ครับ ตัวแปรทุกตัวมีได้แค่ 2 ค่าคือ 0 กับ 1 และมีเครื่องหมายอยู่ 3 ตัวเท่านั้น — **บวก (+)** คือ OR, **คูณ (·)** คือ AND, **ขีดบน** คือ NOT น้องไม่ต้องกลัวคำว่า “พีชคณิต” ครับ มันเล็กกว่าพีชคณิตที่เรียนมาตอนมัธยมเยอะมาก เพราะไม่มีเลข 2, 3, 7 ให้ยุ่ง มีแค่ 0 กับ 1

เครื่องหมายสองตัวแรก: Boolean addition กับ Boolean multiplication

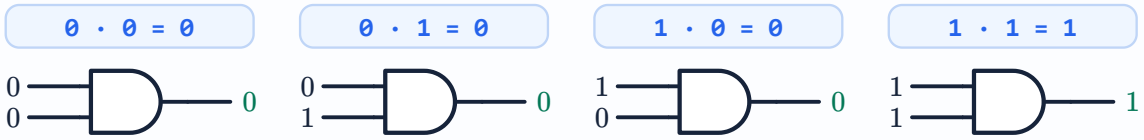
สไลด์เริ่มจากสองอันนี้ครับ และมันตรงกับเกตที่น้องเพิ่งเรียนไปใน EP05 แบบตัวต่อตัวเลย

Boolean Addition — เท่ากับ OR operation



สังเกตช่องขวาสุดครับ — $1 + 1 = 1$ ไม่ใช่ 2 เพราะโลกนี้มีแค่ 0 กับ 1

Boolean Multiplication — เท่ากับ AND operation



การคูณบูลีนเหมือนคูณเลขปกติทุกประการ — เจอ 0 ตัวเดียวก็จบเป็น 0

กับดักข้อแรกของ EP นี้

$1 + 1 = 1$ **ไม่ใช่** $1 + 1 = 10$ **ครับ** — น้องเพิ่งผ่าน EP02 ที่บวกเลขฐานสองแล้วมีตัวทด ตรงนั้น $1 + 1$ ได้ 10 จริง แต่**คนละเรื่องกันเลยครับ**

วิธีแยกให้ขาด: ถ้าโจทย์พูดถึง “การบวกเลข” (arithmetic) จะมีตัวทด แต่ถ้าโจทย์พูดถึง “นิพจน์บูลีน / วงจร / เกต” เครื่องหมาย + คือ OR และ**ไม่มีตัวทดเด็ดขาด** ข้อสอบชอบวางสองเรื่องนี้ไว้ใกล้กันเพื่อดูว่าน้องแยกออกไหมครับ

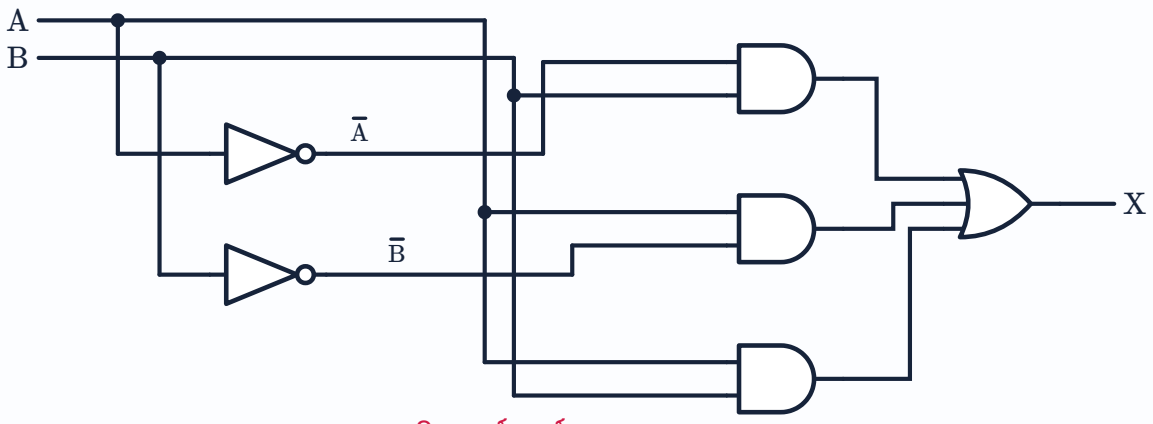
ทางลัด · อ่านนิพจน์บูลีนให้ถูกตั้งแต่แรก

อ่าน $+$ ว่า **“หรือ”** และอ่าน $\cdot$ (หรือการเขียนติดกัน) ว่า **“และ”** ครับ เช่น $X = A\overline{B} + \overline{A}B$ อ่านว่า **“A และ ไม่-B หรือ ไม่-A และ B”**

ลำดับความสำคัญเหมือนคณิตปกติเป๊ะ: ขีดบนก่อน → คูณ (AND) → บวก (OR) เพราะฉะนั้น $A + BC$ แปลว่า $A + (BC)$ ไม่ใช่ $(A + B)C$ ครับ ถ้าจะให้บวกก่อนต้องใส่วงเล็บเสมอ

ตัวอย่างที่ทำให้เห็นภาพทั้ง EP: วงจร 6 เกตที่จริง ๆ ใช้เกตเดียวพอ

สไลด์หน้า 24 ยกวงจรนี้มาให้ดูครับ มันคือวงจรของนิพจน์ $X = \overline{A}B + A\overline{B} + AB$ ซึ่งใช้ **อินเวอร์เตอร์ 2 ตัว + AND 3 ตัว + OR 3 ขาเข้า 1 ตัว = 6 เกต**



6 เกต (อินเวอร์เตอร์ 2 + AND 3 + OR 1)
สายที่ตัดกันโดยไม่มีจุดดำ = ไม่ได้ต่อถึงกัน

วงจรต้นฉบับจากสไลด์หน้า 24 — $X = \overline{A}B + A\overline{B} + AB$

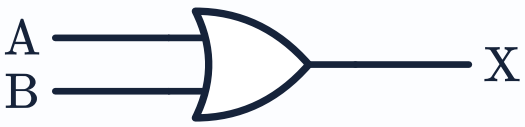
ทีนี้ลองกดตารางค่าความจริงดูครับ — พี่ให้น้องดูทีละพจน์ก่อนแล้วค่อยรวมเป็น X

A	B	$\overline{A}B$	$A\overline{B}$	AB	X	$A+B$
0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1

อ่านตารางนี้ยังไง

คอลัมน์ X คือเอาสามพจน์มา OR กัน ส่วนคอลัมน์สุดท้ายคือ $A + B$ เฉย ๆ ครับ **สองคอลัมน์นี้เหมือนกันทุกแถว** — 0, 1, 1, 1

แปลว่าวงจร 6 เกตข้างบน**ทำงานเหมือน OR เกตตัวเดียว**เป๊ะ ๆ ครับ



1 เกต · ตารางค่าความจริงเหมือนกันเป๊ะ

วงจรเดียวกันหลังย่อ — ประหยัดไป 5 เกต โดยที่พฤติกรรมไม่เปลี่ยนแม้แต่แถวเดียว

$$X = \overline{A}B + A\overline{B} + AB = A + B$$

พิสูจน์ด้วยตารางค่าความจริง — เดี๋ยวหัวข้อ 3 จะพิสูจน์ด้วยกฎแทน

ที่มา · ทำไมเรื่องนี้ถึงสำคัญกับวิศวกร

สไลด์เขียนไว้ตรง ๆ ครับว่า `To reduce the size, complexity, and cost of implementing digital circuits.`

แปลว่า **ย่อนิพจน์ = ลดขนาดชิป ลดความซับซ้อน ลดต้นทุน** ครับ ในชิปจริงหนึ่งตัวมีเกตเป็นล้าน ๆ ตัว ถ้าย่อแต่ละบล็อกได้ 20% ชิปทั้งตัวก็เล็กลง กินไฟน้อยลง และเร็วขึ้น เพราะสัญญาณเดินผ่านเกตน้อยชั้นกว่า

ศัพท์สอบของ EP นี้ — ต้องอ่านโจทย์ภาษาอังกฤษออก

English	แปลว่า	ข้อสอบเขียนมาแบบนี้
Boolean algebra	พีชคณิตบูลีน	*Using Boolean algebra techniques, simplify...*
simplify	ย่อให้สั้นที่สุด	*Simplify the following Boolean expression*
expression	นิพจน์	*Apply De Morgan's laws to the following expressions*
complement	ค่าตรงข้าม (ขีดบน)	*the complement of that variable appears in another*
product term	พจน์คูณ เช่น $A\overline{B}C$	*all the variables appear in each product term*
sum term	พจน์บวก เช่น $(A+\overline{B})$	*appear in each sum term in the expression*
redundant term	พจน์ที่ตัดทิ้งได้	*used to eliminate redundant terms*
domain	ชุดตัวแปรทั้งหมดของนิพจน์	*all the variables in the domain*

เทียบของเก่า · EP05

EP05 น้องเรียนเกต 7 ตัวโดย**มองจาก “ฮาร์ดแวร์”** — เกตหน้าตาแบบนี้ ตารางค่าความจริงแบบนี้ EP นี้เรามอง**เรื่องเดียวกันจากมุม “พีชคณิต”** คือมองเป็นสูตรที่จัดรูปได้ครับ

สองมุมนี้ต้องสลับไปมาได้ตลอดเวลา: เจอวงจร → เขียนนิพจน์ → ย่อนิพจน์ → วาดวงจรใหม่ ข้อสอบข้อยาว ๆ ของวิชานี้เกือบทุกข้อคือวงจรนี้เป๊ะ ๆ ครับ

2 กฎพีชคณิตบูลีน — แต่ละกฎประหยัดเกตไปกี่ตัว

ตะขอเกี่ยว · ต่อจากหัวข้อ 1

หัวข้อที่แล้วพี่ย่อวงจร 6 เกตเหลือ 1 เกตด้วยการ**กดตารางค่าความจริง**ครับ ซึ่งใช้ได้จริง แต่มีปัญหาสองข้อ: ① ถ้ามีตัวแปร 6 ตัวต้องกด $2^6 = 64$ แถว มือหักครับ ② ตารางบอกได้แค่ว่า “ผลลัพธ์เหมือนกัน” แต่**ไม่ได้บอกว่าต้องเขียนนิพจน์สั้นออกมาว่ายังไง**

สมมติว่าถ้าน้องมีชุดกฎที่เอามาแปลงนิพจน์ได้ตรง ๆ โดยไม่ต้องกดตารางเลยล่ะครับ นั่นคือ 12 กฎในหัวข้อนี้ครับ — พี่จะให้ทุกกฎมาพร้อม **①ชื่อกฎ ②นิพจน์ ③วงจรก่อน-หลัง ④ตารางค่าความจริงพิสูจน์ ⑤ของใกล้ตัว**

วิธีอ่านหัวข้อนี้

อย่าท่องครับ — **ให้ดูรูปวงจรก่อน-หลังแล้วนับเกต** ว่าประหยัดไปกี่ตัว สมองจำภาพ “วงจรฝั่งขวาเล็กกว่า” ได้ดีกว่าจำสูตรเปล่า ๆ เยอะครับ ส่วนตารางค่าความจริงมีไว้ให้น้องเห็นว่า**กฎพวกนี้ไม่ได้มาจากไหน มันพิสูจน์ได้ทุกข้อ**

กฎที่ 1 — Commutative Laws (สลับที่กันได้)

Commutative laws state that the order in AND or OR operations makes no difference. แปลว่า**สลับลำดับขาเข้าของ AND หรือ OR แล้วผลลัพธ์เหมือนเดิม**ครับ

$$A + B = B + A \qquad A \cdot B = B \cdot A$$

Commutative Law I (OR) · Commutative Law II (AND)



Commutative Law I — สลับสาย A กับ B ที่ขาเข้า OR ผลลัพธ์เท่าเดิม



Commutative Law II — เหมือนกันกับ AND

A	B	$A+B$	$B+A$
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

A	B	AB	BA
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

ของใกล้ตัว

หยิบดินสอแล้วยางลบ กับหยิบยางลบแล้วดินสอ — สุดท้ายในมือมีของเหมือนกันครับ

ประหยัดกี่เกต

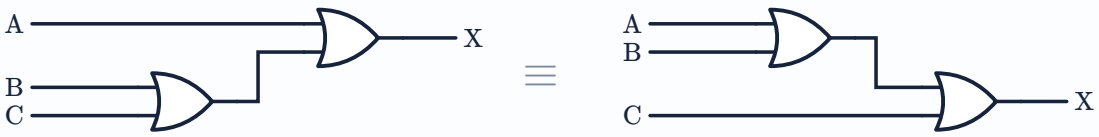
0 เกตครับ — กฎนี้ไม่ได้ลดเกต แต่มันคือ**ใบอนุญาตให้จัดเรียงพจน์ใหม่** เพื่อให้เห็นคู่ที่จะจับมาย่อได้ในกฎถัด ๆ ไป เช่นเขียน $BC + AB$ ใหม่เป็น $AB + BC$ แล้วดึง B ออกได้ทันทีครับ

กฎที่ 2 — Associative Laws (จับกลุ่มยังไงก็ได้)

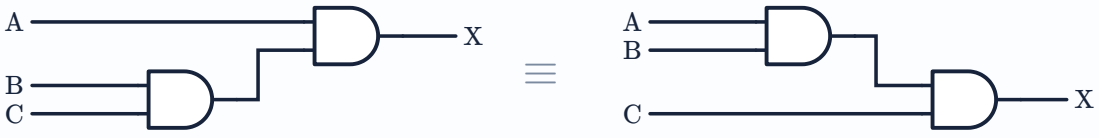
Associative laws state that the order in which a combination of variables are grouped for AND or OR operations makes no difference. แปลว่า**ย้ายวงเล็บได้ตามใจ** ตราบใดที่ลำดับตัวแปรยังเหมือนเดิมครับ

$$(A + B) + C = A + (B + C) \qquad (AB)C = A(BC)$$

Associative Law I (OR) · Associative Law II (AND)



Associative Law I — จับ B กับ C ก่อน หรือจับ A กับ B ก่อน ก็ได้ผลเท่ากัน



Associative Law II — AND ก็ย้ายวงเล็บได้เหมือนกัน

A	B	C	$(A+B)+C$	$A+(B+C)$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

ของใกล้ตัว

ใส่ดินสอกับยางลบลงกล่องก่อนแล้วค่อยใส่ไม้บรรทัด กับใส่ยางลบกับไม้บรรทัดก่อนแล้วค่อยใส่ดินสอ — ของในกล่องสุดท้ายเหมือนกันครับ

ทางลัดที่ได้จากกฎนี้

พอวงเล็บย้ายได้ แปลว่า**เขียน $A+B+C$ เฉย ๆ ไม่ต้องใส่วงเล็บเลยก็ได้**ครับ และในวงจรจริงยัง**ยุบ OR สองตัวเหลือ OR 3 ขา เข้าตัวเดียวได้ด้วย** — ตรงนี้ประหยัดจริง 1 เกต

A	B	C	$(AB)C$	$A(BC)$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

กับดัก

ย้ายวงเล็บได้เฉพาะเมื่อเครื่องหมายเป็นชนิดเดียวกันทั้งหมดครับ $(A+B)C$ **ไม่เท่ากับ** $A+(BC)$ เด็ดขาด — ลอง $A=1, B=0, C=0$ ดูครับ ฝั่งซ้าย $=(1+0)\cdot 0=0$ แต่ฝั่งขวา $=1+0=1$ ต่างกันชัด ๆ

กฎที่ 3 — Identity Laws (บวก 0 คูณ 1 แล้วไม่เปลี่ยน)

The first identity law states that a variable ORed with 0 is always equal to the variable. The second identity law states that a variable ANDed with 1 is always equal to the variable.

$$A+0=A \qquad A\cdot 1=A$$

Identity Law I (OR) · Identity Law II (AND)



ต่อสายตรง ไม่ต้องใช้เกตเลย — ประหยัด 1 เกต

Identity Law I — ขาที่ตรึงไว้ที่ 0 ไม่มีผลอะไรกับ OR เลย ตัดเกตทิ้งได้



ต่อสายตรง ไม่ต้องใช้เกตเลย — ประหยัด 1 เกต

Identity Law II — ขาที่ตรึงไว้ที่ 1 ไม่มีผลอะไรกับ AND

A	$A+0$	$A\cdot 1$
0	0	0
1	1	1

ของใกล้ตัว

ในกล่องดินสอมีดินสออยู่แล้ว แล้วน้องหยิบ “อากาศ” ใส่เพิ่มเข้าไป — ในกล่องก็ยังมีแค่ดินสอครับ 0 ในการ OR ก็คืออากาศแบบนั้น

ประหยัดกี่เกต

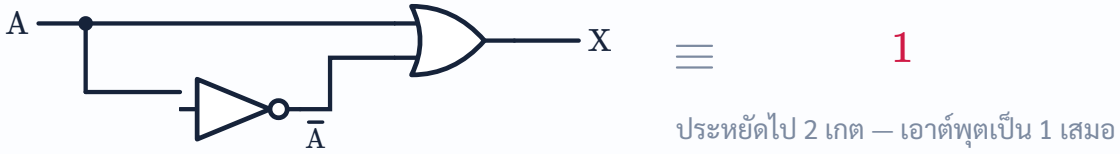
1 เกตเต็ม ๆ ครับ เพราะกลายเป็นสายเปล่า ในการทำโจทย์กฎนี้มักโผล่ตอนท้าย ๆ หลังจากพจน์อื่นถูกยุบเป็น 0 ไปแล้ว

กฎที่ 4 — Complementary Laws (ตัวมันเองกับตัวตรงข้าม)

A variable ORed with its complement is always equal to 1. A variable ANDed with its complement is always equal to 0. ที่มาง่ายมากครับ — A กับ $\overline{A}$ **ต้องมีตัวหนึ่งเป็น 1 เสมอ และเป็น 1 พร้อมกันไม่ได้**

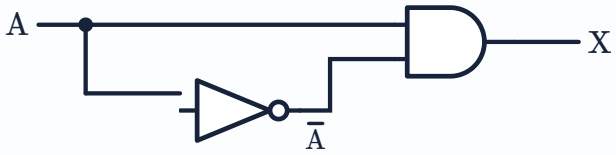
$$A + \overline{A} = 1 \qquad A \cdot \overline{A} = 0$$

Complementary Law I (OR) · Complementary Law II (AND)



ประหยัดไป 2 เกต — เอาต์พุตเป็น 1 เสมอ

Complementary Law I — ไม่ว่า A จะเป็นอะไร เอาต์พุตค้างที่ 1 เสมอ



≡ 0

ประหยัดไป 2 เกต — เอาต์พุตเป็น 0 เสมอ

Complementary Law II — เอาต์พุตค้างที่ 0 เสมอ

A	$\overline{A}$	$A + \overline{A}$	$A \cdot \overline{A}$
0	1	1	0
1	0	1	0

ของใกล้ตัว

สวิตช์ไฟ: “เปิดอยู่ **หรือ** ไม่ได้เปิดอยู่” — จริงเสมอ 100% ครับ (นั่นคือ $A + \overline{A} = 1$) ส่วน “เปิดอยู่ **และ** ไม่ได้เปิดอยู่” — เป็นไปไม่ได้เลย (นั่นคือ $A\overline{A} = 0$)

ทางลัดที่ใช้บ่อยที่สุดในการย่อ

เจอ A กับ $\overline{A}$ คูณกันอยู่ในพจน์เดียวกันเมื่อไหร่ ให้ฟันธงว่าพจน์นั้นเป็น 0 ทันที แล้วขีดทิ้งทั้งพจน์ครับ เช่น $AB\overline{A}C = 0$ — นี่คือขั้นที่ Assignment ข้อ 4a ต้องใช้

กฎที่ 5 — Idempotent Laws (ตัวเดิมซ้ำก็เท่าเดิม)

A variable ORed with itself is always equal to the variable. A variable ANDed with itself is always equal to the variable.

$$A + A = A \qquad A \cdot A = A$$

Idempotent Law I (OR) · Idempotent Law II (AND)



อินพุตเดียวกันสองขา = ไม่ได้อะไรเพิ่ม — ประหยัด 1 เกต

Idempotent Law I — ป้อนสายเดียวกันเข้าสองขา ไม่ได้ข้อมูลเพิ่ม



อินพุตเดียวกันสองขา = ไม่ได้อะไรเพิ่ม — ประหยัด 1 เกต

Idempotent Law II — เหมือนกันกับ AND

A	$A + A$	$A \cdot A$
0	0	0
1	1	1

ของใกล้ตัว

เขียนในลิสต์ว่า “ซื้อยางลบ, ซื้อยางลบ” — สุดท้ายก็ซื้อยางลบครับ ไม่ได้ซื้อสองก้อน เพราะบูลีนไม่ได้นับจำนวน มันตอบแค่ “มี/ไม่มี”

ทางลัดสองทางที่ต้องรู้

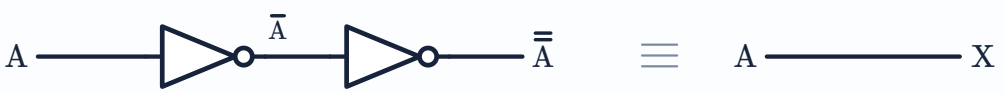
ทางไป: เห็นพจน์ซ้ำในผลบวก ตัดทิ้งได้เลย เช่น $AB + AC + AB = AB + AC$
ทางกลับ (สำคัญกว่า): $A = A + A$ แปลว่า**ก๊อปพจน์ขึ้นมาใช้ซ้ำได้** — เอาไว้ตอนที่พจน์เดียวต้องจับคู่กับสองพจน์พร้อมกันครับ

กฎที่ 6 — Involution Law (ขีดสองชั้นบนตัวเดียวกันตัดทิ้ง)

The involution law, also known as law of double negation, states that taking the double complement of a variable is always equal to the variable. กฎนี้คือหัวใจของหัวข้อ 5 (ขีดซ้อนขีด) เลยครับ ห้ามลืมเด็ดขาด

$$\overline{\overline{A}} = A$$

Involution Law — กลับค่าสองครั้ง = ไม่ได้กลับ



อินเวอร์เตอร์ 2 ตัวติดกัน = สายเปล่า ประหยัด 2 เกต

อินเวอร์เตอร์สองตัวต่อกัน = สายไฟธรรมดา — ประหยัดไป 2 เกตเต็ม

A	$\overline{A}$	$\overline{\overline{A}}$
0	1	0
1	0	1

ของใกล้ตัว

กดสวิตช์ไฟหนึ่งครั้งไฟติด กดอีกครั้งไฟดับ — **กดสองครั้งเท่ากับไม่ได้กด**ครับ

กับดักใหญ่มาก

$\overline{\overline{A}} = A$ **ใช้ได้เฉพาะตอนที่ขีดสองชั้นคลุม "ตัวเดียวกันเป๊ะ"** ครับ

$\overline{\overline{AB}} = AB$ ✓ (ขีดทั้งสองชั้นคลุม AB เหมือนกัน)

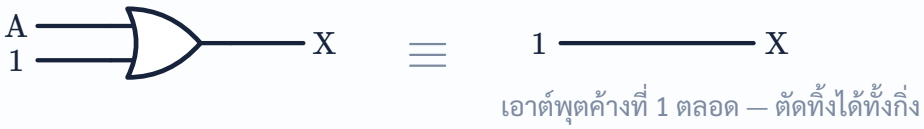
$\overline{\overline{A}B} \neq AB$ ✗ — อันนี้ขีดชั้นบนคลุม $\overline{A}B$ ทั้งก้อน แต่ขีดชั้นล่างคลุมแค่ A ต้องใช้ De Morgan ก่อน แล้วค่อย involution ครับ

กฎที่ 7 — Null Laws (บวก 1 คูณ 0 แล้วค่าค้าง)

A variable ORed with 1 is always equal to 1. A variable ANDed with 0 is always equal to 0.

$$A + 1 = 1 \qquad A \cdot 0 = 0$$

Null Law I (OR) · Null Law II (AND)



เอาต์พุตค้างที่ 1 ตลอด — ตัดทิ้งได้ทั้งกิ่ง

Null Law I — พอมีขาไหนเป็น 1 OR ก็ออก 1 ไม่ต้องสนขาที่เหลือ



เอาต์พุตค้างที่ 0 ตลอด — ตัดทิ้งได้ทั้งกิ่ง

Null Law II — พอมีขาไหนเป็น 0 AND ก็ออก 0 ทันที

A	$A+1$	$A \cdot 0$
0	1	0
1	1	0

ของใกล้ตัว

“ในกระเป๋ามีกุญแจ **หรือ** มีอากาศ” — จริงเสมอครับ เพราะอากาศมีตลอด (นั่นคือ $A+1=1$)
“มีกุญแจ **และ** มีอิฐทองคำ” — เท็จเสมอถ้าเรารู้ว่าไม่มีอิฐทองคำแน่ ๆ (นั่นคือ $A \cdot 0=0$)

ทางลัด

เจอ $(\cdots+1)$ **ให้ตอบ 1 ทันที** โดยไม่ต้องดูข้างในเลยครับ — เช่น $A\overline{B}(1+\overline{C})=A\overline{B} \cdot 1=A\overline{B}$ นี่คือขั้นสุดท้ายของ Assignment ข้อ 4a เป๊ะ ๆ

กับดัก · Null กับ Identity สลับกันบ่อยมาก

สี่สูตรนี้หน้าตาคล้ายกันจนคนสับสนทุกปีครับ พี่ทำตารางให้จำง่าย ๆ:

สูตร	ชื่อกฎ	วิธีจำ
$A+0=A$	**Identity I**	0 คือ “ไม่มีอะไร” — OR กับความว่างเปล่า ก็ได้ตัวเดิม
$A \cdot 1=A$	**Identity II**	1 คือ “ผ่านหมด” — AND กับประตูที่เปิดค้าง ก็ได้ตัวเดิม
$A+1=1$	**Null I**	1 กลืนทุกอย่างในการ OR
$A \cdot 0=0$	**Null II**	0 กลืนทุกอย่างในการ AND

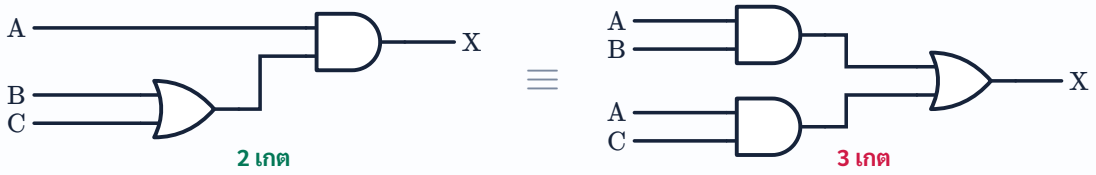
วิธีจำสั้นที่สุด: เลขที่**ต่างจากเครื่องหมาย** (0 กับ +, 1 กับ ·) คือ identity — ไม่ทำอะไร · เลขที่**เข้ากับเครื่องหมาย** (1 กับ +, 0 กับ ·) คือ null — กลืนหมดครับ

กฎที่ 8 — Distributive Law I (แจกแจง / ดึงตัวร่วม)

ORing two or more variables and then ANDing the result with a single variable is equivalent to ANDing the single variable with each of the two or more variables and then ORing the products.
สไลด์บอกเองครับว่านี่คือ **factoring out a variable** เหมือนคณิตศาสตร์ปกติเป๊ะ ๆ

$$A(B+C)=AB+AC$$

Distributive Law I — อ่านซ้ายไปขวาคือ “แจกแจง” · อ่านขวาไปซ้ายคือ “ดึงตัวร่วม”



ฝั่งซ้าย 2 เกต ฝั่งขวา 3 เกต — **กฎนี้ต้องใช้จากขวาไปซ้าย ถึงจะประหยัด**

A	B	C	$B+C$	$A(B+C)$	AB	AC	$AB+AC$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

ของใกล้ตัว

“ต้องมีดินสอ และ (มียางลบ หรือ มีกบเหลา)” เท่ากับ “(มีดินสอและยางลบ) หรือ (มีดินสอและกบเหลา)” — ดินสอถูกแจกเข้าไปทั้งสองก้อนครับ

ทางลัด · ทิศทางที่ใช้จริงตอนย่อ

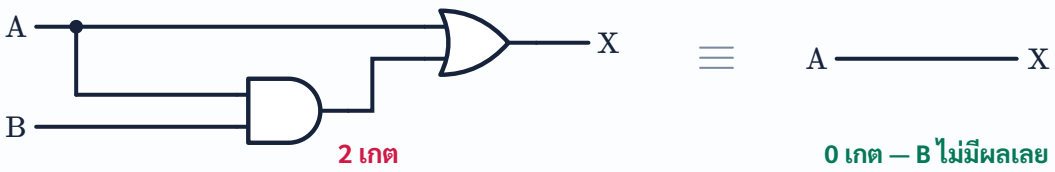
ตอนย่อโจทย์ให้มองหา “ตัวร่วม” แล้วดึงออกมาครับ เช่น $A\overline{B}+A\overline{B}\,\overline{C}=A\overline{B}(1+\overline{C})$ แล้วใช้ Null I ได้ $A\overline{B}$ ทันที — ดึงตัวร่วมคือท่าไม้ตายของ EP นี้

กฎที่ 9 — Absorption Laws (พจน์ใหญ่กลืนพจน์ย่อย)

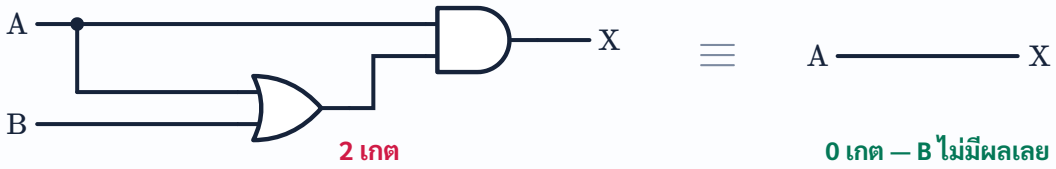
สไลด์หน้า 33 เว้นช่องว่างไว้ให้เติมครับ ของจริงคือสองบรรทัดนี้ — และมันคือกฎที่**ประหยัดเกตได้เยอะที่สุด**ในบรรดากฎทั้งหมด

$$A+AB=A \qquad A(A+B)=A$$

Absorption Law I · Absorption Law II



Absorption Law I — 2 เกตหายไปหมด เหลือสายเปล่า และตัวแปร B ไม่ถูกใช้เลย



Absorption Law II — เหมือนกัน แค่สลับเครื่องหมาย

A	B	AB	$A + AB$	A
0	0	0	0	0
0	1	0	0	0
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

A	B	$A + B$	$A(A + B)$	A
0	0	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	1	1	1

ที่มา · พิสูจน์จากกฎที่เรียนมาแล้ว

ไม่ต้องท่องครับ กฎนี้พิสูจน์ได้จากสามกฎก่อนหน้า:

$A + AB$

$= A \cdot 1 + AB$ (Identity II กลับทาง)

$= A(1 + B)$ (ดึงตัวร่วม — Distributive I)

$= A \cdot 1$ (Null I: $1 + B = 1$)

$= A$ (Identity II)

ของใกล้ตัว

“มีดินสอ **หรือ** (มีดินสอและยางลบ)” — ถามจริง ๆ มันก็คือ “มีดินสอ” ครับ เพราะกรณีหลังก็ต้องมีดินสออยู่ดี พจน์ที่**เงื่อนไขเยอะกว่า**ถูกพจน์ที่**เงื่อนไขน้อยกว่ากลืน**

ทางลัดที่ทำให้เห็น absorption ได้ใน 2 วินาที

มองหาพจน์สองพจน์ที่**พจน์สั้นเป็น “ส่วนหนึ่ง” ของพจน์ยาว**แบบไม่มีขีดขัดกันครับ ถ้าเจอ **ลบพจน์ยาวทิ้งได้เลย**

$\overline{A} + \overline{A}\,\overline{B}C \Rightarrow \overline{A}$ ✓ (พจน์สั้น $\overline{A}$ อยู่ในพจน์ยาวครบ)

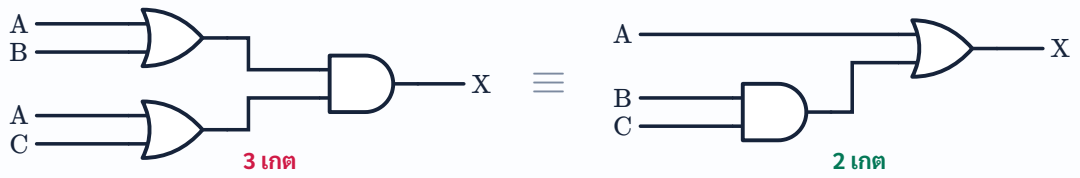
$\overline{A} + A\overline{B}C \Rightarrow$ ตัดไม่ได้ ✗ (พจน์ยาวมี A ไม่ใช่ $\overline{A}$ — คนละตัว)

กฎที่ 10 — Distributive Law II (บวกแจกเข้าคูณ)

สไลด์หน้า 34 เว้นว่างไว้เหมือนกันครับ ของจริงคือ

$$(A + B)(A + C) = A + BC$$

Distributive Law II — กฎนี้ “กลับหัว” จากคณิตศาสตร์ปกติ



3 เกต เหลือ 2 เกต — และฝั่งขวาสัญญาณเดินผ่านแค่ 2 ชั้นเท่าเดิม

A	B	C	$A+B$	$A+C$	$(A+B)(A+C)$	BC	$A+BC$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

ที่มา · ทำไมถึงเป็นแบบนี้

กระจายตรง ๆ ก่อนครับ:

$(A+B)(A+C)$

$= AA + AC + AB + BC$

$= A + AC + AB + BC$ (Idempotent II: $AA = A$)

$= A + BC$ (Absorption I ดูด AC กับ AB หายไป)

ของใกล้ตัว

“(มีดินสอ หรือ มียางลบ) และ (มีดินสอ หรือ มีไม้บรรทัด)” เท่ากับ “มีดินสอ หรือ (มียางลบและมีไม้บรรทัด)” ครับ — เพราะถ้ามีดินสออยู่แล้ว เงื่อนไขทั้งสองวงเล็บผ่านทันที

กับดัก · อย่าเอาไปปนกับเลขปกติ

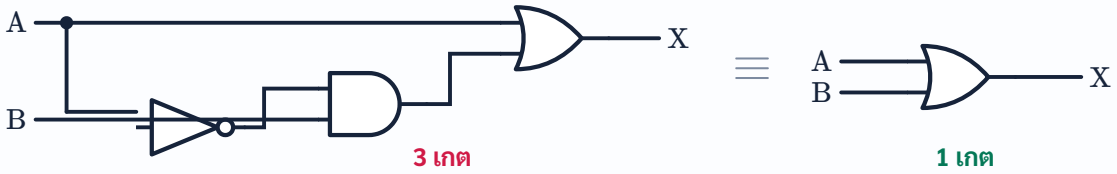
ในคณิตศาสตร์ธรรมดา $(a+b)(a+c) \neq a+bc$ เด็ดขาดครับ แต่ในบูลีน **เป็นจริง** เพราะ $AA = A$ (ไม่ใช่ A^2) และเพราะมี absorption **สไลด์หน้า 59 เรียกกฎนี้ว่า “Distributive Laws I” ด้วย** — ถ้าข้อสอบเขียนแบบนั้น อย่าตกใจครับ สูตรคืออันนี้

กฎที่ 11 — Distributive Law III (ขีดที่ตัดทิ้งได้)

สไลด์หน้า 35 เว้นว่างไว้ครับ ของจริงคือกฎที่คนมองข้ามบ่อยที่สุด แต่โผล่ในข้อสอบประจำ

$$A + \overline{A}B = A + B \qquad \overline{A} + AB = \overline{A} + B$$

Distributive Law III — เจอ $\overline{A}$ ติดอยู่หน้า B ทั้งที่มี A ลอยอยู่แล้ว ให้ตัดขีดทิ้ง



3 เกต เหลือ 1 เกต — กฎนี้ประหยัดเยอะมากและคนมักมองไม่เห็น

A	B	$\overline{A}B$	$A + \overline{A}B$	$A + B$
0	0	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	1	0	1	1

ที่มา

$A + \overline{A}B$

$= (A + \overline{A})(A + B)$ (Distributive II อ่านย้อนกลับ)

$= 1 \cdot (A + B)$ (Complementary I)

$= A + B$ (Identity II)

ของใกล้ตัว

“มีดินสอ **หรือ** (ไม่มีดินสอแต่มียางลบ)” — ก็คือ “มีดินสอหรือมียางลบ” ครับ เพราะเงื่อนไข “ไม่มีดินสอ” มันซ้ำซ้อนกับกรณีแรกอยู่แล้ว

กับดักรวมของหัวข้อนี้ · absorption vs distributive III

สองกฎนี้หน้าตาคล้ายกันมาก ต่างกันแค่**ขีดบนตัวเดียว**ครับ:

$A + AB = A$ **(absorption — พจน์ยาวหายไปทั้งพจน์)**

$A + \overline{A}B = A + B$ **(distributive III — เหลือ B ไว้ แค่ขีดหาย)**

วิธีเช็คก่อนลงมือทุกครั้ง: ดูว่าตัวหน้ากับตัวในพจน์ยาว**ขีดตรงกันไหม** — ตรงกัน = absorption (ทิ้งทั้งพจน์) · ตรงข้ามกัน = distributive III (ทิ้งแค่ขีด)

I DO — พี่ทำให้ดู

พิสูจน์ absorption law I จากกฎที่เล็กกว่า ทีละบรรทัดพร้อมชื่อกฎ

โจทย์: **จงพิสูจน์ว่า $A + AB = A$ โดยใช้กฎอื่นเท่านั้น ห้ามใช้ตารางค่าความจริง** พี่ทำให้ดูทีละขั้นครับ สังเกตว่าทุกบรรทัดต้องมีชื่อกฎกำกับ ไม่งั้นในข้อสอบจะไม่ได้คะแนน

1 $A + AB$

ตั้งต้นจากโจทย์

$A + AB$ — เป้าหมายคือทำให้เหลือ A ตัวเดียว **เพราะ** เราเห็นว่า A โผล่ในทั้งสองพจน์ พี่เลยเดาว่าปลายทางต้องดึง A ออกมาครับ

2 $A \cdot 1 + AB$

แปลง A เป็น $A \cdot 1$ ก่อน — Identity Law II

$A + AB = A \cdot 1 + AB$ **เพราะ** พจน์แรกยังไม่มีตัวคูณให้ดึงตัวร่วมออกมาได้ พี่เลยใส่ $\cdot 1$ เข้าไปซึ่งไม่เปลี่ยนค่าอะไรเลย (กฎ $A \cdot 1 = A$ อ่านย้อนกลับ)

3 $A(1 + B)$

ดึง A เป็นตัวร่วม — Distributive Law I

$A \cdot 1 + A \cdot B = A(1 + B)$ **เพราะ** กฎ $A(B + C) = AB + AC$ อ่านจากขวาไปซ้าย คือการดึงตัวร่วม ตอนนี้ A ออกมานอกวงเล็บแล้วครับ

4 $A \cdot 1 = A$

ยุบวงเล็บแล้วปิดงาน — Null Law I **แล้วตามด้วย** Identity Law II

$1 + B = 1$ (Null I) จึงได้ $A \cdot 1$ แล้ว $A \cdot 1 = A$ (Identity II) **เพราะ** อะไร OR กับ 1 ก็ได้ 1 เสมอ ไม่ต้องสนว่า B เป็นอะไรครับ

ตอบ: $A + AB = A$ (Q.E.D.)

สังเกตท่าที่ใช้ซ้ำได้ตลอด EP

“เติม $\cdot 1$ → ดึงตัวร่วม → ยุบวงเล็บด้วย Null” คือลูกไม้ชุดเดียวกันที่จะโผล่อีกใน Assignment ข้อ 4a ครับ ถ้าจำได้ท่านี้ท่าเดียว น้องแก้โจทย์ย่อได้ครึ่งหนึ่งของทั้งชุดแล้ว

WE DO — ทำด้วยกัน

เติมชื่อกฎในแต่ละบรรทัด แล้วดูเฉลยว่าคิดตรงกันไหม

W2.1

> Name the Boolean law used in each line of the following simplification.

โจทย์: ย่อ $A(A+B)$ ให้เหลือ A แล้วบอกว่าแต่ละบรรทัดใช้กฎอะไรครับ

$$A(A+B) = AA + AB$$

บรรทัด 1 ใช้กฎ .....

$$AA + AB = A + AB$$

บรรทัด 2 ใช้กฎ .....

$$A + AB = A$$

บรรทัด 3 ใช้กฎ .....

เฉลย W2.1

บรรทัด 1 — Distributive Law I ($A(B+C) = AB + AC$) ครับ ตรงนี้แจก A เข้าไปในวงเล็บทั้งสองตัว ได้ $A \cdot A$ กับ $A \cdot B$ **เหตุผลที่ต้องแจก** คือเราอยากให้พจน์แยกกันก่อน จะได้เห็นของซ้ำ

บรรทัด 2 — Idempotent Law II ($A \cdot A = A$) ครับ อย่าเผลอเขียนเป็น A^2 เด็ดขาด บูลีนไม่มียกกำลัง เพราะ $1 \cdot 1 = 1$ และ $0 \cdot 0 = 0$ ก็คือตัวเดิมทั้งคู่

บรรทัด 3 — Absorption Law I ($A + AB = A$) ครับ พจน์ AB ถูก A กลืนไปเลย

ตอบ: Distributive I → Idempotent II → Absorption I

“By the distributive law, $A(A+B) = AA + AB$; by idempotence $AA = A$; by absorption $A + AB = A$.”

YOU DO — ตาน้อง

ทำให้จบก่อนเลื่อนดูเฉลยนะครับ เฉลยอยู่ติดกันเลย

Y2.1

> Simplify: $AB + AB\overline{C}$. State the law used in every step.

ใบ้: มองหาตัวร่วมก่อนครับ แล้วจะเจอกฎที่ยุบวงเล็บได้ทันที

เฉลย Y2.1

ขั้น 1 — ดึงตัวร่วม AB ออกมา (Distributive Law I) เพราะทั้งสองพจน์มี AB อยู่เหมือนกันเป๊ะ: $AB + AB\overline{C} = AB(1 + \overline{C})$

ขั้น 2 — ยุบวงเล็บ (Null Law I) เพราะอะไร OR กับ 1 ก็ได้ 1: $1 + \overline{C} = 1$ ตรงนี้ไม่ต้องสนเลยว่า C เป็น 0 หรือ 1 ครับ ได้ $AB \cdot 1$

ขั้น 3 — ตัด $\cdot 1$ ทิ้ง (Identity Law II) เพราะ $X \cdot 1 = X$ เสมอ

เช็คด้วยสามัญสำนึก: ถ้า $AB = 1$ อยู่แล้ว พจน์ที่สองจะเป็น 1 หรือ 0 ก็ไม่มีผล เพราะ OR ได้ 1 ไปแล้ว ✓

ตอบ: $AB + AB\overline{C} = AB$ — ใช้ Distributive I → Null I → Identity II
"$AB + AB\overline{C} = AB(1 + \overline{C}) = AB \cdot 1 = AB$."

Y2.2

> Simplify: $\overline{A} + A\overline{B}$. Which law applies here, absorption or distributive III?

ใบ้: เช็คก่อนว่าตัวหน้ากับตัวในพจน์ยาว "ขีดตรงกัน" หรือ "ขีดตรงข้าม" ครับ

เฉลย Y2.2

ขั้น 1 — เช็คขีดก่อนตัดสินใจ พจน์หน้าคือ $\overline{A}$ (มีขีด) ส่วนในพจน์ยาวคือ A (ไม่มีขีด) **ขีดตรงข้ามกัน** ครับ เพราะฉะนั้น**ไม่ใช่ absorption** ต้องใช้ Distributive Law III

ขั้น 2 — ใช้ Distributive Law III รูปที่สอง คือ $\overline{A} + AB = \overline{A} + B$ ในข้อนี้ B ของสูตรคือ $\overline{B}$ ของโจทย์ จึงได้ $\overline{A} + \overline{B}$

ขั้น 3 — ตรวจด้วยตารางย่อ ๆ $A = 0$: ซ้าย $= 1 + 0 = 1$, ขวา $= 1 + \overline{B} = 1$ ✓ $\cdot$ $A = 1, B = 0$: ซ้าย $= 0 + 1 = 1$, ขวา $= 0 + 1 = 1$ ✓ $\cdot$ $A = 1, B = 1$: ซ้าย $= 0 + 0 = 0$, ขวา $= 0 + 0 = 0$ ✓

ตอบ: $\overline{A} + A\overline{B} = \overline{A} + \overline{B}$ — ใช้ Distributive Law III
"Since the leading term is $\overline{A}$ and the long term contains A, distributive law III applies: $\overline{A} + A\overline{B} = \overline{A} + \overline{B}$."

Y2.3

> Simplify: $A\overline{A}B + AB$.

ใบ้: ดูพจน์แรกให้ดี ๆ ครับ มีอะไรแปลก ๆ อยู่ในนั้น

เฉลย Y2.3

ขั้น 1 — สแกนหา X กับ $\overline{X}$ ในพจน์เดียวกัน พจน์แรกคือ $A\overline{A}B$ ซึ่งมีทั้ง A และ $\overline{A}$ คูณกันอยู่ **เพราะ** Complementary Law II บอกว่า $A\overline{A} = 0$ พจน์นี้จึงเป็น $0 \cdot B$

ขั้น 2 — $0 \cdot B = 0$ (Null Law II) เพราะอะไรคูณ 0 ก็ได้ 0 ครับ พจน์แรกหายไปทั้งพจน์

ขั้น 3 — เหลือ $0 + AB$ แล้วใช้ Identity Law I $(X + 0 = X)$ ได้ AB

กับดักที่คนพลาด: บางคนเห็น $A\overline{A}B$ แล้วเผลอตัดแค่ $\overline{A}$ ทิ้งเหลือ AB แล้วตอบ $AB + AB = AB$ ซึ่ง**บังเอิญได้คำตอบเดียวกันแต่เหตุผลผิดสนิท**ครับ ข้อสอบหักคะแนนตรงเหตุผล

ตอบ: $A\overline{A}B + AB = AB$ — ใช้ Complementary II → Null II → Identity I
"$A\overline{A} = 0$, so $A\overline{A}B = 0$ and the expression reduces to AB."

3 De Morgan — ขีดแตก เครื่องหมายพลิก

ตะขอเกี่ยว · รับจากหัวข้อ 2

12 กฎในหัวข้อที่แล้วเก่งมากครับ แต่มันมีจุดอ่อนอยู่จุดเดียว — **ทุกกฎจัดการได้เฉพาะนิพจน์ที่ขีดบนอยู่บนตัวแปรเดี่ยว ๆ เท่านั้น** ไม่มีกฎไหนเลยที่บอกว่า “ถ้าขีดคลุมทั้งก้อนต้องทำยังไง”

สมมติว่าถ้าน้องเจอ $\overline{A+B}$ ที่ขีดยาวคลุมทั้ง A ทั้ง B ล่ะครับ จะกระจายขีดเข้าไปข้างในยังไง — คำตอบคือ De Morgan's laws ซึ่งเป็น**หัวใจของ EP นี้** และเป็นเนื้อหาที่ Assignment ข้อ 3 ทั้ง 9 ข้อย่อยถามล้วน ๆ ครับ

ของใกล้ตัว: ประโยคปฏิเสธในชีวิตประจำวัน

ลองอ่านสองประโยคนี้ช้า ๆ ครับ

ประโยคที่ 1

“ไม่จริงที่ว่า (มีดินสอ หรือ มียางลบ)”

ถ้าประโยคนี้จริง แปลว่า**ไม่มีดินสอ และ ไม่มียางลบ** — ต้องไม่มีทั้งคู่ครับ ขาดตัวเดียวไม่พอ

$$\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

ประโยคที่ 2

“ไม่จริงที่ว่า (มีดินสอ และ มียางลบ)”

ถ้าประโยคนี้จริง แปลว่า**ไม่มีดินสอ หรือ ไม่มียางลบ** — ขาดอย่างใดอย่างหนึ่งก็พอครับ ไม่จำเป็นต้องขาดทั้งคู่

$$\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$$

สังเกตไหมครับว่าพอเอาคำว่า “ไม่จริงที่ว่า” กระจายเข้าไปข้างใน **คำว่า “หรือ” กลายเป็น “และ” และ “และ” กลายเป็น “หรือ” — นั่นแหละคือ De Morgan ทั้งหมด**ครับ น้องใช้กฎนี้ในชีวิตประจำวันมาตั้งแต่เด็กแล้ว แค่ไม่เคยรู้ว่ามันมีชื่อ

นิยาม · De Morgan's Laws — ท่องได้เลย

$$\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

De Morgan's Law I — ขีดคลุมผลบวก แตกแล้วกลายเป็นผลคูณของขีด

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

De Morgan's Law II — ขีดคลุมผลคูณ แตกแล้วกลายเป็นผลบวกของขีด

สไลด์หน้า 48 สรุปวิธีจำไว้เป็นภาษาอังกฤษว่า **Break the bar and change the sign!** พี่แปลเป็นภาษาไทยสั้น ๆ ว่า **“ขีดแตก เครื่องหมายพลิก”** ครับ — จำแค่นี้พอ

พิสูจน์เต็ม ๆ ด้วยตารางค่าความจริง (ห้ามเชื่อโดยไม่พิสูจน์)

พี่ไม่อยากให้น้องท่องลอย ๆ ครับ กางตารางออกมาดูเลยว่ามันเท่ากันจริงทุกแถวไหม

De Morgan's Law I: $\overline{A+B} = \overline{A}\,\overline{B}$

A	B	$A+B$	$\overline{A+B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A}\,\overline{B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

อ่านยังไง

ดูคอลัมน์ที่ 4 ($\overline{A+B}$) เทียบกับคอลัมน์สุดท้าย ($\overline{A}\,\overline{B}$) ครับ — ได้ **1, 0, 0, 0** เหมือนกันทั้งสี่แถว

แถวเดียวที่ออก 1 คือแถว $A=0, B=0$ ซึ่งตรงกับภาษาคน: “ไม่มีทั้งคู่” นั่นเองครับ

De Morgan's Law II: $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$

A	B	AB	$\overline{AB}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A}+\overline{B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

อ่านยังไง

คอลัมน์ที่ 4 ($\overline{AB}$) กับคอลัมน์สุดท้าย ($\overline{A}+\overline{B}$) ได้ **1, 1, 1, 0** เหมือนกันหมดครับ

แถวเดียวที่ออก 0 คือแถว $A=1, B=1$ — ก็คือ “มีครบทั้งคู่ถึงจะเท็จ” ครับ

กับดักอันดับ 1 ของทั้ง EP

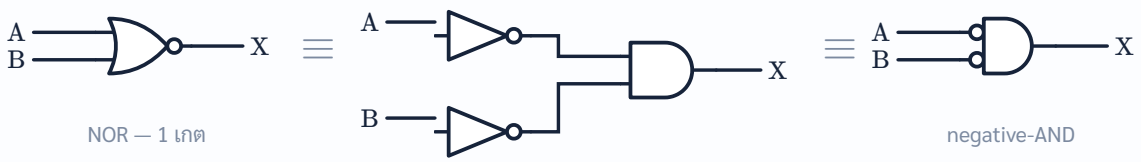
$\overline{A+B}$ **ไม่เท่ากับ** $\overline{A}+\overline{B}$ **เด็ดขาดครับ** นี่คือความผิดที่คนทำเสียคะแนนเยอะที่สุด เพราะเผลอ “แตกขีดแล้วลืมพลิกเครื่องหมาย”

ลองแทนค่า $A=1, B=0$ **ดูครับ:**
ของจริง $\overline{A+B} = \overline{1+0} = \overline{1} = 0$
ของผิด $\overline{A}+\overline{B} = 0+1 = 1$ **— ต่างกันคนละขั้วเลย**

วิธีกันพลาด: ทุกครั้งที่แตกขีด ให้เขียนเครื่องหมายใหม่**ก่อน**เขียนตัวแปร บังคับมือตัวเองให้พลิกเครื่องหมายเสมอครับ

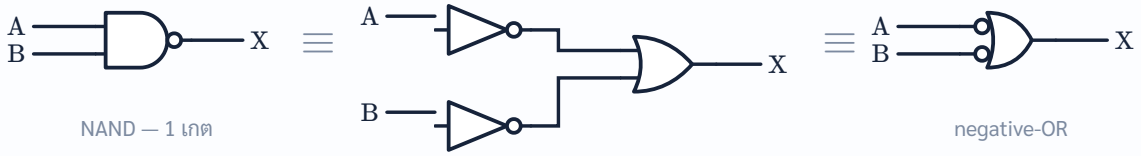
ดูจากวงจร: NOR คือ negative-AND และ NAND คือ negative-OR

นี่คือ dual symbol ที่น้องเห็นตอนท้าย EP05 ครับ ตอนนั้นพี่บอกว่า “เดี๋ยว EP06 จะพิสูจน์ให้ดูว่าทำไม” — ตอนนี้ถึงเวลาแล้ว **เหตุผลก็คือ De Morgan นี่เอง**



NOR — 1 เกต | อินเวอร์เตอร์ 2 + AND 1 = 3 เกต | negative-AND

De Morgan I — $\overline{A+B}$ (NOR ตัวเดียว) = $\overline{A}\,\overline{B}$ (อินเวอร์เตอร์ 2 + AND) = สัญลักษณ์ negative-AND



NAND — 1 เกต | อินเวอร์เตอร์ 2 + OR 1 = 3 เกต | negative-OR

De Morgan II — $\overline{AB}$ (NAND ตัวเดียว) = $\overline{A}+\overline{B}$ (อินเวอร์เตอร์ 2 + OR) = สัญลักษณ์ negative-OR

A	B	$\overline{A+B}$ (NOR)	$\overline{A}\,\overline{B}$ (neg-AND)	$\overline{AB}$ (NAND)	$\overline{A}+\overline{B}$ (neg-OR)
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	0	0

เทียบของเก่า · EP05

EP05 น้องท่องว่า “NOR = negative-AND” และ “NAND = negative-OR” เป็นข้อเท็จจริงไปก่อนครับ **ตอนนี้น้องเห็นแล้วว่ามันไม่ใช่เรื่องบังเอิญ — มันคือ De Morgan เขียนเป็นรูปเกต**

คอลัมน์ที่ 3 กับ 4 ในตารางเหมือนกัน (De Morgan I) และคอลัมน์ที่ 5 กับ 6 เหมือนกัน (De Morgan II) ครับ

ทางลัดอ่านสัญลักษณ์ dual

วงกลมเล็ก (bubble) ทุกวงคือขีดบนหนึ่งขีดครับ — ย้ายวงกลมจากขาออกไปไว้ที่ขาเข้าทุกขา แล้วพลิกรูปเกตจาก AND เป็น OR (หรือกลับกัน) ได้สัญลักษณ์ dual ที่แทนกันได้ทันที นี่คือ De Morgan ในภาษารูปวาดครับ

ขยายไปตัวแปรกี่ตัวก็ได้ — ข้อสอบชอบให้ 3–4 ตัว

De Morgan ไม่ได้จำกัดแค่ 2 ตัวแปรครับ กฎเดิมเป๊ะ ๆ ใช้ได้กับกี่ตัวก็ได้

$$\overline{A+B+C}=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} \qquad \overline{ABC}=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$$

แตกขีดยาวออก แล้วพลิกเครื่องหมายทุกตัวที่อยู่ใต้ขีดนั้น

A	B	C	$\overline{A+B+C}$	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{ABC}$	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

ยืนยันจากตาราง 8 แถว

คอลัมน์ที่ 4 กับ 5 เหมือนกันหมด (De Morgan I สามตัวแปร) และคอลัมน์ที่ 6 กับ 7 เหมือนกันหมด (De Morgan II สามตัวแปร) ครับ

ข้อสังเกตที่ใช้ตรวจงานได้เร็ว ๆ:
$\overline{A+B+C}$ ออก 1 แถวเดียว (000) ส่วน $\overline{ABC}$ ออก 0 แถวเดียว (111) ครับ

★ ทางลัดหลักของ EP นี้ — ท่องประโยคเดียวจบ

“ขีดแตก เครื่องหมายพลิก”

แปลเป็นขั้นตอนทำจริงคือ 3 ขั้นครับ:

① ลบขีดยาวที่คลุมทั้งก้อนออก
② พลิกเครื่องหมายหลักที่อยู่ใต้ขีดนั้น — $+$ เป็น $\cdot$ หรือ $\cdot$ เป็น $+$
③ แจกขีดใหม่ให้ทุกก้อนย่อยที่อยู่ใต้ขีดเดิม ก้อนละหนึ่งขีด

ตัวอย่างเดินตามสามขั้น: $\overline{AB+CD}$ → ① ลบขีดยาว ② $+$ กลายเป็น $\cdot$ ③ แจกขีดให้ AB กับ CD → ได้ $\overline{AB}\cdot\overline{CD}$ แล้วทำซ้ำอีกรอบกับขีดที่เหลือ ได้ $(\overline{A}+\overline{B})(\overline{C}+\overline{D})$ ครับ

ตัวอย่างจากสไลด์หน้า 49 — ทำให้ครบทั้งสามข้อ

Ex 49.1 สไลด์ Week 3 หน้า 49

> Apply De Morgan's laws to: $\overline{XYZ}$

ขีดคลุมผลคูณสามตัว

เฉลย Ex 49.1

ขั้น 1 — ดูว่าใต้ขีดเป็นเครื่องหมายอะไร ใต้ขีดคือ $X \cdot Y \cdot Z$ เป็นการ**คูณ** ครับ เพราะฉะนั้นใช้ De Morgan's Law II

ขั้น 2 — ขีดแตก เครื่องหมายพลิก คูณกลายเป็นบวก และแจกขีดให้ทุกตัว

ตอบ: $\overline{XYZ} = \overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}$

"By De Morgan's second law, $\overline{XYZ} = \overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}$."

Ex 49.2 สไลด์ Week 3 หน้า 49

> Apply De Morgan's laws to: $\overline{W + X + Y + Z}$

ขีดคลุมผลบวกสี่ตัว

เฉลย Ex 49.2

ขั้น 1 — ใต้ขีดเป็นการบวก ($+$ ทั้งสามที่) เพราะฉะนั้นใช้ De Morgan's Law I ครับ

ขั้น 2 — ขีดแตก เครื่องหมายพลิก บวกทุกตัวกลายเป็นคูณ และตัวแปรทั้งสี่ได้ขีดคนละหนึ่งขีด

ขั้น 3 — ตรวจด้วยสามัญสำนึก ฝั่งซ้ายออก 1 เมื่อ $W + X + Y + Z = 0$ คือทุกตัวต้องเป็น 0 ฝั่งขวาออก 1 เมื่อทุกตัวมีขีดแล้วเป็น 1 ก็คือทุกตัวเดิมเป็น 0 เหมือนกันเป๊ะ ✓

ตอบ: $\overline{W + X + Y + Z} = \overline{W}\,\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$

"By De Morgan's first law, $\overline{W + X + Y + Z} = \overline{W}\,\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$."

Ex 49.3 สไลด์ Week 3 หน้า 49

> Apply De Morgan's laws to: $\overline{(A + B + C)D}$

ระวังครับ — ใต้ขีดยาวมีสองก้อน คือ $(A + B + C)$ กับ D คูณกันอยู่

เฉลย Ex 49.3

ขั้น 1 — มองให้ออกว่า "ก้อน" ใต้ขีดคืออะไร ใต้ขีดคือ $(A + B + C) \times D$ นะครับ ไม่ใช่ $A + B + C + D$ **เพราะ** เครื่องหมายหลักที่อยู่ใต้ขีดคือการคูณระหว่างวงเล็บกับ D

ขั้น 2 — ใช้ De Morgan II กับสองก้อนนั้น คูณกลายเป็นบวก แต่ละก้อนได้ขีดของตัวเอง: $\overline{(A + B + C)} + \overline{D}$

ขั้น 3 — ยังมีขีดคลุมมากกว่าหนึ่งตัวเหลืออยู่ ต้องแตกต่อ $\overline{(A + B + C)}$ ใต้ขีดเป็นบวก ใช้ De Morgan I ได้ $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$

ขั้น 4 — ประกอบกลับ ตอนนี้ไม่มีขีดไหนคลุมเกินหนึ่งตัวแล้ว จบครับ

ตอบ: $\overline{(A+B+C)D} = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{D}$

"$\overline{(A+B+C)D} = \overline{(A+B+C)} + \overline{D} = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{D}$*."*

สไลด์อีกหน้าใช้สัญกรณ์ขีดข้าง (prime) — อ่านให้ออกด้วย

มีสไลด์หนึ่งเขียนโจทย์เป็น `A'` แทน $\overline{A}$ ครับ **ความหมายเหมือนกันเป๊ะ** แค่พิมพ์ง่ายกว่า พี่แปลงให้ดูทั้งสี่ข้อพร้อมคำตอบ (โจทย์บอกว่า `Remove every bar so that no bar covers more than one variable` — **นี่คือคำสั่งเดียวกับ Assignment ข้อ 3 เป๊ะ ๆ**)

ข้อ	เขียนแบบ prime	เขียนแบบขีดบน	คำตอบ
1)	`( A' + B + C' )'`	$\overline{\overline{A}+B+\overline{C}}$	$A\overline{B}C$
2)	`( (A + B) C )'`	$\overline{(A+B)C}$	$\overline{A}\,\overline{B}+\overline{C}$
3)	`( AB + CD )'`	$\overline{AB+CD}$	$(\overline{A}+\overline{B})(\overline{C}+\overline{D})$
4)	`( A' B' )'`	$\overline{\overline{A}\,\overline{B}}$	$A+B$

ข้อ 1 คิดยังไง: ใต้ขีดเป็นบวก → พลิกเป็นคูณ → แจกขีดได้ $\overline{\overline{A}} \cdot \overline{B} \cdot \overline{\overline{C}}$ แล้ว involution ตัดขีดคู่ทิ้ง เหลือ $A\overline{B}C$ ครับ

ข้อ 4 คิดยังไง: ใต้ขีดเป็นคูณ → พลิกเป็นบวก → ได้ $\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}}$ แล้ว involution ทั้งสองตัว เหลือ $A+B$ — **นี่คือ NAND ของอินพุตที่กลับค่ามาแล้ว ก็คือ OR ธรรมดา**ครับ

ศัพท์สอบของหัวข้อนี้

English	แปลว่า	ข้อสอบเขียนมาแบบนี้
De Morgan's law	กฎเดอมอร์แกน	*Apply De Morgan's laws to the following expressions*
break the bar	แตกขีดออก	*Break the bar and change the sign*
bar / overbar	ขีดบน (ตัวกลับค่า)	*Remove every bar so that no bar covers more than one variable*
negative-AND	สัญลักษณ์คู่ของ NOR	*redraw using the negative-AND symbol*
negative-OR	สัญลักษณ์คู่ของ NAND	*redraw using the negative-OR symbol*

I DO — พี่ทำให้ดู

แตกขีดที่มีขีดเล็กซ่อนอยู่ข้างใน ทีละขั้นพร้อมภาพว่าขีดไหนกำลังโดน

โจทย์ของพี่: **Apply De Morgan's laws to** $\overline{A + \overline{B}C}$ ข้อนี้มีทั้งขีดยาวและขีดสั้นอยู่ด้วยกัน — ดูให้ดีว่าพี่จัดการเรียงลำดับยังไงครับ

1



ระบุขีดชั้นบนสุดก่อน (เส้นแดง)

ขีดยาวคลุม $A + \overline{B}C$ ทั้งก้อน ส่วน B มีขีดเล็กของตัวเองอยู่ข้างใน **เพราะ** เราต้องแตกจากชั้นนอกเข้าไปเสมอ ขีดเล็กของ B ยังไม่แตะครับ

2



แตกขีดยาว — $+$ พลิกเป็น $\cdot$

ใต้ขีดยาวมีสองก้อนคือ A กับ $\overline{B}C$ บวกกันอยู่ ใช้ De Morgan I ได้ $\overline{A} \cdot \overline{\overline{B}C}$ **เพราะ** ขีดยาวหายไป เครื่องหมายพลิก และแต่ละก้อนได้ขีดใหม่ก้อนละหนึ่งขีดครับ

3



ยังมีขีดคลุมสองตัวเหลืออยู่ — แตกต่ออีกรอบ

$\overline{\overline{B}C}$ ใต้ขีดเป็นการคูณ ใช้ De Morgan II ได้ $\overline{\overline{B}} + \overline{C}$ **เพราะ** โจทย์แบบนี้บังคับว่าห้ามเหลือขีดที่คลุมเกินหนึ่งตัว ต้องแตกจนหมดครับ

4



เก็บกวาดขีดซ้อนด้วย involution

$\overline{\overline{B}} = B$ **เพราะ** ขีดสองชั้นบนตัวเดียวกันตัดทิ้งได้ (Involution Law) ได้ $\overline{A}(B + \overline{C})$ — ตอนนี้ทุกขีดคลุมตัวเดียวแล้ว จบครับ

ตอบ: $\overline{A + \overline{B}C} = \overline{A}(B + \overline{C}) = \overline{A}B + \overline{A}\,\overline{C}$

ตรวจงานเสมอก่อนส่ง

แทน $A = 0, B = 1, C = 1$ ครับ: ฝั่งซ้าย $= \overline{0 + \overline{1} \cdot 1} = \overline{0 + 0} = 1$ · ฝั่งขวา $= \overline{0}(1 + \overline{1}) = 1 \cdot 1 = 1$ ✓

แทน $A = 1$: ฝั่งซ้าย $= \overline{1 + \cdots} = 0$ · ฝั่งขวา $= \overline{1}(\cdots) = 0$ ✓

WE DO — ทำด้วยกัน

เติมช่องว่างเองก่อน แล้วค่อยดูเฉลยที่อธิบายทุกช่องครับ

W3.1

> Apply De Morgan's laws to $\overline{(X+Y)\overline{Z}}$ so that no bar covers more than one variable.

เติมทีละบรรทัดครับ

$$\overline{(X+Y)\overline{Z}} = \overline{(X+Y)} \square \overline{\overline{Z}}$$

ช่อง $\square$ คือเครื่องหมาย .....

$$\overline{(X+Y)} = ...$$

ใช้กฎ .....

$$\overline{\overline{Z}} = ...$$

ใช้กฎ .....

เฉลย W3.1

ช่องที่ 1 — เครื่องหมายคือ $+$ ครับ เหตุผล: ใต้ขีดยาวคือ $(X+Y)$ **คูณ**กับ $\overline{Z}$ เมื่อขีดแตก การคูณต้องพลิกเป็นการบวก (De Morgan's Law II) จึงได้ $\overline{(X+Y)} + \overline{\overline{Z}}$

ช่องที่ 2 — $\overline{(X+Y)} = \overline{X}\,\overline{Y}$ ครับ ใช้ De Morgan's Law I เหตุผล: ใต้ขีดนี้เป็นการบวก พอแตกขีดแล้วบวกต้องพลิกเป็นคูณ และ X กับ Y ได้ขีดคนละหนึ่งขีด

ช่องที่ 3 — $\overline{\overline{Z}} = Z$ ครับ ใช้ Involution Law เหตุผล: ขีดสองชั้นคลุม Z ตัวเดียวเป๊ะ กลับค่าสองครั้งเท่ากับไม่ได้กลับ ตัดทิ้งได้เลย

ประกอบร่าง: $\overline{(X+Y)\overline{Z}} = \overline{X}\,\overline{Y} + Z$ ครับ ตอนนี้ทุกขีดคลุมตัวเดียวแล้ว

ตรวจ: $X=0, Y=0, Z=0 \rightarrow$ ซ้าย $= \overline{0 \cdot 1} = 1 \cdot$ ขวา $= 1 \cdot 1 + 0 = 1$ ✓ $\cdot X=1, Y=0, Z=0 \rightarrow$ ซ้าย $= \overline{1 \cdot 1} = 0 \cdot$ ขวา $= 0 \cdot 1 + 0 = 0$ ✓

ตอบ: $\overline{(X+Y)\overline{Z}} = \overline{X}\,\overline{Y} + Z$
"$\overline{(X+Y)\overline{Z}} = \overline{(X+Y)} + \overline{\overline{Z}} = \overline{X}\,\overline{Y} + Z$."

YOU DO — ตาน้อง

สามข้อนี้ครอบทุกทรงที่ Assignment ข้อ 3 จะถามครับ

Y3.1

> Apply De Morgan's laws to $\overline{P\overline{Q}}$.

ขีดยาวคลุมผลคูณของสองก้อน โดยก้อนที่สองมีขีดของตัวเองอยู่แล้ว

เฉลย Y3.1

ขั้น 1 — ดูเครื่องหมายใต้ขีดยาว คือ P **คูณ** $\overline{Q}$ เพราะฉะนั้นใช้ De Morgan's Law II ครับ

ขั้น 2 — ขีดแตก เครื่องหมายพลิก คูณเป็นบวก แจกขีดให้สองก้อน: $\overline{P} + \overline{\overline{Q}}$

ขั้น 3 — เก็บขีดซ้อน $\overline{\overline{Q}} = Q$ ด้วย Involution Law **เพราะ** ขีดสองชั้นคลุมตัวเดียวกันเป๊ะ

ตรวจ: $P = 1, Q = 0 \rightarrow$ ซ้าย $= \overline{1 \cdot 1} = 0 \cdot$ ขวา $= 0 + 0 = 0$ ✓ $\cdot P = 1, Q = 1 \rightarrow$ ซ้าย $= \overline{1 \cdot 0} = 1 \cdot$ ขวา $= 0 + 1 = 1$ ✓

ตอบ: $\overline{P\overline{Q}} = \overline{P} + Q$
"$\overline{P\overline{Q}} = \overline{P} + \overline{\overline{Q}} = \overline{P} + Q$*."*

Y3.2

> Apply De Morgan's laws to $\overline{\overline{M} + N + \overline{K}}$.

สามก้อนใต้ขีดเดียว และสองในสามมีขีดของตัวเองอยู่แล้ว

เฉลย Y3.2

ขั้น 1 — ใต้ขีดยาวเป็นการบวกสามก้อน ใช้ De Morgan's Law I ครับ (กฎขยายไปกี่ก้อนก็ได้ ไม่ได้จำกัดแค่สอง)

ขั้น 2 — ขีดแตก เครื่องหมายพลิก บวกทั้งหมดกลายเป็นคูณ และทุกก้อนได้ขีดใหม่ก้อนละหนึ่งขีด: $\overline{\overline{M}} \cdot \overline{N} \cdot \overline{\overline{K}}$

ขั้น 3 — เก็บขีดซ้อนสองที่ $\overline{\overline{M}} = M$ และ $\overline{\overline{K}} = K$ (Involution Law ทั้งคู่) ส่วน $\overline{N}$ มีขีดชั้นเดียว ปล่อยไว้

ตรวจ: $M = 1, N = 0, K = 1 \rightarrow$ ซ้าย $= \overline{0 + 0 + 0} = 1 \cdot$ ขวา $= 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ ✓ $\cdot M = 1, N = 1, K = 1 \rightarrow$ ซ้าย $= \overline{0 + 1 + 0} = 0 \cdot$ ขวา $= 1 \cdot 0 \cdot 1 = 0$ ✓

ตอบ: $\overline{\overline{M} + N + \overline{K}} = M\overline{N}K$
"$\overline{\overline{M} + N + \overline{K}} = \overline{\overline{M}} \cdot \overline{N} \cdot \overline{\overline{K}} = M\overline{N}K$*."*

Y3.3

> Apply De Morgan's laws to $\overline{(A+B)(C+D)}$.

ขีดยาวคลุมผลคูณของสองวงเล็บ — ต้องแตกสองรอบครับ

เฉลย Y3.3

ขั้น 1 — ระบุก้อนใต้ขีดยาว คือ $(A+B)$ **คูณ** $(C+D)$ ครับ ใช้ De Morgan's Law II

ขั้น 2 — แตกรอบแรก คูณพลิกเป็นบวก แต่ละวงเล็บได้ขีดของตัวเอง: $\overline{(A+B)} + \overline{(C+D)}$

ขั้น 3 — แตกรอบสอง (ทั้งสองก้อนพร้อมกันได้ เพราะอยู่คนละชั้นกัน ไม่ซ้อนกัน) ใต้ขีดของแต่ละวงเล็บเป็นการบวก ใช้ De Morgan I ทั้งคู่: $\overline{A}\,\overline{B} + \overline{C}\,\overline{D}$

ตรวจ: $A=0, B=0, C=1, D=1 \rightarrow$ ซ้าย $= \overline{0 \cdot 1} = 1 \cdot$ ขวา $= 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1$ ✓ $\cdot\ A=1, B=0, C=1, D=0 \rightarrow$ ซ้าย $= \overline{1 \cdot 1} = 0 \cdot$ ขวา $= 0 + 0 = 0$ ✓

กับดักของข้อนี้: คนชอบตอบ $(\overline{A}+\overline{B})(\overline{C}+\overline{D})$ ครับ นั่นคือแตกขีดแล้ว**ลืมพลิกเครื่องหมายชั้นนอก** — ผิดคนละขั้วเลย

ตอบ: $\overline{(A+B)(C+D)} = \overline{A}\,\overline{B} + \overline{C}\,\overline{D}$
“$\overline{(A+B)(C+D)} = \overline{(A+B)} + \overline{(C+D)} = \overline{A}\,\overline{B} + \overline{C}\,\overline{D}$*.”*

4 ขีดซ้อนขีด — แตกทีละชั้นจากบนลงล่าง

ตะขอเกี่ยว · รับจากหัวข้อ 3

หัวข้อที่แล้วน้องแตกขีดเป็นแล้วครับ แต่ทุกตัวอย่างที่ผ่านมามี**ขีดยาวชั้นเดียว**เท่านั้น

สมมติว่าถ้าน้องเจอ $\overline{\overline{ABC} + D + E}$ ที่มีขีดซ้อนขีดสองชั้นล่ะครับ จะเริ่มจากขีดไหนก่อน — คำถามนี้แหละคือสิ่งที่ **Assignment ข้อ 3 ทดสอบล้วน ๆ ทั้ง 9 ข้อย่อย** และ**อ่านขีดผิดตัวเดียว เฉลยผิดทั้งข้อ** ครับ หัวข้อนี้พี่จึงทำเป็นวิธีทำแบบมีขั้นตอนตายตัวให้เลย

ก่อนอื่น: ต้อง “อ่านขีด” ให้ออกว่าขีดไหนคลุมถึงไหน

ขีดบนในนิพจน์บูลีนทำหน้าที่**เหมือนวงเล็บ**ครับ — ทุกอย่างที่อยู่**ใต้ขีดเดียวกัน**คือก้อนเดียวกัน เพราะฉะนั้นก่อนลงมือทำ ให้ทำสองอย่างนี้เสมอ

① ไล่นิ้วดูว่าขีดแต่ละเส้นเริ่มตรงไหน จบตรงไหน
โดยเฉพาะบนกระดาษข้อสอบที่พิมพ์เล็ก ๆ ครับ **ขีดที่ยาวกว่าอยู่สูงกว่าเสมอ** ถ้าเห็นเส้นสองเส้นซ้อนกัน เส้นบนคือชั้นนอก เส้นล่างคือชั้นใน

② ตั้งเลขชั้นให้ขีดทุกเส้น
พี่ให้เรียก**ขีดที่ติดตัวแปรที่สุด = ชั้น 1** แล้วนับสูงขึ้นไปเรื่อย ๆ ครับ **ชั้นที่เลขมากที่สุด = ขีดนอกสุด = ตัวที่ต้องแตกก่อน**

$$\overline{(\overline{A + B}) + \overline{C}}$$

แดง = ชั้น 2 (นอกสุด) · เขียว = ชั้น 1 (ในสุด)

ตัวอย่างการตั้งเลขชั้น — นี่คือ Assignment ข้อ 3(d) เป๊ะ ๆ ครับ: ขีดแดงคือชั้น 2 (คลุมทั้งหมด) ส่วนขีดเขียวสองเส้นคือชั้น 1 (เส้นหนึ่งคลุม $A + B$ อีกเส้นคลุม C)

★ วิธีทำแบบเป็นระบบ — ใช้ได้ทุกข้อ ไม่มีข้อยกเว้น

ขั้น 1 — ตั้งเลขชั้นให้ขีดทุกเส้น หาชั้นที่เลขมากที่สุด (ยาวสุด/สูงสุด)

ขั้น 2 — ดูว่า**ใต้ขีดชั้นนั้น**เครื่องหมายหลักคืออะไร ($+$ หรือ $\cdot$)

ขั้น 3 — แตกเฉพาะขีดชั้นนั้นชั้นเดียว: ลบขีดออก พลิกเครื่องหมาย แล้วแจกขีดใหม่ให้ทุกก้อนย่อยก้อนละหนึ่งขีด

ขั้น 4 — เจอขีดสองชั้นที่คลุม**ของสิ่งเดียวกันเป๊ะ** ตัดทิ้งด้วย involution ทันที

ขั้น 5 — ยังมีขีดไหนคลุมเกินหนึ่งตัวแปรอีกไหม? ถ้ามี กลับไปขั้น 1 ทำซ้ำ ถ้าไม่มี จบ

กฎเหล็กข้อเดียวที่ห้ามละเมิด: ห้ามแตกสองชั้นพร้อมกันเด็ดขาด — แตกทีละชั้น เขียนบรรทัดใหม่ทุกครั้ง ช้าแต่ถูก เร็วแต่ผิดไม่คุ้มครับ

ทำให้ดูทีละภาพ: $\overline{\overline{A}\,\overline{B}+C}$

ข้อนี้มีขีดชั้น 1 อยู่สองเส้น (บน A กับบน B) และขีดชั้น 2 หนึ่งเส้น (คลุมทั้งหมด) **ในรูปแต่ละขั้น เส้นสีแดงคือขีดที่กำลังถูกจัดการอยู่ครับ**

1



ตั้งเลขชั้น แล้วชี้ขีดนอกสุด

ขีดสีแดงคือชั้น 2 คลุม $\overline{A}\,\overline{B}+C$ ทั้งก้อน ส่วนขีดดำสองเส้นบน A กับ B คือชั้น 1 **เพราะ** ชั้น 2 สูงกว่าและยาวกว่า มันจึงเป็นตัวที่ต้องแตกก่อนครับ

2



แตกชั้น 2 — ใต้ขีดเป็น $+$ จึงพลิกเป็น $\cdot$

ใต้ขีดชั้น 2 มีสองก้อนคือ $\overline{A}\,\overline{B}$ และ C บวกกันอยู่ ใช้ De Morgan I ได้ $\overline{\overline{A}\,\overline{B}}\cdot\overline{C}$ **เพราะ** แต่ละก้อนย่อยได้ขีดใหม่ก้อนละหนึ่งขีด — ก้อนซ้ายเลยกลายเป็นขีดซ้อนขีดครับ

3



เช็คก่อน: ขีดซ้อนนี้ตัดด้วย involution ได้ไหม

ตัดไม่ได้ครับ เพราะขีดชั้นบนคลุม $\overline{A}\,\overline{B}$ ทั้งก้อน แต่ขีดชั้นล่างคลุมแค่ A กับ B แยกกัน **คนละขอบเขตกัน** — involution ใช้ได้เฉพาะตอนขีดสองชั้นคลุมของสิ่งเดียวกันเป๊ะเท่านั้น เพราะฉะนั้นต้องใช้ De Morgan ซ้ำ: ใต้ขีดเป็นการคูณ พลิกเป็นบวกได้ $\overline{\overline{A}}+\overline{\overline{B}}$

4	$(\mathrm{A} + \mathrm{B})\overline{\mathrm{C}}$	**ตอนนี้ค่อยใช้ involution ได้ แล้วจบ** $\overline{\overline{A}} = A$ และ $\overline{\overline{B}} = B$ **เพราะ** ตอนนี้ขีดสองชั้นคลุม A ตัวเดียว และ B ตัวเดียวจริง ๆ แล้ว ได้ $(A+B)\cdot\overline{C}$ — ไม่มีขีดไหนคลุมเกินหนึ่งตัวแล้ว จบครับ **ตอบ:** $\overline{\overline{A}\,\overline{B} + C} = (A+B)\overline{C} = A\overline{C} + B\overline{C}$

ตรวจงาน

$A=1, B=0, C=0 \rightarrow$ ซ้าย $= \overline{0\cdot 1 + 0} = \overline{0} = 1 \cdot$ ขวา $= (1+0)\cdot 1 = 1$ ✓

$A=0, B=0, C=0 \rightarrow$ ซ้าย $= \overline{1\cdot 1 + 0} = \overline{1} = 0 \cdot$ ขวา $= (0+0)\cdot 1 = 0$ ✓

$A=1, B=1, C=1 \rightarrow$ ซ้าย $= \overline{0 + 1} = 0 \cdot$ ขวา $= (1+1)\cdot 0 = 0$ ✓

สามกับดักของหัวข้อนี้ — อ่านให้ครบก่อนไปทำ Assignment

กับดัก 1 · แตกสองชั้นพร้อมกัน

คนใจร้อนเห็น $\overline{\overline{A}\,\overline{B} + C}$ แล้วกระโดดตอบ $AB\overline{C}$ ทันที (คิดว่า “ขีดสองชั้นตัดกันเอง เหลือ AB แล้ว + เป็น $\cdot$”) ครับ

ผิดครับ — คำตอบจริงคือ $(A+B)\overline{C}$ ไม่ใช่ $AB\overline{C}$

ลอง $A=1, B=0, C=0$: ของจริงได้ 1 แต่คำตอบผิดได้ $1\cdot 0\cdot 1 = 0$ — **ผิดคนละขั้ว**

วิธีกัน: บังคับตัวเองเขียนบรรทัดใหม่ทุกครั้งที่แตกหนึ่งชั้น ห้ามคิดในหัวข้ามขั้นเด็ดขาดครับ

กับดัก 2 · เข้าใจผิดว่า $\overline{\overline{A}B} = AB$

ขีดสองชั้นตรงนี้**ไม่ได้คลุมของสิ่งเดียวกัน**ครับ — ชั้นนอกคลุม $\overline{A}B$ ทั้งก้อน ชั้นในคลุมแค่ A เพราะฉะนั้น involution ใช้ไม่ได้

ของจริง: $\overline{\overline{A}B} = \overline{\overline{A}} + \overline{B} = A + \overline{B}$

ของผิด: AB — ลอง $A=1, B=1$: ของจริง $= \overline{0\cdot 1} = 1 \cdot$ ของผิด $= 1$ (บังเอิญตรง) แต่ลอง $A=1, B=0$: ของจริง $= \overline{0\cdot 0} = 1 \cdot$ ของผิด $= 0$ ✗

เช็ค involution ให้ผ่านก่อนใช้ทุกครั้ง: ขอบซ้ายของขีดสองเส้นต้องตรงกัน **และ** ขอบขวาต้องตรงกันด้วย ถ้าไม่ตรงแม้แต่ข้างเดียว ห้ามตัดครับ

กับดัก 3 · ลืมว่าใต้ขีดมี “ก้อน” ไม่ใช่ “ตัวแปร”

$\overline{(A+B)C}$ ใต้ขีดมีสองก้อนคือ $(A+B)$ กับ C **คูณ**กัน ไม่ใช่สามตัวแปรบวกกันครับ

ของจริง: $\overline{(A+B)C} = \overline{(A+B)} + \overline{C} = \overline{A}\,\overline{B} + \overline{C}$
ของผิดที่เจอบ่อย: $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ (เผลอมองเป็น $\overline{A+B+C}$)

วิธีกัน: ก่อนแตกทุกครั้ง ให้ถามตัวเองว่า **“เครื่องหมายที่อยู่นอกสุดใต้ขีดนี้คืออะไร”** — วงเล็บนับเป็นก้อนเดียว ต้องมองรวมครับ

ทางลัด · เช็คคำตอบก่อนส่งด้วยการนับขีด

โจทย์ Assignment ข้อ 3 สั่งว่า `Apply De Morgan's laws` ซึ่งหมายถึง**ทำจนไม่มีขีดไหนคลุมเกินหนึ่งตัวแปร**ครับ

ก่อนส่งให้ไล่นิ้วดูคำตอบของตัวเองทุกขีด: ถ้ายังเจอขีดที่พาดผ่านตัวแปรสองตัวขึ้นไป หรือพาดผ่านวงเล็บ แปลว่า**ยังทำไม่จบ** ยังไม่ได้คะแนนเต็มครับ

WE DO — ทำด้วยกัน

ตั้งเลขชั้นเองก่อน แล้วค่อยดูเฉลย

W4.1

> Apply De Morgan's laws to $\overline{\overline{(A+\overline{B})}\,C}$ so that no bar covers more than one variable.

เติมสามช่องนี้ครับ ① ขีดชั้นสูงสุดคือชั้นที่เท่าไร ② ใต้ขีดนั้นเครื่องหมายอะไร ③ ผลหลังแตกชั้นแรก

ขีดชั้นสูงสุด = ชั้นที่ ..... · เครื่องหมายใต้ขีดนั้น = ...

ตอบก่อนแล้วค่อยเปิดเฉลย

เฉลย W4.1

ช่อง ① — ขีดชั้นสูงสุดคือชั้นที่ 3 ครับ เหตุผล: ไล่จากล่างขึ้นบน — ขีดบน B คือชั้น 1 · ขีดที่คลุม $(A+\overline{B})$ คือชั้น 2 · ขีดที่คลุมทั้ง $\overline{(A+\overline{B})}$ และ C คือชั้น 3

ช่อง ② — เครื่องหมายใต้ขีดชั้น 3 คือการคูณ (·) ครับ เหตุผล: ใต้ขีดนอกสุดมีสองก้อน คือ $\overline{(A+\overline{B})}$ กับ C เขียนติดกัน = คูณกัน จึงใช้ De Morgan's Law II

ช่อง ③ — แตกชั้น 3 ได้ $\overline{\overline{(A+\overline{B})} + \overline{C}}$ ครับ เหตุผล: คูณพลิกเป็นบวก และแต่ละก้อนได้ขีดใหม่ก้อนละหนึ่งขีด ก้อนแรกเลยกลายเป็นขีดสามชั้นซ้อน

ขั้นต่อไป — ตอนนี้ involution ใช้ได้แล้ว เพราะขีดชั้นนอกสุดสองเส้นคลุม $(A+\overline{B})$ ก้อนเดียวกันเป๊ะ ขอบซ้ายตรงกัน ขอบขวาตรงกัน ตัดทิ้งได้: $\overline{\overline{(A+\overline{B})}} = A+\overline{B}$

ประกอบร่าง: $A+\overline{B}+\overline{C}$ — ทุกขีดคลุมตัวเดียวแล้วครับ

ตรวจ: $A=0,B=1,C=1$ → ซ้าย: ข้างในสุด $A+\overline{B}=0+0=0 \to \overline{0}=1 \to 1\cdot C=1 \to \overline{1}=0$ · ขวา $=0+0+0=0$ ✓
$A=0,B=1,C=0$ → ซ้าย: $\overline{1\cdot 0}=1$ · ขวา $=0+0+1=1$ ✓

ตอบ: $\overline{\overline{(A+\overline{B})}\,C} = A+\overline{B}+\overline{C}$
"$\overline{\overline{(A+\overline{B})}C} = \overline{\overline{(A+\overline{B})}}+\overline{C} = A+\overline{B}+\overline{C}$*."*

YOU DO — ตาน้อง

สามข้อนี้คือทรงเดียวกับ Assignment ข้อ 3 (c), (d), (f) เลยครับ

Y4.1

> Apply De Morgan's laws to $\overline{\overline{AB}+\overline{C}}$.

ขีดชั้นนอกคลุมทั้งหมด ข้างในมีขีดสองเส้นแยกกัน

เฉลย Y4.1

ขั้น 1 — ตั้งเลขชั้น ขีดบน AB = ชั้น 1 · ขีดบน C = ชั้น 1 · ขีดที่คลุมทั้งหมด = ชั้น 2 **เพราะ** ชั้น 2 ยาวสุด จึงแตกก่อนครับ

ขั้น 2 — ใต้ขีดชั้น 2 เป็นการบวก ($\overline{AB}$ บวก $\overline{C}$) ใช้ De Morgan I: บวกพลิกเป็นคูณ แจกขีดให้สองก้อน ได้ $\overline{\overline{AB}}\cdot\overline{\overline{C}}$

ขั้น 3 — เช็ค involution ทั้งสองก้อน ก้อนแรก: ขีดสองชั้นคลุม AB เหมือนกันเป๊ะ ✓ ตัดได้ → AB · ก้อนที่สอง: ขีดสองชั้นคลุม C เหมือนกันเป๊ะ ✓ ตัดได้ → C

ขั้น 4 — ประกอบ ได้ $AB\cdot C = ABC$ ครับ ไม่มีขีดเหลือเลย

ตรวจ: $A=1,B=1,C=1$ → ซ้าย $=\overline{0+0}=1$ · ขวา $=1$ ✓ · $A=1,B=0,C=1$ → ซ้าย $=\overline{1+0}=0$ · ขวา $=0$ ✓

ตอบ: $\overline{\overline{AB}+\overline{C}} = ABC$
"$\overline{\overline{AB}+\overline{C}} = \overline{\overline{AB}}\cdot\overline{\overline{C}} = ABC$*."*

Y4.2

> Apply De Morgan's laws to $\overline{\overline{A} + \overline{B\overline{C}}}$.

ระวังครับ ขีดชั้นในของก้อนที่สองคลุมสองตัว ไม่ใช่ตัวเดียว

เฉลย Y4.2

ขั้น 1 — ตั้งเลขชั้น ขีดบน A = ชั้น 1 · ขีดบน C = ชั้น 1 · ขีดที่คลุม $B\overline{C}$ = ชั้น 2 · ขีดที่คลุมทั้งหมด = ชั้น 3 **เพราะ** ชั้น 3 นอกสุด แตกก่อน

ขั้น 2 — แตกชั้น 3 ใต้ขีดเป็นการบวกของสองก้อน ใช้ De Morgan I: บวกพลิกเป็นคูณ ได้ $\overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{B\overline{C}}}$

ขั้น 3 — เช็ค involution ก้อนแรก ขีดสองชั้นคลุม A เหมือนกัน ✓ → A · ก้อนที่สอง ขีดสองชั้นคลุม $B\overline{C}$ เหมือนกันเป๊ะ ✓ → $B\overline{C}$

ขั้น 4 — ประกอบ ได้ $A \cdot B\overline{C} = AB\overline{C}$ ครับ ขีดที่เหลือคลุมแค่ C ตัวเดียว จบ

กับดักที่ต้องระวัง: ถ้าเผลอไปแตก $\overline{B\overline{C}}$ ก่อน (เป็น $\overline{B} + C$) แล้วค่อยแตกชั้นนอก จะสับสนและได้คำตอบผิดครับ — **ต้องแตกจากนอกเข้าในเสมอ**

ตรวจ: $A=1, B=1, C=0$ → ซ้าย: $B\overline{C}=1$, $\overline{1}=0$, $\overline{A}=0$, $\overline{0+0}=1$ · ขวา $=1\cdot1\cdot1=1$ ✓ · $A=1, B=1, C=1$ → ซ้าย: $B\overline{C}=0$, $\overline{0}=1$, $\overline{0+1}=0$ · ขวา $=0$ ✓

ตอบ: $\overline{\overline{A} + \overline{B\overline{C}}} = AB\overline{C}$
"$\overline{\overline{A} + \overline{B\overline{C}}} = \overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{B\overline{C}}} = A \cdot B\overline{C} = AB\overline{C}$."

Y4.3

> Simplify $\overline{\overline{\overline{A} + B}}$ using the involution law.

ข้อนี้ไม่ต้องใช้ De Morgan เลยครับ ดูให้ดี ๆ ว่าขีดคลุมอะไรบ้าง

เฉลย Y4.3

ขั้น 1 — ตั้งเลขชั้น ขีดบน A = ชั้น 1 · ขีดที่คลุม $\overline{A} + B$ = ชั้น 2 · ขีดที่คลุม $\overline{\overline{A} + B}$ = ชั้น 3

ขั้น 2 — เช็ค involution ก่อนทำอย่างอื่นเสมอ ขีดชั้น 3 กับชั้น 2 คลุม $\overline{A} + B$ **ก้อนเดียวกันเป๊ะ** ขอบซ้ายตรงกัน ขอบขวาตรงกัน ✓ **เพราะ** เข้าเงื่อนไข involution จึงตัดทิ้งได้สองชั้นพร้อมกัน

ขั้น 3 — เหลือ $\overline{A} + B$ ซึ่งมีขีดคลุมตัวเดียวแล้ว จบครับ ไม่ต้องแตกอะไรเพิ่ม

บทเรียนของข้อนี้: ก่อนจะแตกขีดทุกครั้ง ให้เช็ค involution ก่อน — ถ้าตัดได้ก็จบเร็วมาก ไม่ต้องเสียเวลาแตกแล้วประกอบกลับ

ตรวจ: $A=0, B=0 \rightarrow$ ข้างใน $\overline{A}+B=1+0=1 \rightarrow \overline{1}=0 \rightarrow \overline{0}=1 \cdot$ คำตอบ $\overline{A}+B=1 \checkmark \cdot A=1, B=0 \rightarrow$ ข้างใน $=0+0=0 \rightarrow 1 \rightarrow 0 \cdot$ คำตอบ $=0 \checkmark$

ตอบ: $\overline{\overline{\overline{A}+B}}=\overline{A}+B$

"By the involution law the two outer bars cancel, leaving $\overline{A}+B$."

5 ย่อนิพจน์จริง — ลำดับการลงมือที่ใช้ได้ทุกข้อ

ตะขอเกี่ยว · รับจากหัวข้อ 4

ตอนนี้น้องมีของครบแล้วครับ — 12 กฎจากหัวข้อ 2, De Morgan จากหัวข้อ 3, และวิธีลอกขีดทีละชั้นจากหัวข้อ 4

สมมติว่าถ้าข้อสอบโยนนิพจน์ยาว ๆ มาให้แล้วบอกแค่ว่า “simplify” ล่ะครับ น้องจะเริ่มจากกฎไหนก่อน — ปัญหาไม่ใช่ว่าไม่รู้กฎ แต่คือ**ไม่รู้ว่าจะหยิบกฎไหนก่อนหลัง** หัวข้อนี้พี่จะให้ลำดับการลงมือที่ใช้ได้ทุกข้อครับ

★ ลำดับการย่อนิพจน์ — ทำตามนี้ตามลำดับเสมอ

ขั้น 1 — จัดการขีดยาวให้หมดก่อน (De Morgan + involution จากหัวข้อ 3–4) เพราะตราบใดที่ยังมีขีดคลุมหลายตัว กฎ 12 ข้ออื่นแตะอะไรไม่ได้เลย

ขั้น 2 — กระจายวงเล็บออกให้หมด (Distributive I) ให้เหลือแต่ผลบวกของพจน์คูณ

ขั้น 3 — สแกนหาพจน์ที่ตายทันที — พจน์ไหนมี $X\overline{X}$ อยู่ข้างใน ขีดทิ้งได้เลย (Complementary II) และยุบ XX เหลือ X (Idempotent II)

ขั้น 4 — ลบพจน์ซ้ำ และพจน์ที่ถูกกลืน (Idempotent I + Absorption)

ขั้น 5 — ดึงตัวร่วมแล้วยุบด้วย Null / Complementary ($X + \overline{X} = 1, 1 + X = 1$)

ขั้น 6 — ตรวจ เอานิพจน์เดิมกับนิพจน์ใหม่มากดตารางค่าความจริงเทียบกัน **ถ้ามีแถวไหนไม่ตรง แปลว่าย่อผิด**ครับ ขั้นนี้ห้ามข้าม

ทางลัด · สัญญาณที่บอกว่าต้องใช้กฎไหน

เห็นแบบนี้ในนิพจน์	ให้หยิบกฎนี้
ขีดคลุมมากกว่าหนึ่งตัว	**De Morgan** — แตกก่อนอย่างอื่นเสมอ
ขีดสองชั้นคลุมของเดียวกัน	**Involution** — ตัดทิ้งทันที
X กับ $\overline{X}$ คูณกันในพจน์เดียว	**Complementary II** — พจน์นั้นเป็น 0 ขีดทิ้ง
X กับ $\overline{X}$ บวกกันในวงเล็บ	**Complementary I** — วงเล็บนั้นเป็น 1
ตัวแปรเดิมคูณตัวเอง (XX)	**Idempotent II** — เหลือตัวเดียว
พจน์สั้นเป็นส่วนหนึ่งของพจน์ยาว	**Absorption** — ลบพจน์ยาวทิ้ง
ตัวร่วมโผล่หลายพจน์	**Distributive I** อ่านย้อนกลับ — ดึงตัวร่วม
ในวงเล็บมี 1 บวกอยู่	**Null I** — วงเล็บนั้นเป็น 1

I DO — พี่ทำให้ดู

โจทย์จากสไลด์หน้า 40 — ทุกบรรทัดมีชื่อกฎกำกับ

Ex 40 สไลด์ Week 3 หน้า 40

> Using Boolean algebra techniques, simplify this expression:
> $AB + A(B + C) + B(B + C)$

ไม่มีขีดเลยสักตัว เพราะฉะนั้นข้ามขั้น 1 ได้ ไปเริ่มที่ขั้น 2 กระจายวงเล็บครับ

1 $\mathrm{AB} + \mathrm{A(B + C)}$

ขั้น 2 — กระจายวงเล็บทั้งสองอัน (Distributive Law I)

$A(B + C) = AB + AC$ และ $B(B + C) = BB + BC$ **เพราะ** เราต้องทำให้ทุกพจน์เป็นพจน์คูณล้วน ๆ ก่อน ถึงจะเปรียบเทียบหาของซ้ำได้ครับ

ได้ $AB + AB + AC + BB + BC$

2 $\mathrm{AB} + \mathrm{AB} + \mathrm{AC}$

ขั้น 3 — ยุบ BB (Idempotent Law II)

$BB = B$ **เพราะ** ตัวแปรคูณตัวมันเองได้ตัวเดิม ($1 \cdot 1 = 1, 0 \cdot 0 = 0$) **ห้ามเขียนเป็น** B^2 ครับ

ได้ $AB + AB + AC + B + BC$

3	$\mathrm{AB} + \mathrm{AC} + \mathrm{B}$	**ขั้น 4a — ลบพจน์ซ้ำ (** Idempotent Law I **)** $AB + AB = AB$ **เพราะ** พจน์เดียวกัน OR กันเองได้ตัวเดิม เขียนสองรอบไม่ได้อะไรเพิ่มครับ ได้ $AB + AC + B + BC$
4	$\mathrm{B} + \mathrm{AC}$	**ขั้น 4b — ให้ B กลืนสองพจน์ (** Absorption Law I **สองครั้ง)** $B + BC = B$ **เพราะ** B เป็นส่วนหนึ่งของ BC พอดี · แล้ว $B + AB = B$ ด้วยเหตุผลเดียวกัน **เพราะ** B อยู่ใน AB เหมือนกัน **ตอบ:** $AB + A(B + C) + B(B + C) = B + AC$

A	B	C	$AB + A(B + C) + B(B + C)$	$B + AC$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

ขั้น 6 — ตรวจด้วยตารางค่าความจริง (ห้ามข้าม)

คอลัมน์ที่ 4 คือนิพจน์เดิม คอลัมน์ที่ 5 คือ $B + AC$ ครับ — **ตรงกันทั้ง 8 แถว** เพราะฉะนั้นย่อถูกแน่นอน

พี่รันตรวจด้วย `same_logic()` ใน `tools/dig.py` อีกชั้นหนึ่งด้วยครับ ได้ **True**

กับดักของข้อนี้

คนที่ลืม $BB = B$ จะเหลือ B^2 ค้างอยู่แล้วงงว่าจะทำต่อยังไงครับ · อีกกลุ่มคือคนที่ตอบ $AB + AC + B$ แล้วหยุด เพราะไม่เห็นว่า AB ยังถูก B กลืนได้อีกที **ต้องสแกน absorption ซ้ำจนกว่าจะไม่มีอะไรกลืนได้อีก**

WE DO — ทำด้วยกัน

โจทย์จากสไลด์หน้า 42 — เติมชื่อกฎแต่ละบรรทัดเองก่อนครับ

Ex 42 สไลด์ Week 3 หน้า 42

> Using Boolean algebra techniques, simplify this expression:
> $[A\overline{B}(C+BD)+\overline{A}\,\overline{B}]C$

วงเล็บเหลี่ยมข้างนอกคูณด้วย C อยู่ครับ อย่าลืมแจก C เข้าไปตอนท้าย

$$A\overline{B}(C+BD)=A\overline{B}C+A\overline{B}BD$$

ใช้กฎ .....

$$A\overline{B}BD=0$$

ใช้กฎ .....

$$[A\overline{B}C+\overline{A}\,\overline{B}]C=A\overline{B}CC+\overline{A}\,\overline{B}C$$

ใช้กฎ .....

$$A\overline{B}C+\overline{A}\,\overline{B}C=\overline{B}C(A+\overline{A})=\overline{B}C$$

ใช้กฎ ..... แล้วตามด้วย .....

เฉลย Ex 42

บรรทัด 1 — Distributive Law I ครับ แจก $A\overline{B}$ เข้าไปในวงเล็บ $(C+BD)$ **เหตุผล:** ต้องกระจายวงเล็บชั้นในสุดก่อน จะได้เห็นว่าพจน์ไหนตายบ้าง

บรรทัด 2 — Complementary Law II แล้วตามด้วย Null Law II ครับ **เหตุผล:** ในพจน์ $A\overline{B}BD$ มีทั้ง $\overline{B}$ และ B คูณกันอยู่ ซึ่ง $\overline{B}B=0$ (Complementary II) แล้ว $A\cdot 0\cdot D=0$ (Null II) — **ทั้งพจน์ตายเรียบ**

บรรทัด 3 — Distributive Law I อีกครั้ง ครับ คราวนี้แจก C ตัวนอกวงเล็บเหลี่ยมเข้าไปในสองพจน์ที่เหลือ **เหตุผล:** C คูณกับทุกพจน์ข้างใน ต้องแจกให้ครบ

บรรทัด 4 ท่อนแรก — Idempotent Law II ครับ $CC=C$ จึงได้ $A\overline{B}C$ **ท่อนที่สอง — Distributive Law I อ่านย้อนกลับ (ดึงตัวร่วม)** ตัวร่วมคือ $\overline{B}C$ ทั้งสองพจน์มีเหมือนกัน **ท่อนสุดท้าย — Complementary Law I** $A+\overline{A}=1$ แล้ว **Identity Law II** $\overline{B}C\cdot 1=\overline{B}C$

ตรวจด้วยการแทนค่า: $A=1,B=0,C=1,D=1$ → ข้างในวงเล็บเหลี่ยม $=1\cdot 1\cdot(1+0\cdot 1)+0\cdot 1=1$ แล้วคูณ $C=1$ ได้ $1\cdot$ คำตอบ $\overline{B}C=1\cdot 1=1$ ✓
$A=1,B=1,C=1,D=1$ → ข้างใน $=1\cdot 0\cdot(\cdots)+0\cdot 0=0$ คูณ C ได้ $0\cdot$ คำตอบ $=0\cdot 1=0$ ✓
(รันด้วย `same_logic()` แล้วได้ True ครับ)

ตอบ: $[A\overline{B}(C+BD)+\overline{A}\,\overline{B}]C=\overline{B}C$

"$[A\overline{B}(C+BD)+\overline{A}\,\overline{B}]C=A\overline{B}C+\overline{A}\,\overline{B}C=\overline{B}C(A+\overline{A})=\overline{B}C$."

YOU DO — ตาน้อง

สี่ข้อนี้ครอบทุกทรงที่ Assignment ข้อ 4 จะถามครับ

Y5.1 สไลด์ Week 3 หน้า 44

> Using Boolean algebra techniques, simplify this expression:
> $\overline{A}BC+A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+A\overline{B}C+ABC$

ใบ้: จับคู่พจน์ที่ต่างกันแค่ตัวเดียว แล้วดึงตัวร่วมออก จะได้ $X+\overline{X}=1$ ครับ

เฉลย Y5.1

ขั้น 1 — สังเกตก่อนว่าพจน์คู่ไหนต่างกันแค่ตัวเดียว เพราะคู่แบบนั้นดึงตัวร่วมแล้วยุบได้ทันทีครับ:
$\overline{A}BC$ กับ ABC ต่างกันแค่ขีดบน A ✓
$A\overline{B}\,\overline{C}$ กับ $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ ต่างกันแค่ขีดบน A ✓
$A\overline{B}\,\overline{C}$ กับ $A\overline{B}C$ ต่างกันแค่ขีดบน C ✓

ขั้น 2 — ก๊อป $A\overline{B}\,\overline{C}$ ขึ้นมาใช้ซ้ำ (Idempotent Law I อ่านย้อนกลับ) เพราะ พจน์นี้ต้องจับคู่กับสองพจน์พร้อมกัน กฎ $X=X+X$ อนุญาตให้เขียนซ้ำได้โดยค่าไม่เปลี่ยนครับ
ได้ $\overline{A}BC+ABC+A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}+A\overline{B}C$

ขั้น 3 — ยุบทีละคู่ (Distributive I ดึงตัวร่วม แล้ว Complementary I แล้ว Identity II)
คู่ที่ 1: $\overline{A}BC+ABC=BC(\overline{A}+A)=BC\cdot 1=BC$
คู่ที่ 2: $A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}=\overline{B}\,\overline{C}(A+\overline{A})=\overline{B}\,\overline{C}$
คู่ที่ 3: $A\overline{B}\,\overline{C}+A\overline{B}C=A\overline{B}(\overline{C}+C)=A\overline{B}$

ขั้น 4 — รวมผล ได้ $BC+\overline{B}\,\overline{C}+A\overline{B}$ ครับ ลองสแกน absorption ต่อ — ไม่มีพจน์ไหนเป็นส่วนหนึ่งของพจน์ไหนแล้ว จบ

ขั้น 5 — ตรวจ ดูตารางข้างล่างครับ ตรงกันทั้ง 8 แถว (รันด้วย `same_logic()` ได้ True)

ตอบ: $=BC+\overline{B}\,\overline{C}+A\overline{B}$ — จาก 5 พจน์เหลือ 3 พจน์

"Grouping terms that differ in one literal gives $BC+\overline{B}\,\overline{C}+A\overline{B}$."

A	B	C	โจทย์เดิม	$BC+\overline{B}\,\overline{C}+A\overline{B}$
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0

A	B	C	โจทย์เดิม	$BC + \overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}$
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

Y5.2 สไลด์ Week 3 หน้า 51

> Consider the following Boolean expression and simplify it using De Morgan's laws:
> $\overline{\overline{A + B\overline{C}} + D\,\overline{(E + \overline{F})}}$

ข้อนี้รวมทุกอย่างของหัวข้อ 3 กับ 4 ไว้ในข้อเดียวครับ — ตั้งเลขชั้นก่อนลงมือ

เฉลย Y5.2

ขั้น 1 — ตั้งเลขชั้นให้ครบก่อน
ชั้น 1: ขีดบน C · ขีดบน F
ชั้น 2: ขีดคลุม $A + B\overline{C}$ · ขีดคลุม $(E + \overline{F})$
ชั้น 3: ขีดนอกสุดที่คลุมทั้งหมด **เพราะ** ชั้น 3 นอกสุด จึงแตกก่อน

ขั้น 2 — แตกชั้น 3 (De Morgan I) ใต้ขีดนอกสุดมีสองก้อนบวกกัน คือ $\overline{A + B\overline{C}}$ และ $D\,\overline{(E + \overline{F})}$ บวกพลิกเป็นคูณ แต่ละก้อนได้ขีดใหม่:
$\overline{\overline{A + B\overline{C}} \cdot \overline{D\,\overline{(E + \overline{F})}}}$

ขั้น 3 — ก้อนซ้าย ใช้ involution ได้เลย เพราะขีดสองชั้นคลุม $A + B\overline{C}$ ก้อนเดียวกันเป๊ะ ✓ ได้ $A + B\overline{C}$

ขั้น 4 — ก้อนขวา ใต้ขีดเป็นการคูณ (De Morgan II) ระหว่าง D กับ $\overline{(E + \overline{F})}$ คูณพลิกเป็นบวก: $\overline{D} + \overline{(E + \overline{F})}$ แล้ว involution ตัดขีดคู่ทิ้ง ได้ $\overline{D} + E + \overline{F}$

ขั้น 5 — ประกอบร่าง ได้ $(A + B\overline{C})(\overline{D} + E + \overline{F})$ ครับ ทุกขีดคลุมตัวเดียวแล้ว จบ

ตรวจ: $A = 1, B = 0, C = 0, D = 1, E = 0, F = 1 \rightarrow$ ข้างในซ้าย $A + B\overline{C} = 1 \rightarrow \overline{1} = 0 \cdot (E + \overline{F}) = 0 + 0 = 0 \rightarrow \overline{0} = 1 \rightarrow D \cdot 1 = 1 \cdot \overline{0 + 1} = 0 \cdot$ คำตอบ $= (1)(0 + 0 + 0) = 0$ ✓ (รันด้วย `same_logic()` บนตัวแปร 6 ตัว ครบ 64 แถว ได้ True)

ตอบ: $= (A + B\overline{C})(\overline{D} + E + \overline{F})$
“$\overline{\overline{A + B\overline{C}} + D\overline{(E + \overline{F})}} = (A + B\overline{C})(\overline{D} + E + \overline{F})$*.”*

Y5.3

> Simplify: $A\overline{B} + \overline{A}B + AB$.

ใบ้: ใช้ท่าก๊อปพจน์ซ้ำเหมือน Y5.1 ครับ

เฉลย Y5.3

ขั้น 1 — ก๊อป AB ขึ้นมาสองชุด (Idempotent Law I ย้อนกลับ) เพราะ AB ต้องจับคู่กับทั้ง $A\overline{B}$ และ $\overline{A}B$: $A\overline{B} + AB + \overline{A}B + AB$

ขั้น 2 — ยุบคู่แรก $A\overline{B} + AB = A(\overline{B} + B) = A \cdot 1 = A$ (Distributive I → Complementary I → Identity II)

ขั้น 3 — ยุบคู่ที่สอง $\overline{A}B + AB = B(\overline{A} + A) = B \cdot 1 = B$ ด้วยกฎชุดเดียวกัน

ขั้น 4 — รวม ได้ $A + B$ ครับ

ข้อสังเกตที่ควรจำ: นี่คือนิพจน์เดียวกับวงจร 6 เกตในหัวข้อ 1 เป๊ะ ๆ ครับ — **ตอนนั้นพี่พิสูจน์ด้วยตาราง ตอนนี้พิสูจน์ด้วยกฎแล้ว** ได้คำตอบเดียวกันคือ $A + B$

ตอบ: $A\overline{B} + \overline{A}B + AB = A + B$
"$A\overline{B} + \overline{A}B + AB = A(\overline{B} + B) + B(\overline{A} + A) = A + B.$*"*

Y5.4

> Simplify: $ABC + AB\overline{C} + A\overline{B}$.

ใบ้: ยุบสองพจน์แรกก่อน แล้วค่อยดูว่าเหลืออะไร

เฉลย Y5.4

ขั้น 1 — ยุบสองพจน์แรก $ABC + AB\overline{C} = AB(C + \overline{C}) = AB \cdot 1 = AB$ **เพราะ** ต่างกันแค่ขีดบน C ดึง AB เป็นตัวร่วมได้เลย (Distributive I → Complementary I → Identity II)

ขั้น 2 — เหลือ $AB + A\overline{B}$ ซึ่งต่างกันแค่ขีดบน B ดึง A ออก: $A(B + \overline{B}) = A \cdot 1 = A$

ขั้น 3 — ตรวจด้วยสามัญสำนึก ถ้า $A = 0$ ทุกพจน์เป็น 0 หมด (เพราะทุกพจน์มี A) ถ้า $A = 1$ ไม่ว่า B, C จะเป็นอะไร ก็ต้องมีพจน์ใดพจน์หนึ่งเป็น 1 เสมอ (สามพจน์ครอบทุกความเป็นไปได้ของ B, C) เพราะฉะนั้นเอาต์พุตขึ้นกับ A ตัวเดียว ✓

ตอบ: $ABC + AB\overline{C} + A\overline{B} = A$
"$ABC + AB\overline{C} + A\overline{B} = AB(C + \overline{C}) + A\overline{B} = AB + A\overline{B} = A(B + \overline{B}) = A.$*"*

6 Consensus Theorem — พจน์ที่มีก็เหมือนไม่มี

ตะขอเกี่ยว · รับจากหัวข้อ 5

ลำดับการย่อในหัวข้อที่แล้วเก่งมากครับ แต่มันมีนิพจน์ทรงหนึ่งที่**เอากฎทั้ง 12 ข้อไปจ่อยังไงก็ไม่ยุบ** — ลอง $AB + \overline{A}C + BC$ ดูครับ ไม่มีพจน์ซ้ำ ไม่มี $X\overline{X}$ ไม่มี absorption ดูเผิน ๆ เหมือนสั้นที่สุดแล้ว

สมมติว่าถ้าพี่บอกว่านิพจน์นี้ยังตัดได้อีกหนึ่งพจน์เต็ม ๆ ล่ะครับ น้องจะเชื่อไหม — พจน์ BC ตัดทิ้งได้ โดยที่ตารางค่าความจริงไม่เปลี่ยนแม้แต่แถวเดียว นี่คือ consensus theorem และเป็นเนื้อหาของ **Assignment ข้อ 5** ครับ

ที่มาก่อน — ทำไมพจน์นั้นถึงตัดทิ้งได้ (ห้ามท่องสูตร)

พี่จะพิสูจน์ให้ดูสองแบบครับ แบบแรกใช้สามัญสำนึก แบบที่สองใช้กฎล้วน ๆ ทั้งสองแบบต้องเข้าใจ ไม่ใช่ท่อง

พิสูจน์แบบที่ 1 · ใช้สามัญสำนึก — พจน์นั้นไม่เคยได้ทำงานเลย

พจน์ BC จะเป็น 1 ได้ก็ต่อเมื่อ $B = 1$ **และ** $C = 1$ เท่านั้นใช่ไหมครับ ทีนี้ในสถานการณ์แบบนั้น เรามาดูว่า A เป็นอะไรได้บ้าง — มีแค่ 2 กรณี:

กรณี $A = 1$: พจน์ $AB = 1 \cdot 1 = 1$ อยู่แล้วครับ เพราะฉะนั้นทั้งนิพจน์เป็น 1 ไปแล้วก่อนที่ BC จะได้พูดอะไร

กรณี $A = 0$: พจน์ $\overline{A}C = 1 \cdot 1 = 1$ อยู่แล้วครับ ทั้งนิพจน์เป็น 1 ไปแล้วเหมือนกัน

สรุป: ทุกครั้งที่ BC เป็น 1 จะมีพจน์อื่นเป็น 1 ไปก่อนแล้วเสมอ พจน์ BC จึงไม่เคยเปลี่ยนคำตอบเลยแม้แต่ครั้งเดียว — ตัดทิ้งได้สนิทใจครับ

พิสูจน์แบบที่ 2 · ใช้กฎล้วน ๆ ทีละบรรทัด

$$AB + \overline{A}C + BC$$

$$= AB + \overline{A}C + BC \cdot 1 \quad \text{(Identity Law II อ่านย้อนกลับ)}$$

$$= AB + \overline{A}C + BC(A + \overline{A}) \quad \text{(Complementary Law I อ่านย้อนกลับ — แทน 1 ด้วย } A + \overline{A}\text{)}$$

$$= AB + \overline{A}C + ABC + \overline{A}BC \quad \text{(Distributive Law I)}$$

$$= (AB + ABC) + (\overline{A}C + \overline{A}BC) \quad \text{(Commutative + Associative — จัดกลุ่มใหม่)}$$

$$= AB + \overline{A}C \quad \text{(Absorption Law I สองครั้ง — } AB \text{ กลืน } ABC \text{ และ } \overline{A}C \text{ กลืน } \overline{A}BC\text{)}$$

เห็นไหมครับว่ากลเม็ดคือการแทน 1 ด้วย $A + \overline{A}$ เพื่อบังคับให้ BC แตกเป็นสองก้อนที่ถูกกลืนได้พอดี — เป็นท่าเดียวกับที่ใช้แปลงเป็น standard form ในหัวข้อ 7 ครับ

A	B	C	AB	$\overline{A}C$	BC	$AB + \overline{A}C + BC$	$AB + \overline{A}C$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	1	0	1	1	1

พิสูจน์แบบที่ 3 · ตารางค่าความจริง 8 แถว

คอลัมน์ที่ 7 คือนิพจน์เต็ม 3 พจน์ · คอลัมน์ที่ 8 คือหลังตัด BC ทิ้ง — **ตรงกันทั้ง 8 แถวครับ**

ลองดูแถวที่ $BC = 1$ (แถว $B = 1, C = 1$ คือแถว 011 กับ 111) ครับ แถว 011 มี $\overline{A}C = 1$ อยู่แล้ว · แถว 111 มี $AB = 1$ อยู่แล้ว — ตรงกับที่พิสูจน์แบบที่ 1 ไว้เป๊ะ

นิยาม · Consensus Theorem ตามสไลด์หน้า 63

The consensus theorem can be used to eliminate redundant terms in Boolean expressions. The term which may be eliminated is referred to as the consensus term.

Rule: Given a pair of terms for which a variable appears in one term and the complement of that variable appears in another, the consensus term is formed by multiplying the two original terms together, leaving out the selected variable and its complement.

$$AB + \overline{A}C + BC = AB + \overline{A}C$$

Consensus Theorem — พจน์ BC คือ consensus term ตัดทิ้งได้

สไลด์สรุปท้ายหน้าว่า we can write only the terms containing complemented variables and omit the consensus term — **เก็บคู่ที่มีตัวแปรขัดกัน ทิ้งพจน์ที่เป็นผลผสม**ครับ

วิธีหา consensus term แบบ 3 ขั้น — ใช้ทำ Assignment ข้อ 5 ได้เลย

1 $\mathrm{AB} + \overline{\mathrm{A}}\mathrm{C} + \mathrm{BC}$

หา “ตัวหมุน” (pivot) — ตัวแปรที่โผล่ทั้งมีขีดและไม่มีขีด

ไล่ดูพจน์ทีละคู่ครับ มองหาคู่ที่มีตัวแปรตัวหนึ่ง**ไม่มีขีดในพจน์หนึ่ง และมีขีดในอีกพจน์หนึ่ง** ในตัวอย่างนี้คู่ AB กับ $\overline{A}C$ มี A เป็น pivot **เพราะ** ถ้าไม่มีตัวขัดกันแบบนี้ ก็ไม่มี consensus term ให้ตัดครับ

2	$AB + \overline{A}C + \overline{BC}$	**คูณสองพจน์นั้น แล้วโยน pivot กับคู่ตรงข้ามทิ้ง** $AB \times \overline{A}C = A\overline{A}BC$ แล้ว**ตัด A กับ $\overline{A}$ ออก** เหลือ BC — นี่คือ consensus term ครับ **เพราะ** สูตรบอกว่า leaving out the selected variable and its complement
3	$AB + \overline{A}C$	**ถ้า consensus term นั้น "มีอยู่จริงในโจทย์" ให้ขีดทิ้ง** โจทย์มีพจน์ BC อยู่จริง → ตัดทิ้งได้ทันที เหลือ $AB + \overline{A}C$ **เพราะ** ถ้า consensus term ไม่ได้อยู่ในโจทย์ ก็ไม่มีอะไรให้ตัด แค่นั้นเองครับ **แล้ววนกลับไปขั้น 1 หาคู่ถัดไป จนกว่าจะไม่มีคู่ไหนให้ตัดอีก**

กับดักของ consensus — สามข้อที่คนพลาดบ่อย

① **ตัด consensus term ที่ไม่ได้อยู่ในโจทย์** — ถ้าคำนวณได้ BC แต่โจทย์ไม่มีพจน์ BC **ห้ามไปเติมหรือไปตัดอะไรทั้งนั้น**ครับ ผ่านไปหาคู่ถัดไป

② **ตัดผิดพจน์** — ต้องตัด**พจน์ผลผสม** (BC) ไม่ใช่ตัดพจน์ที่มีตัวแปรขัดกัน (AB หรือ $\overline{A}C$) จำง่าย ๆ ว่า**เก็บพจน์ที่มีขีด ทิ้งพจน์ที่ไม่มีตัวขัด**

③ **ลืมวนซ้ำ** — ตัดได้หนึ่งพจน์แล้วอย่าเพิ่งหยุดครับ ให้สแกนคู่ที่เหลือใหม่ทั้งหมด **Assignment ข้อ 5 ตัดได้ถึงสองพจน์** ถ้าหยุดที่พจน์เดียวก็ได้คะแนนไม่เต็ม

I DO — พี่ทำให้ดู

โจทย์จากสไลด์หน้า 64 — ข้อนี้ตัดได้สองพจน์ ทรงเดียวกับ Assignment ข้อ 5 เป๊ะ

Ex 64 — สไลด์ Week 3 หน้า 64

> Eliminate the consensus terms from the following Boolean expression:
> $\overline{A}\,\overline{B} + AC + B\overline{C} + \overline{B}C + AB$

ห้าพจน์ครับ ต้องไล่ดูทุกคู่ที่มีตัวแปรขัดกัน

เฉลย Ex 64 — ทำครบทุกคู่

ขั้น 1 — ตั้งชื่อพจน์ให้เรียกง่าย T1 $= \overline{A}\,\overline{B}$ · T2 $= AC$ · T3 $= B\overline{C}$ · T4 $= \overline{B}C$ · T5 $= AB$

ขั้น 2 — ไล่หาคู่ที่มีตัวแปรขัดกัน แล้วคำนวณ consensus ของแต่ละคู่

คู่	pivot	คูณกันแล้วตัด pivot	อยู่ในโจทย์ไหม
T1, T2	A	$\overline{B} \cdot C = \overline{B}C$	**อยู่ (คือ T4) → ตัด T4 ทิ้ง**
T2, T3	C	$A \cdot B = AB$	**อยู่ (คือ T5) → ตัด T5 ทิ้ง**
T1, T5	A	$\overline{B} \cdot B = 0$	ได้ 0 — ไม่ใช่ consensus term (ตัวแปรที่เหลือดันขัดกันเอง)
T3, T4	B	$\overline{C} \cdot C = 0$	ได้ 0 เหมือนกัน ข้ามครับ

ขั้น 3 — ตัด T4 กับ T5 ทิ้ง เพราะ ทั้งสองเป็น consensus term ของคู่ที่ยังอยู่ครบ (T1,T2 ยังอยู่ และ T2,T3 ยังอยู่) การตัดจึงถูกต้อง

ขั้น 4 — วนกลับไปสแกนพจน์ที่เหลืออีกรอบ เหลือ T1, T2, T3 — คู่ T1,T2 ให้ consensus $\overline{B}C$ (ไม่มีในนิพจน์แล้ว) · คู่ T2,T3 ให้ AB (ไม่มีแล้ว) · คู่ T1,T3 ไม่มีตัวแปรขัดกัน ($\overline{A}\,\overline{B}$ กับ $B\overline{C}$ — B ขัดกัน! consensus $= \overline{A} \cdot \overline{C} = \overline{A}\,\overline{C}$ ซึ่งไม่มีในนิพจน์) → **ตัดอะไรไม่ได้อีก จบครับ**

ขั้น 5 — ตรวจด้วยตารางค่าความจริง ดูตารางข้างล่างครับ ตรงกันทั้ง 8 แถว (รันด้วย `same_logic()` ได้ True)

ตอบ: $\overline{A}\,\overline{B} + AC + B\overline{C} + \overline{B}C + AB = \overline{A}\,\overline{B} + AC + B\overline{C}$ — จาก 5 พจน์เหลือ 3 พจน์
"$\overline{B}C$ is the consensus of $\overline{A}\,\overline{B}$ and AC; AB is the consensus of AC and $B\overline{C}$. Both are redundant."

A	B	C	โจทย์เดิม	$\overline{A}\,\overline{B} + AC + B\overline{C}$
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

ทางลัด · เช็คว่าตัดถูกไหมโดยไม่ต้องกดตาราง 8 แถว

เอาพจน์ที่จะตัดมาตั้ง แล้วถามว่า "ตอนที่พจน์นี้เป็น 1 มีพจน์อื่นเป็น 1 อยู่แล้วทุกกรณีไหม" ครับ

เช่นจะตัด AB: ตอนที่ $A = 1, B = 1$ — ถ้า $C = 1$ พจน์ AC ก็เป็น 1 อยู่แล้ว ✓ · ถ้า $C = 0$ พจน์ $B\overline{C}$ ก็เป็น 1 อยู่แล้ว ✓ **ครบทุกกรณี → ตัดได้**
วิธีนี้ใช้เวลาไม่ถึง 10 วินาที และใช้ตรวจ Assignment ข้อ 5 ได้เลยครับ

WE DO — ทำด้วยกัน

หา pivot กับ consensus term เองก่อน แล้วดูเฉลย

W6.1

> Eliminate the consensus term from: $\overline{X}Y + XZ + YZ$

เติมสามช่องครับ ① pivot คือตัวไหน ② consensus term คืออะไร ③ คำตอบ

pivot = ... · consensus term = ... · คำตอบ = ...

ตอบก่อนแล้วค่อยเปิดเฉลย

เฉลย W6.1

ช่อง ① — pivot คือ X ครับ เหตุผล: ไล่ดูทีละคู่ — คู่ $\overline{X}Y$ กับ XZ มี X ที่โผล่แบบมีขีดในพจน์แรก และไม่มีขีดในพจน์ที่สอง **ตรงเงื่อนไขของกฎเป๊ะ**

ช่อง ② — consensus term คือ YZ ครับ เหตุผล: เอาสองพจน์มาคูณกัน $\overline{X}Y \times XZ = X\overline{X}YZ$ แล้วตัด X กับ $\overline{X}$ ออกตามกฎ เหลือ YZ

ช่อง ③ — คำตอบคือ $\overline{X}Y + XZ$ ครับ เหตุผล: โจทย์มีพจน์ YZ อยู่จริง และมันคือ consensus term ที่คำนวณได้ จึงตัดทิ้งได้

ตรวจด้วยทางลัด: ตอนที่ $YZ = 1$ คือ $Y = 1, Z = 1$ — ถ้า $X = 0$ พจน์ $\overline{X}Y = 1$ ✓ · ถ้า $X = 1$ พจน์ $XZ = 1$ ✓ ครบทุกกรณี ตัดได้ครับ (รันด้วย `same_logic()` ได้ True)

ตอบ: $\overline{X}Y + XZ + YZ = \overline{X}Y + XZ$

"YZ is the consensus term of $\overline{X}Y$ and XZ, hence redundant."

YOU DO — ตาน้อง

ข้อที่สองมีพจน์ที่ "ดูเหมือนตัดได้แต่ตัดไม่ได้" ปนอยู่ ระวังครับ

Y6.1

> Eliminate the consensus term from: $AB + \overline{B}C + AC$

ใบ้: pivot ไม่ใช่ A นะครับ ดูให้ดีว่าตัวไหนโผล่ทั้งมีขีดและไม่มีขีด

เฉลย Y6.1

ขั้น 1 — หา pivot ไล่ดูตัวแปรทีละตัวครับ: A โผล่ใน AB กับ AC แต่**ไม่มีขีดทั้งสองที่** ไม่ใช่ pivot · C โผล่ใน $\overline{B}C$ กับ AC ก็ไม่มีขีดทั้งคู่ ไม่ใช่ pivot · B **โผล่ใน AB (ไม่มีขีด) และใน $\overline{B}C$ (มีขีด) → B คือ pivot ครับ**

ขั้น 2 — คำนวณ consensus term $AB \times \overline{B}C = AB\overline{B}C$ ตัด B กับ $\overline{B}$ ออก เหลือ AC

ขั้น 3 — เช็คว่ามีในโจทย์ไหม มีครับ พจน์ที่สามคือ AC พอดี → ตัดทิ้งได้

ขั้น 4 — วนซ้ำ เหลือ $AB + \overline{B}C$ ซึ่งเป็นแค่สองพจน์ ตัดอะไรไม่ได้อีก จบ

ตรวจด้วยทางลัด: ตอนที่ $AC = 1$ คือ $A = 1, C = 1$ — ถ้า $B = 1$ พจน์ $AB = 1$ ✓ · ถ้า $B = 0$ พจน์ $\overline{B}C = 1 \cdot 1 = 1$ ✓ ครบทุกกรณี (รันด้วย `same_logic()` ได้ True)

ตอบ: $AB + \overline{B}C + AC = AB + \overline{B}C$

"AC is the consensus of AB and $\overline{B}C$, therefore redundant."

Y6.2

> Eliminate the consensus terms from: $\overline{A}B + AC + BC + \overline{B}\,\overline{C}$

ใบ้: ต้องไล่ทุกคู่ครับ บางคู่คำนวณ consensus ออกมาแล้วไม่มีในโจทย์ ก็ข้ามไป

เฉลย Y6.2

ขั้น 1 — ตั้งชื่อพจน์ T1 $= \overline{A}B$ · T2 $= AC$ · T3 $= BC$ · T4 $= \overline{B}\,\overline{C}$

ขั้น 2 — ไล่ทุกคู่ที่มีตัวแปรขัดกัน

คู่	pivot	consensus term	มีในโจทย์ไหม
T1, T2	A	$B \cdot C = BC$	**มี (คือ T3) → ตัด T3 ทิ้ง**
T1, T4	B	$\overline{A} \cdot \overline{C} = \overline{A}\,\overline{C}$	ไม่มีในโจทย์ → ข้ามครับ ห้ามไปเติมเอง
T2, T4	C	$A \cdot \overline{B} = A\overline{B}$	ไม่มีในโจทย์ → ข้าม
T3, T4	B และ C	$BC \times \overline{B}\,\overline{C} = 0$	ได้ 0 — ข้าม (ตัวแปรที่เหลือขัดกันเอง)

ขั้น 3 — ตัด T3 ทิ้งอย่างเดียว เหลือ $\overline{A}B + AC + \overline{B}\,\overline{C}$ **เพราะ** คู่อื่นให้ consensus term ที่ไม่ได้อยู่ในโจทย์

ขั้น 4 — วนสแกนซ้ำ เหลือสามพจน์ คู่ที่เหลือให้ consensus ที่ไม่มีในนิพจน์ทั้งหมด → จบครับ

ตรวจด้วยทางลัด: ตอนที่ $BC = 1$ คือ $B = 1, C = 1$ — ถ้า $A = 0$ ได้ $\overline{A}B = 1$ ✓ · ถ้า $A = 1$ ได้ $AC = 1$ ✓ ครบ (รันด้วย `same_logic()` ได้ True)

กับดักที่ต้องระวังในข้อนี้: คนมักเผลอตัด $\overline{B}\,\overline{C}$ ทิ้งด้วย เพราะเห็นว่าคำนวณ consensus ได้หลายอัน — แต่ **consensus term คือพจน์ที่ถูก "ผลิต" ออกมา ไม่ใช่พจน์ที่ใช้ผลิต** ครับ $\overline{B}\,\overline{C}$ เป็นตัวผลิต ห้ามตัด

ตอบ: $\overline{A}B + AC + BC + \overline{B}\,\overline{C} = \overline{A}B + AC + \overline{B}\,\overline{C}$

“Only BC is a consensus term (of $\overline{A}B$ and AC) that appears in the expression.”

7 SOP กับ POS — สองทรงมาตรฐานของนิพจน์บูลีน

ตะขอเกี่ยว · รับจากหัวข้อ 5–6

ตอนนี้น้องย่อนิพจน์เก่งแล้วครับ แต่ถ้าสังเกตดี ๆ — คำตอบที่ได้ทุกข้อมันมี**หน้าตาซ้ำ ๆ กันอยู่สองแบบ** คือ “ผลบวกของพจน์คูณ” เช่น $BC + \overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}$ กับ “ผลคูณของพจน์บวก” เช่น $(A + B\overline{C})(\overline{D} + E + \overline{F})$

สมมติว่าถ้าสองหน้าตานี้มีชื่อเรียกอย่างเป็นทางการ และข้อสอบสั่งมาตรง ๆ ว่า “จงเขียนคำตอบในรูป SOP” ล่ะครับ — น้องต้องรู้จักสองคำนี้ก่อนขึ้น EP07 เพราะทั้ง EP หน้าอยู่บนสองคำนี้ล้วน ๆ ครับ

นิยาม · สองทรงมาตรฐาน (สไลด์หน้า 57)

Sum-of-products (SOP) ~ the Boolean expression is written as a summation of products terms.
ผลบวกของพจน์คูณ ครับ — เอาตัวแปรมา AND กันเป็นพจน์ ๆ แล้วเอาทุกพจน์มา OR กัน

Product-of-sums (POS) ~ the Boolean expression is written as a multiplication of summation terms.
ผลคูณของพจน์บวก ครับ — เอาตัวแปรมา OR กันเป็นวงเล็บ ๆ แล้วเอาทุกวงเล็บมา AND กัน

SOP — Sum of Products (บวกข้างนอก คูณข้างใน)

ตัวอย่างจากสไลด์:

SOP example 1: $X + \overline{Y}Z$
SOP example 2: $A\overline{B} + CD + \overline{E}\,\overline{F}$

วิธีดูให้ออกใน 1 วินาที: เครื่องหมายที่อยู่**นอกสุด** คือ $+$ ครับ และไม่มีวงเล็บครอบกลุ่มบวกไว้

วงจร: AND หลายตัวป้อนเข้า OR ตัวเดียว — เรียกว่า **AND-OR**

POS — Product of Sums (คูณข้างนอก บวกข้างใน)

ตัวอย่างจากสไลด์:

POS example 1: $(X + Y)(\overline{Y} + Z)$
POS example 2: $(A + \overline{B})(\overline{C} + D)(\overline{E} + \overline{F})$

วิธีดูให้ออกใน 1 วินาที: เครื่องหมายที่อยู่**นอกสุด** คือ $\cdot$ ครับ (วงเล็บวางติดกัน = คูณกัน)

วงจร: OR หลายตัวป้อนเข้า AND ตัวเดียว — เรียกว่า **OR-AND**

X	Y	Z	$X + \overline{Y}Z$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1

ตารางของ SOP example 1

$X + \overline{Y}Z$ ออก 1 ทั้งหมด 5 แถวครับ — **แถวเขียวคือแถวที่พจน์ใดพจน์หนึ่งเป็น 1**

อ่าน SOP ยังไง: “ออก 1 เมื่อ $X = 1$ **หรือ** ($Y = 0$ และ $Z = 1$)” — พจน์แต่ละพจน์คือ **เงื่อนไขหนึ่งชุดที่ทำให้ผลลัพธ์เป็น 1** ครับ

X	Y	Z	$X+\overline{Y}Z$
1	1	0	1
1	1	1	1

X	Y	Z	$(X+Y)(\overline{Y}+Z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

ตารางของ POS example 1

$(X+Y)(\overline{Y}+Z)$ ออก 0 ทั้งหมด 4 แถวครับ

อ่าน POS ยังไง: “ออก 0 เมื่อวงเล็บใดวงเล็บหนึ่งเป็น 0” — วงเล็บแต่ละอันคือ **เงื่อนไขหนึ่งชุดที่ทำให้ผลลัพธ์เป็น 0** ครับ กลับด้านกับ SOP พอดี

ตรงนี้แหละคือหัวใจของ EP07 — SOP อ่านจากแถวเขียว POS อ่านจากแถวแดง

กับดัก · นิพจน์ที่ “ไม่ใช่ทั้ง SOP และ POS”

นิพจน์ที่มีวงเล็บซ้อนวงเล็บ หรือมีขีดคลุมหลายตัว **ยังไม่ใช่ทั้งสองทรง**ครับ เช่น

$A(B+C)+D$ — **ไม่ใช่ SOP** เพราะพจน์แรกยังมีวงเล็บบวกอยู่ข้างใน (ต้องกระจายเป็น $AB+AC+D$ ก่อน)

$\overline{A+B}\,C$ — **ไม่ใช่ทั้งคู่** เพราะยังมีขีดคลุมสองตัว (ต้องแตก De Morgan ก่อนเป็น $\overline{A}\,\overline{B}C$ ถึงจะเป็น SOP)

กฎเหล็ก: ในทรง SOP และ POS **ขีดบนได้อยู่บนตัวแปรเดี่ยว ๆ เท่านั้น** ห้ามมีขีดคลุมวงเล็บหรือคลุมหลายตัวเด็ดขาดครับ

Standard form — ทุกพจน์ต้องมีตัวแปรครบทุกตัว

สไลด์หน้า 58 เพิ่มเงื่อนไขอีกชั้นเข้าไปครับ ไม่ใช่แค่เป็น SOP/POS แต่ต้องเป็น **standard** ด้วย

นิยาม · Standard SOP และ Standard POS (สไลด์หน้า 58)

A standard SOP expression is one in which all the variables in the domain appear in each product term in the expression.
แปลว่า**ทุกพจน์คูณต้องมีตัวแปรครบทุกตัวใน domain** (จะมีขีดหรือไม่มีขีดก็ได้ แต่ต้องโผล่ครับ)

A standard POS expression is one in which all the variables in the domain appear in each sum term in the expression.
แปลว่า**ทุกวงเล็บบวกต้องมีตัวแปรครบทุกตัว**เช่นกันครับ

คำว่า domain คือรายชื่อตัวแปรทั้งหมดที่โผล่ในนิพจน์นั้น เช่น $\overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}D$ มี domain $= \{A, B, C, D\}$ ครับ

นิพจน์	domain	เป็น standard ไหม	เพราะอะไร
$A\overline{B}CD + \overline{A}\,\overline{B}C\overline{D} + AB\overline{C}\,\overline{D}$	A, B, C, D	ใช่	ทั้ง 3 พจน์มีครบ 4 ตัว
$\overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}D + \overline{A}B\overline{C}D$	A, B, C, D	ไม่ใช่	พจน์แรกขาด D · พจน์ที่สองขาด C (เป็น SOP แต่ยังไม่ standard)
$(A + \overline{B} + C + D)(A + B + C + \overline{D})(A + \overline{B} + \overline{C} + D)$	A, B, C, D	ใช่	ทั้ง 3 วงเล็บมีครบ 4 ตัว
$(A + \overline{B} + C)(A + B + \overline{D})(A + \overline{B} + \overline{C} + D)$	A, B, C, D	ไม่ใช่	วงเล็บแรกขาด D · วงเล็บที่สองขาด C (เป็น POS แต่ยังไม่ standard)

แปลงนิพจน์ที่ยังไม่ standard ให้เป็น standard (สไลด์หน้า 59)

สูตรที่ใช้ — คนละสูตรสำหรับ SOP กับ POS

สำหรับ SOP: คูณพจน์ที่ขาดตัวแปรด้วย $(X + \overline{X})$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ 1 — **คูณ 1 เข้าไปค่าไม่เปลี่ยน แต่ได้ตัวแปรที่ขาดมาครบ**ครับ

สำหรับ POS: บวกวงเล็บที่ขาดตัวแปรด้วย $X\overline{X}$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ 0 — **บวก 0 เข้าไปค่าไม่เปลี่ยน** แล้วใช้ Distributive Law II $(X + Y)(X + Z) = X + YZ$ อ่านย้อนกลับเพื่อแยกเป็นสองวงเล็บครับ

หมายเหตุเรื่องชื่อกฎ: สไลด์หน้า 59 เรียก $A + \overline{A} = 1$ ว่า `Null law I` และเรียก $A \cdot \overline{A} = 0$ ว่า `Null law II` ครับ แต่ถ้าดูสไลด์หน้า 28 กับ 31 ที่นิยามกฎไว้ จะเห็นว่าสองสูตรนี้จริง ๆ คือ **Complementary Law I และ II** ส่วน null law คือ $A + 1 = 1$ กับ $A \cdot 0 = 0$ **ตอนสอบให้เขียนสูตรให้ถูกเป็นหลัก** ถ้าจะเขียนชื่อกฎ พี่แนะนำเขียนทั้งสองชื่อกำกับไว้เลยครับ

I DO — พี่ทำให้ดู

แปลง $A\overline{B}C$ ที่ขาด D ให้เป็น standard SOP

1

$$A\overline{B}C$$

ตรวจสอบว่าขาดตัวแปรตัวไหน

domain คือ $\{A, B, C, D\}$ แต่พจน์ $A\overline{B}C$ มีแค่ A, B, C **เพราะ** D หายไป พจน์นี้จึงยังไม่ standard ครับ

2

$$A\overline{B}C(D + \overline{D})$$

คูณด้วย $(D + \overline{D})$ **—** Complementary Law I **อ่านย้อนกลับ**

$A\overline{B}C = A\overline{B}C \cdot 1 = A\overline{B}C(D + \overline{D})$ **เพราะ** $D + \overline{D} = 1$ เสมอ การคูณ 1 ไม่เปลี่ยนค่าเลยแม้แต่แถวเดียวครับ

3

$$A\overline{B}CD + A\overline{B}C\overline{D}$$

กระจายวงเล็บ — Distributive Law I

$A\overline{B}C(D + \overline{D}) = A\overline{B}CD + A\overline{B}C\overline{D}$ **เพราะ** แจก $A\overline{B}C$ เข้าไปทั้งสองตัว ตอนนี้ทั้งสองพจน์มีครบ 4 ตัวแล้ว

ตอบ: $A\overline{B}C = A\overline{B}CD + A\overline{B}C\overline{D}$ **(standard SOP)**

พจน์เดียวกลายเป็นสองพจน์ — **standard form ยาวกว่าเสมอ นั่นคือราคาที่จ่ายเพื่อความเป็นมาตรฐาน**ครับ

ตรวจ

แทน $A = 1, B = 0, C = 1, D = 1 \rightarrow$ ซ้าย $= 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \cdot$ ขวา $= 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0 = 1 + 0 = 1$ ✓

แทน $A = 1, B = 0, C = 1, D = 0 \rightarrow$ ซ้าย $= 1 \cdot$ ขวา $= 0 + 1 = 1$ ✓ · แทน $A = 1, B = 1, C = 1, D = 1 \rightarrow$ ซ้าย $= 0 \cdot$ ขวา $= 0 + 0 = 0$ ✓ (รันด้วย `same_logic()` ครบ 16 แถว ได้ True)

WE DO — ทำด้วยกัน

คราวนี้เป็น POS ซึ่งใช้คนละสูตร ลองเติมเองก่อนครับ

> Convert to standard POS form (missing variable D): $A + \overline{B} + C$

เติมสองช่องครับ ① บวกอะไรเข้าไป ② แยกออกเป็นสองวงเล็บได้ยังไง

$$A + \overline{B} + C = A + \overline{B} + C + \text{.....}$$

ช่อง ① — ของที่บวกเข้าไปต้องมีค่าเป็น .....

$$= (\text{.....})(\text{.....})$$

ช่อง ② — ใช้กฎ .....

เฉลย W7.1

ช่อง ① — บวกด้วย $D\overline{D}$ ครับ ซึ่งมีค่าเป็น 0 เหตุผล: ในทรง POS วงเล็บเชื่อมกันด้วยการบวก เราจึงต้องเติมของที่**บวกแล้วไม่เปลี่ยนค่า** ซึ่งคือ 0 (Identity Law I) และเราเขียน 0 ในรูป $D\overline{D}$ (Complementary Law II อ่านย้อนกลับ) เพื่อให้ D โผล่เข้ามาในนิพจน์ครับ
ห้ามใช้ $(D + \overline{D})$ **เด็ดขาด** เพราะนั่นคือ 1 และ $X + 1 = 1$ จะทำให้นิพจน์พังทั้งอัน

ช่อง ② — แยกด้วย Distributive Law II อ่านย้อนกลับ ครับ สูตรคือ $X + YZ = (X + Y)(X + Z)$ โดยในข้อนี้ $X = A + \overline{B} + C, Y = D, Z = \overline{D}$
ได้ $(A + \overline{B} + C + D)(A + \overline{B} + C + \overline{D})$ — ทั้งสองวงเล็บมีครบ 4 ตัวแล้ว

ตรวจ: $A = 0, B = 1, C = 0, D = 1 \rightarrow$ ซ้าย $= 0 + 0 + 0 = 0 \cdot$ ขวา $= (0 + 0 + 0 + 1)(0 + 0 + 0 + 0) = 1 \cdot 0 = 0$ ✓
$A = 1, B = 1, C = 0, D = 0 \rightarrow$ ซ้าย $= 1 \cdot$ ขวา $= (1 + \cdots)(1 + \cdots) = 1 \cdot 1 = 1$ ✓ (รันด้วย `same_logic()` ครบ 16 แถว ได้ True)

ตอบ: $A + \overline{B} + C = (A + \overline{B} + C + D)(A + \overline{B} + C + \overline{D})$
"Add $D\overline{D} = 0$, then apply $X + YZ = (X + Y)(X + Z)$."

YOU DO — ตาน้อง

สามข้อสั้น ๆ เช็คว่าแยก SOP/POS ออกและแปลง standard ได้จริง

Y7.1

> For each expression, state whether it is SOP, POS, or neither:
> (i) $\overline{A}B + C\overline{D}$ (ii) $(A + \overline{B})(C + D)$ (iii) $A(B + C)$ (iv) $\overline{A + B} + CD$

ดูเครื่องหมายนอกสุด และดูว่ามีขีดคลุมเกินหนึ่งตัวไหมครับ

เฉลย Y7.1

(i) $\overline{A}B + C\overline{D}$ **— เป็น SOP ครับ** เหตุผล: เครื่องหมายนอกสุดคือ $+$ แต่ละพจน์เป็นการคูณล้วน และขีดทุกเส้นคลุมตัวแปรเดี่ยว ๆ ครบเงื่อนไข (แต่**ไม่ standard** เพราะพจน์แรกขาด C, D พจน์ที่สองขาด A, B)

(ii) $(A + \overline{B})(C + D)$ **— เป็น POS ครับ** เหตุผล: เครื่องหมายนอกสุดคือการคูณระหว่างสองวงเล็บ แต่ละวงเล็บเป็นการบวกล้วน และขีดคลุมตัวเดียว (ไม่ standard เหมือนกัน เพราะวงเล็บแรกขาด C, D)

(iii) $A(B + C)$ **— เป็น POS ครับ (แต่ไม่ standard)** เหตุผล: เครื่องหมายนอกสุดคือการคูณ ระหว่าง A กับ $(B + C)$ และ**ตัวแปรเดี่ยวนับเป็น sum term ที่มีสมาชิกตัวเดียวได้** — ดูสไลด์เองก็ได้ครับ `SOP example 1` คือ $X + \overline{Y}Z$ ซึ่ง X ตัวเดียวก็นับเป็น product term
แต่ไม่ใช่ SOP แน่นอน เพราะยังมีวงเล็บบวกถูกคูณอยู่ **ถ้าอยากได้ SOP ต้องกระจายก่อนเป็น** $AB + AC$

(iv) $\overline{A + B} + CD$ **— ไม่ใช่ทั้งคู่ครับ** เหตุผล: มีขีดคลุมสองตัว (A กับ B) ซึ่งผิดกฎเหล็กของทั้ง SOP และ POS **ต้องแตก De Morgan ก่อน**ได้ $\overline{A}\,\overline{B} + CD$ ซึ่งเป็น SOP

ตอบ: (i) SOP · (ii) POS · (iii) POS (ไม่ใช่ SOP — ต้องกระจายก่อน) · (iv) neither (ต้องแตกขีดก่อน)
"(i) SOP, (ii) POS, (iii) POS — not SOP until expanded to $AB + AC$*, (iv) neither — apply De Morgan first to get* $\overline{A}\,\overline{B} + CD$*."*

Y7.2

> Convert $\overline{A}B + A\overline{B}C$ to standard SOP form.

domain คือ $\{A, B, C\}$ ครับ ดูว่าพจน์ไหนขาดตัวไหน

เฉลย Y7.2

ขั้น 1 — หา domain แล้วเช็คทีละพจน์ domain $= \{A, B, C\}$ (3 ตัว) · พจน์ $\overline{A}B$ มี 2 ตัว **ขาด** C · พจน์ $A\overline{B}C$ มีครบ 3 ตัวแล้ว ✓

ขั้น 2 — เติม C **ให้พจน์แรก** คูณด้วย $(C + \overline{C})$ ซึ่งเท่ากับ 1 **เพราะ** ทรง SOP เชื่อมด้วยการบวก แต่ละพจน์เป็นการคูณ เราจึงคูณด้วย 1 เพื่อไม่ให้ค่าเปลี่ยน:
$\overline{A}B = \overline{A}B(C + \overline{C})$

ขั้น 3 — กระจาย (Distributive Law I) $\overline{A}B(C+\overline{C}) = \overline{A}BC + \overline{A}B\overline{C}$

ขั้น 4 — ประกอบกับพจน์เดิม ได้ $\overline{A}BC + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}C$ ทั้งสามพจน์มีครบ 3 ตัวแล้ว

ตรวจ: $A=0,B=1,C=0 \rightarrow$ ซ้าย $= 1\cdot 1+0 = 1 \cdot$ ขวา $= 0+1+0 = 1$ ✓ · $A=1,B=0,C=1 \rightarrow$ ซ้าย $= 0+1 = 1 \cdot$ ขวา $= 0+0+1 = 1$ ✓ · $A=1,B=1,C=1 \rightarrow$ ซ้าย $= 0+0 = 0 \cdot$ ขวา $= 0$ ✓ (รันด้วย `same_logic()` ได้ True)

ตอบ: $\overline{A}B + A\overline{B}C = \overline{A}BC + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}C$
"Multiply $\overline{A}B$ by $(C+\overline{C})$ to obtain the standard SOP form."

Y7.3

> Rewrite $\overline{(A+B)C}$ as an SOP expression.

ต้องแตกขีดก่อนถึงจะเป็น SOP ได้ครับ (ทวนหัวข้อ 3)

เฉลย Y7.3

ขั้น 1 — เช็คว่าเป็น SOP หรือยัง ยังครับ เพราะมีขีดคลุมทั้ง $(A+B)C$ ผิดกฎเหล็ก

ขั้น 2 — ใต้ขีดเป็นการคูณระหว่าง $(A+B)$ กับ C ใช้ De Morgan II คูณพลิกเป็นบวก แต่ละก้อนได้ขีดของตัวเอง: $\overline{(A+B)} + \overline{C}$

ขั้น 3 — ยังมีขีดคลุมสองตัว แตกต่อด้วย De Morgan I $\overline{(A+B)} = \overline{A}\,\overline{B}$

ขั้น 4 — ประกอบ ได้ $\overline{A}\,\overline{B} + \overline{C}$ — เครื่องหมายนอกสุดเป็น $+$ แต่ละพจน์เป็นการคูณ ขีดทุกเส้นคลุมตัวเดียว **เป็น SOP แล้วครับ**

ตรวจ: $A=0,B=0,C=1 \rightarrow$ ซ้าย $= \overline{0\cdot 1} = 1 \cdot$ ขวา $= 1+0 = 1$ ✓ · $A=1,B=0,C=1 \rightarrow$ ซ้าย $= \overline{1\cdot 1} = 0 \cdot$ ขวา $= 0+0 = 0$ ✓

ตอบ: $\overline{(A+B)C} = \overline{A}\,\overline{B} + \overline{C}$ **(SOP)**
"$\overline{(A+B)C} = \overline{(A+B)} + \overline{C} = \overline{A}\,\overline{B} + \overline{C}$, which is in SOP form."

ปูทางไป EP07

EP07 จะเอาสองคำนี้ไปต่อยอดครับ — น้องจะได้เรียกพจน์ใน standard SOP ว่า **minterm** และเรียกวงเล็บใน standard POS ว่า **maxterm** แล้วเขียนย่อเป็นสัญกรณ์ $\sum m(1,3,5)$ กับ $\prod M(0,2,4)$

เหตุผลที่ต้องมี standard form ก็จะชัดขึ้นตอนนั้นเอง — เพราะพจน์ที่มีตัวแปรครบทุกตัว**จับคู่กับแถวในตารางค่าความจริงได้แถวต่อแถวพอดี** ครับ

8 เฉลย Assignment #3 ข้อ 3 — (a) (b) (c)

อ่านก่อนเริ่ม · โจทย์ข้อ 3 ต้องการอะไร

โจทย์ข้อ 3 เขียนสั้นมากว่า `Apply De Morgan's laws to the following expressions` ครับ — **แต่สิ่งที่โจทย์ต้องการจริง ๆ คือ "ทำจนไม่มีขีดไหนคลุมเกินหนึ่งตัวแปร"** (สไลด์เขียนคำสั่งเต็มไว้ว่า `Remove every bar so that no bar covers more than one variable`)

เพราะฉะนั้นก่อนส่งทุกข้อ ให้ไล่นิ้วดูคำตอบตัวเอง — ถ้ายังเจอขีดที่พาดผ่านตัวแปรตั้งแต่สองตัวขึ้นไป หรือพาดผ่านวงเล็บ แปลว่ายังทำไม่จบครับ

ทุกข้อในหัวข้อ 8–11 พี่ตรวจด้วย `same_logic()` **ใน** `tools/dig.py` **จริง** ก่อนพิมพ์ลงชีท — เอานิพจน์ต้นฉบับกับคำตอบมากดตารางค่าความจริงทุกแถวเทียบกัน ถ้าได้ `False` แปลว่าเฉลยผิด ห้ามส่งครับ

ข้อ 3 (a)

3 (a) Assignment #3

> Apply De Morgan's laws to the following expression: $\overline{ABC + DEF}$

แปล: ใช้กฎเดอมอร์แกนกับ $\overline{ABC + DEF}$ ครับ

โจทย์ซ่อนอะไรไว้: ขีดมีชั้นเดียวก็จริง แต่**หลังแตกรอบแรกจะเกิดขีดใหม่สองเส้นที่ยังคลุมสามตัว** ต้องแตกอีกรอบ — ข้อนี้จึงต้องใช้ De Morgan รวม 3 ครั้ง ไม่ใช่ครั้งเดียว

$$\overline{\mathrm{ABC} + \mathrm{DEF}}$$

ขีดชั้นบนสุด (สีแดง) คือชั้นที่ต้องแตกก่อน

① ตั้งเลขชั้นก่อน — มีขีดเส้นเดียว เป็นชั้น 1 คลุมทั้ง ABC และ DEF

② เตรียมก่อนลงมือ

ใช้วิธีไหน: ลอกขีดทีละชั้นจากนอกเข้าใน ตามวิธีในหัวข้อ 4 ครับ

กฎที่จะใช้: ① De Morgan's Law I ($\overline{X + Y} = \overline{X}\,\overline{Y}$) สำหรับขีดนอก เพราะใต้ขีดเป็นการบวก ② De Morgan's Law II ($\overline{XY} = \overline{X} + \overline{Y}$) สำหรับขีดที่เกิดใหม่สองเส้น เพราะใต้ขีดใหม่เป็นการคูณ

③ ไล่ทีละขั้น — ทุกบรรทัดกำกับชื่อกฎ

$$\overline{ABC + DEF}$$

โจทย์ตั้งต้น — ใต้ขีดคือ (ABC) บวกกับ (DEF)

$$= \overline{ABC} \cdot \overline{DEF}$$

De Morgan's Law I — ขีดแตก บวกพลิกเป็นคูณ แต่ละก้อนได้ขีดใหม่

$$\overline{\mathrm{ABC}} \quad . \quad \overline{\mathrm{DEF}}$$

หลังแตกขีดชั้นนอก — บวกกลายเป็นคูณ แต่ละก้อนได้ขีดของตัวเอง

ภาพหลังขั้นแรก — ขีดยาวหายไปแล้ว แต่เกิดขีดใหม่สองเส้นที่ยังคลุมสามตัวอยู่ ต้องแตกต่อ

$$= (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}) \cdot \overline{DEF}$$

De Morgan's Law II — ใต้ขีดซ้ายเป็นการคูณ พลิกเป็นบวก แจกขีดให้ทุกตัว

$$= (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})(\overline{D} + \overline{E} + \overline{F})$$

De Morgan's Law II อีกครั้ง — ทำเหมือนกันกับก้อนขวา

④ คำตอบสุดท้าย

$$\overline{ABC + DEF} = (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})(\overline{D} + \overline{E} + \overline{F})$$

ไล่นิ้วเช็ค: ขีดทุกเส้นคลุมตัวเดียว ✓ · *“$\overline{ABC + DEF} = (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})(\overline{D} + \overline{E} + \overline{F})$.”*

⑤ ตรวจด้วยวิธีที่สอง

วิธีที่ 1 — แทนค่าเช็คแบบเร็ว: ให้ $A = B = C = 1$ (ทำให้ $ABC = 1$) และ $D = E = F = 0$

ต้นฉบับ $= \overline{1 + 0} = \overline{1} = 0$ · คำตอบ $= (0 + 0 + 0)(1 + 1 + 1) = 0 \cdot 1 = 0$ ✓

วิธีที่ 2 — รัน `same_logic()` เทียบทั้ง 64 แถว:

tools/dig.py

```
same_logic("~((A&B&C)|(D&E&F))",
           "(~A|~B|~C)&(~D|~E|~F)", "ABCDEF")
>>> True
```

⑥ กับดักของข้อนี้

คำตอบผิดที่พบบ่อยที่สุด: $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{D}\,\overline{E}\,\overline{F}$ — เกิดจาก**แตกขีดแล้วลืมพลิกเครื่องหมายชั้นนอก** (เอา $+$ ไว้เหมือนเดิม แล้วไปพลิกข้างในแทน)

พิสูจน์ว่าผิด: ให้ $A = B = C = 1, D = E = F = 1$ → ของจริง $= \overline{1+1} = 0$ · ของผิด $= 0 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$ (บังเอิญตรง)

ลองใหม่ $A = B = C = 0, D = E = F = 0$ → ของจริง $= \overline{0+0} = 1$ · ของผิด $= 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ (ตรงอีก)

ลอง $A = 1, B = 0, C = 0, D = 1, E = 0, F = 0$ → ของจริง $= \overline{0+0} = 1$ · ของผิด $= 0 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \cdot 1 = 0$ ✗ ผิดตรงนี้

บทเรียน: อย่าเช็คแค่แถวเดียวแล้วสรุปว่าถูก — ต้องเลือกแถวที่ค่าไม่เหมือนกันหมด ถึงจะจับความต่างได้ครับ

หัวใจของข้อนี้: ขีดหนึ่งชั้น แต่แตกสามรอบ — เพราะทุกครั้งที่แตก จะเกิดขีดใหม่ที่ต้องแตกต่อจนกว่าจะเหลือตัวเดียว

ข้อ 3 (b)

3 (b) Assignment #3

> Apply De Morgan's laws to the following expression: $\overline{A\overline{B} + \overline{C}D + EF}$

แปล: ใช้กฎเดอมอร์แกนกับ $\overline{A\overline{B} + \overline{C}D + EF}$ ครับ

โจทย์ซ่อนอะไรไว้: ① ใต้ขีดยาวมี **สามก้อน** ไม่ใช่สอง ② มีขีดเล็กซ่อนอยู่แล้วบน B กับ C ซึ่งพอโดนขีดใหม่จะกลายเป็น**ขีดซ้อนขีด**ที่ต้องเก็บด้วย involution

$$\overline{A\overline{B} + \overline{C}D + EF}$$

ขีดชั้นบนสุด (สีแดง) คือชั้นที่ต้องแตกก่อน

① ตั้งเลขชั้น — ขีดแดงคือชั้น 2 (คลุมทั้งหมด) · ขีดดำสองเส้นบน B กับ C คือชั้น 1

② เตรียมก่อนลงมือ

ใช้วิธีไหน: แตกชั้น 2 ก่อนด้วย De Morgan I (ใต้ขีดเป็นการบวกสามก้อน) แล้วแตกขีดใหม่ทั้งสามเส้นด้วย De Morgan II แล้วปิดท้ายด้วย involution ที่ B กับ C

กฎที่จะใช้: De Morgan I → De Morgan II (สามครั้ง) → Involution (สองครั้ง)

③ ไล่ทีละขั้น

$$\overline{A\overline{B} + \overline{C}D + EF}$$

โจทย์ตั้งต้น — ใต้ขีดยาวมีสามก้อนบวกกัน

$$= \overline{A\overline{B}} \cdot \overline{\overline{C}D} \cdot \overline{EF}$$

De Morgan's Law I — บวกทั้งหมดพลิกเป็นคูณ ทั้งสามก้อนได้ขีดของตัวเอง



หลังแตกขีดชั้นนอก — ได้สามก้อนคูณกัน สองก้อนแรกมีขีดซ้อนขีด

ภาพหลังขั้นแรก — สองก้อนซ้ายกลายเป็นขีดซ้อนขีดแล้ว แต่**ยังตัดด้วย involution ไม่ได้** เพราะขีดสองชั้นคลุมคนละขอบเขตกัน

$$= (\overline{A} + \overline{\overline{B}})(\overline{\overline{C}} + \overline{D})(\overline{E} + \overline{F})$$

De Morgan's Law II สามครั้ง — ใต้ขีดใหม่ทุกเส้นเป็นการคูณ พลิกเป็นบวก

$$= (\overline{A} + B)(C + \overline{D})(\overline{E} + \overline{F})$$

Involution Law สองครั้ง — $\overline{\overline{B}} = B$ และ $\overline{\overline{C}} = C$

④ คำตอบสุดท้าย

$$\overline{A\overline{B} + \overline{C}D + EF} = (\overline{A} + B)(C + \overline{D})(\overline{E} + \overline{F})$$

ขีดทุกเส้นคลุมตัวเดียว ✓ · *“*$\overline{A\overline{B} + \overline{C}D + EF} = (\overline{A} + B)(C + \overline{D})(\overline{E} + \overline{F})$*.”*

⑤ ตรวจด้วยวิธีที่สอง

วิธีที่ 1 — แทนค่า: ให้ $A=1, B=0$ (ทำให้ $A\overline{B}=1$), $C=1, D=0, E=0, F=0$
ต้นฉบับ $=\overline{1+0+0}=0$ · คำตอบ $=(0+0)(1+1)(1+1)=0\cdot 1\cdot 1=0$ ✓

อีกแถว: $A=0, B=0, C=1, D=1, E=0, F=1 \rightarrow A\overline{B}=0, \overline{C}D=0\cdot 1=0, EF=0 \rightarrow$
ต้นฉบับ $=\overline{0}=1$ · คำตอบ $=(1+0)(1+0)(1+0)=1$ ✓

วิธีที่ 2 — รัน `same_logic()` ครบ 64 แถว:

tools/dig.py

```
same_logic("~((A&~B)|(~C&D)|(E&F))",
           "(~A|B)&(C|~D)&(~E|~F)", "ABCDEF")
>>> True
```

⑥ กับดักของข้อนี้

คำตอบผิดที่พบบ่อย: $(\overline{A}+\overline{B})(\overline{C}+\overline{D})(\overline{E}+\overline{F})$ — เกิดจาก**ลืมว่า B กับ C มีขีดอยู่ก่อนแล้ว** พอแจกขีดใหม่เข้าไปมันกลายเป็นขีดสองชั้น ต้องตัดด้วย involution ให้เหลือ B กับ C เปล่า ๆ ไม่ใช่ $\overline{B}$ กับ $\overline{C}$

พิสูจน์ว่าผิด: $A=1, B=1, C=0, D=0, E=0, F=0 \rightarrow A\overline{B}=1\cdot 0=0, \overline{C}D=1\cdot 0=0,$
$EF=0 \rightarrow$ ของจริง $=\overline{0}=1$
ของผิด $=(0+0)(1+1)(1+1)=0$ ✗ · ของถูก $=(0+1)(0+1)(1+1)=1$ ✓

วิธีกัน: ก่อนเขียนคำตอบ ให้กลับไปดูโจทย์ว่า **ตัวไหนมีขีดอยู่แล้วบ้าง** — ตัวพวกนั้นจะกลายเป็น “ไม่มีขีด” ในคำตอบเสมอครับ

หัวใจของข้อนี้: ตัวแปรที่มีขีดอยู่แล้วในโจทย์ จะกลายเป็นตัวเปล่าในคำตอบ — และตัวเปล่าจะกลายเป็นตัวมีขีด

ข้อ 3 (c)

3 (c) Assignment #3

> Apply De Morgan's laws to the following expression: $\overline{\overline{ABC}+D+E}$

แปล: ใช้กฎเดอมอร์แกนกับ $\overline{\overline{ABC}+D+E}$ ครับ
โจทย์ซ่อนอะไรไว้: ข้อนี้เป็น**ขีดซ้อนขีดของจริงข้อแรก** — ขีดชั้น 2 คลุมทุกอย่าง ส่วนขีดชั้น 1 คลุมแค่ ABC **ห้ามเผลอไปแตกขีดชั้น 1 ก่อนเด็ดขาด**

$$\overline{\overline{ABC} + D + E}$$

ขีดชั้นบนสุด (สีแดง) คือชั้นที่ต้องแตกก่อน

① ตั้งเลขชั้น — ขีดแดงคือชั้น 2 คลุมทั้ง $\overline{ABC}$, D และ E · ขีดดำสั้นคือชั้น 1 คลุมแค่ ABC

② เตรียมก่อนลงมือ

ใช้วิธีไหน: แตกชั้น 2 ก่อน (ใต้ขีดเป็นการบวกสามก้อน) แล้วก้อนซ้ายจะกลายเป็น ขีดสองชั้นที่**คลุม** ABC **เท่ากันเป๊ะ** → ใช้ involution ตัดทิ้งได้เลย ไม่ต้องแตกซ้ำ

กฎที่จะใช้: De Morgan's Law I → Involution Law

③ ไล่ทีละขั้น

$$\overline{\overline{ABC} + D + E}$$

โจทย์ตั้งต้น — ใต้ขีดชั้น 2 มีสามก้อน คือ $\overline{ABC}$, D, E บวกกัน

$$= \overline{\overline{ABC}} \cdot \overline{D} \cdot \overline{E}$$

De Morgan's Law I — บวกพลิกเป็นคูณ ทั้งสามก้อนได้ขีดของตัวเอง

$$\overline{\overline{ABC}} \;.\; \overline{D} \;.\; \overline{E}$$

หลังแตกขีดชั้นนอก — ก้อนซ้ายมีขีดสองชั้นคลุม ABC เท่ากันเป๊ะ พร้อมใช้ involution

ภาพหลังขั้นแรก — ก้อนซ้ายมีขีดสองชั้น **ขอบซ้ายตรงกัน ขอบขวาตรงกัน** เข้าเงื่อนไข involution พอดี

$$= ABC \cdot \overline{D} \cdot \overline{E}$$

Involution Law — $\overline{\overline{ABC}} = ABC$ เพราะขีดสองชั้นคลุมของสิ่งเดียวกัน

$$= ABC\overline{D}\,\overline{E}$$

เขียนติดกันตามธรรมเนียม (การคูณไม่ต้องใส่จุด)

④ คำตอบสุดท้าย

$$\overline{\overline{ABC} + D + E} = ABC\overline{D}\,\overline{E}$$

ขีดสองเส้นที่เหลือคลุม D กับ E ตัวเดียว ✓ · *“$\overline{\overline{ABC} + D + E} = \overline{\overline{ABC}} \cdot \overline{D} \cdot \overline{E} = ABC\overline{D}\,\overline{E}$.”*

⑤ ตรวจด้วยวิธีที่สอง

วิธีที่ 1 — แทนค่า: $A=B=C=1, D=0, E=0 \to \overline{ABC}=\overline{1}=0 \to$ ต้นฉบับ $=\overline{0+0+0}=1 \cdot$ คำตอบ $=1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1=1$ ✓

$A=1, B=0, C=1, D=0, E=0 \to \overline{ABC}=\overline{0}=1 \to$ ต้นฉบับ $=\overline{1+0+0}=0 \cdot$ คำตอบ $=1\cdot0\cdot1\cdots=0$ ✓

วิธีที่ 2 — รัน `same_logic()` **ครบ 32 แถว:**

tools/dig.py

```
same_logic("~(~(A&B&C)|D|E)",
           "A&B&C&~D&~E", "ABCDE")
>>> True
```

⑥ กับดักของข้อนี้

คำตอบผิดแบบที่ 1: $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}\,\overline{E}$ — เกิดจากการ**แตกขีดชั้น 1 ก่อน** (เผลอทำ $\overline{ABC} \to \overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$ ก่อนแล้วค่อยแตกชั้นนอก) ซึ่งทำให้ ABC โดนกลับค่าสองรอบแบบผิดจังหวะ

คำตอบผิดแบบที่ 2: $(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})\overline{D}\,\overline{E}$ — เกิดจาก**ลืม involution** แล้วไปแตกขีดชั้นในซ้ำอีกรอบทั้งที่ตัดทิ้งได้เลย

พิสูจน์ว่าผิด: $A=B=C=1, D=E=0 \to$ ของจริงได้ $1\cdot$ ผิดแบบที่ 1 ได้ $0\cdot0\cdot0\cdot1\cdot1=0$ ✗ · ผิดแบบที่ 2 ได้ $(0+0+0)\cdot1\cdot1=0$ ✗

วิธีกัน: ท่องกฎเหล็กไว้ — **“แตกจากชั้นนอกเข้าใน ทีละชั้น”** และ**เช็ค involution ทุกครั้งที่เห็นขีดซ้อนขีด ก่อนจะแตกอะไรเพิ่ม**ครับ

หัวใจของข้อนี้: ขีดซ้อนขีดที่ “ขอบตรงกันเป๊ะ” ตัดทิ้งได้ทันที ไม่ต้องแตก De Morgan ซ้ำ

9 เฉลย Assignment #3 ข้อ 3 — (d) (e) (f)

ข้อ 3 (d)

3 (d) Assignment #3

> Apply De Morgan's laws to the following expression: $\overline{(\overline{A+B})+\overline{C}}$

แปล: ใช้กฎเดอมอร์แกนกับ $\overline{(\overline{A+B})+\overline{C}}$ ครับ
โจทย์ซ่อนอะไรไว้: ข้อนี้**ไม่ต้องแตก De Morgan ซ้ำเลยแม้แต่ครั้งเดียวหลังรอบแรก** — เพราะพอแตกชั้นนอกแล้ว ทั้งสองก้อนจะกลายเป็นขีดซ้อนขีดที่ตัดด้วย involution ได้ทันที **ถ้าน้องเห็นตรงนี้ ข้อนี้ใช้เวลา 20 วินาที ถ้าไม่เห็นจะวนอยู่นาน**

$$\overline{(\overline{A}+\overline{B})}+\overline{C}$$

ขีดชั้นบนสุด (สีแดง) คือชั้นที่ต้องแตกก่อน

① ตั้งเลขชั้น — ขีดแดงคือชั้น 2 คลุมทั้งหมด · ขีดดำเส้นซ้ายคือชั้น 1 คลุม $A+B$ · ขีดดำเส้นขวาคือชั้น 1 คลุม C

② เตรียมก่อนลงมือ

ใช้วิธีไหน: แตกชั้น 2 ก่อนด้วย De Morgan I เพราะใต้ขีดชั้น 2 คือ $\overline{(A+B)}$ **บวก** $\overline{C}$ (สองก้อน)

กฎที่จะใช้: De Morgan's Law I → Involution Law (สองครั้ง) → (ถ้าอยากได้ทรง SOP ค่อยกระจายด้วย Distributive Law I)

③ ไล่ทีละขั้น

$$\overline{(\overline{A+B})+\overline{C}}$$

โจทย์ตั้งต้น — ใต้ขีดชั้น 2 มีสองก้อนบวกกัน

$$=\overline{(\overline{A+B})}\cdot\overline{\overline{C}}$$

De Morgan's Law I — บวกพลิกเป็นคูณ ทั้งสองก้อนได้ขีดใหม่ทับของเดิม

$$\overline{\overline{(A + B)}} \cdot \overline{\overline{C}}$$

หลังแตกขีดชั้นนอก — ทั้งสองก้อนมีขีดสองชั้นคลุมของเดียวกัน ตัดได้ทั้งคู่

ภาพหลังขั้นแรก — ก้อนซ้ายมีขีดสองชั้นคลุม $(A + B)$ ขอบตรงกันเป๊ะ · ก้อนขวามีขีดสองชั้นคลุม C ขอบตรงกันเป๊ะ **ทั้งคู่เข้าเงื่อนไข involution**

$$= (A + B) \cdot C$$

Involution Law สองครั้ง — $\overline{\overline{(A + B)}} = A + B$ และ $\overline{\overline{C}} = C$

$$= AC + BC$$

Distributive Law I (ถ้าโจทย์อยากได้ทรง SOP) — ทั้งสองรูปตอบได้เหมือนกัน

④ คำตอบสุดท้าย

$$\overline{(\overline{A + B}) + \overline{C}} = (A + B)C = AC + BC$$

ไม่มีขีดเหลือเลยสักเส้น ✓ · *“*$\overline{(\overline{A + B}) + \overline{C}} = \overline{\overline{(A + B)}} \cdot \overline{\overline{C}} = (A + B)C$*.”*

⑤ ตรวจด้วยวิธีที่สอง

วิธีที่ 1 — ตารางค่าความจริง 8 แถว (คอลัมน์ที่ 4 คือโจทย์เดิม คอลัมน์ที่ 5 คือคำตอบ):

A	B	C	โจทย์เดิม	$(A+B)C$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

ตรงกันทั้ง 8 แถวครับ — ออก 1 เฉพาะตอนที่ $C = 1$ และมีอย่างน้อยหนึ่งใน A, B เป็น 1

วิธีที่ 2 — รัน `same_logic()` **:**

tools/dig.py

```
same_logic("~(~(A|B)|~C)", "(A|B)&C", "ABC")
>>> True
same_logic("~(~(A|B)|~C)", "(A&C)|(B&C)", "ABC")
>>> True
```

⑥ กับดักของข้อนี้

คำตอบผิดที่พบบ่อย: ABC — เกิดจากการมองว่า “ขีดสามชั้นซ้อนกัน ตัดเหลือขีดเดียว แล้วบวกกลายเป็นคูณ” **ซึ่งเป็นการแตกสองชั้นพร้อมกัน** ซึ่งเป็นสิ่งที่กฎเหล็กห้ามไว้

พิสูจน์ว่าผิด: $A = 1, B = 0, C = 1$ → ของจริง: $\overline{A+B} = \overline{1} = 0 \to \overline{0+\overline{1}} = \overline{0+0} = 1$ · ของผิด $ABC = 1 \cdot 0 \cdot 1 = 0$ ✗ · ของถูก $(1+0) \cdot 1 = 1$ ✓

กับดักที่สอง: ตอบ $(A+B)+C$ — เกิดจากตัด involution ถูกแล้ว แต่**ลืมพลิกเครื่องหมายตอนแตกชั้นนอก** ต้องเป็นการคูณระหว่างสองก้อน ไม่ใช่การบวก

หัวใจของข้อนี้: พอแตกชั้นนอก ขีดใหม่จะไปทับขีดเดิมพอดี กลายเป็น involution ทั้งสองก้อน — ตัดจบเร็วมาก

ข้อ 3 (e)

3 (e) Assignment #3

> Apply De Morgan's laws to the following expression: $\overline{(\overline{A}+B)+CD}$

แปล: ใช้กฎเดอมอร์แกนกับ $\overline{(\overline{A}+B)+CD}$ ครับ
โจทย์ซ่อนอะไรไว้: อย่าหลงว่าข้อนี้เหมือน (d) ครับ — **ที่นี่ขีดชั้น 1 อยู่บน A ตัวเดียว ไม่ได้คลุมวงเล็บ** เพราะฉะนั้นหลังแตกชั้นนอกจะ**ไม่เกิด involution ที่วงเล็บ** ต้องแตก De Morgan ต่ออีกสองรอบ

$$\overline{(\overline{A}+B)+CD}$$

ขีดชั้นบนสุด (สีแดง) คือชั้นที่ต้องแตกก่อน

① ตั้งเลขชั้น — ขีดแดงคือชั้น 2 คลุมทั้งหมด · ขีดดำสั้น ๆ บน A คือชั้น 1 **สังเกตว่าวงเล็บ $(\overline{A}+B)$ ไม่มีขีดของตัวเอง**

② เตรียมก่อนลงมือ

ใช้วิธีไหน: แตกชั้น 2 ด้วย De Morgan I (ใต้ขีดคือวงเล็บ **บวก** CD) แล้วขีดใหม่จะไปคลุมวงเล็บกับ CD ก้อนละหนึ่งเส้น ซึ่งยังคลุมเกินหนึ่งตัว ต้องแตกต่อทั้งคู่

กฎที่จะใช้: De Morgan I → De Morgan I (ก้อนซ้าย เพราะข้างในเป็นบวก) + De Morgan II (ก้อนขวา เพราะข้างในเป็นคูณ) → Involution

③ ไล่ทีละขั้น

$$\overline{(\overline{A}+B)+CD}$$

โจทย์ตั้งต้น — ใต้ขีดชั้น 2 คือ $(\overline{A}+B)$ บวกกับ CD

$$=\overline{(\overline{A}+B)}\cdot\overline{CD}$$

De Morgan's Law I — บวกพลิกเป็นคูณ สองก้อนได้ขีดของตัวเอง

$$\overline{(\overline{A}+B)}\ .\ \overline{CD}$$

หลังแตกขีดชั้นนอก — ก้อนซ้ายยังต้องแตกอีกรอบ ก้อนขวาก็ต้องแตกอีกรอบ

ภาพหลังขั้นแรก — ขีดใหม่คลุมวงเล็บทั้งอัน (ไม่ใช่ขีดซ้อนขีด จึงตัดไม่ได้) และคลุม CD ทั้งคู่ **ต้องแตกต่อทั้งสองก้อน**

$$=\left(\overline{\overline{A}}\cdot\overline{B}\right)\cdot\overline{CD}$$

De Morgan's Law I ที่ก้อนซ้าย — ใต้ขีดเป็นการบวก พลิกเป็นคูณ

$$= A\overline{B} \cdot \overline{CD}$$

Involution Law — $\overline{\overline{A}} = A$

$$= A\overline{B}(\overline{C} + \overline{D})$$

De Morgan's Law II ที่ก้อนขวา — ใต้ขีดเป็นการคูณ พลิกเป็นบวก

$$= A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{D}$$

Distributive Law I — กระจายให้เป็นทรง SOP (จะตอบรูปก่อนหน้าก็ได้ ค่าเท่ากัน)

④ คำตอบสุดท้าย

$$\overline{(\overline{A} + B) + CD} = A\overline{B}(\overline{C} + \overline{D}) = A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{D}$$

ขีดทุกเส้นคลุมตัวเดียว ✓ · “$\overline{(\overline{A} + B) + CD} = \overline{(\overline{A} + B)} \cdot \overline{CD} = A\overline{B}(\overline{C} + \overline{D})$.”

⑤ ตรวจด้วยวิธีที่สอง

วิธีที่ 1 — ตารางค่าความจริง 16 แถว (คอลัมน์ที่ 5 คือโจทย์เดิม คอลัมน์ที่ 6 คือคำตอบ):

A	B	C	D	โจทย์เดิม	$A\overline{B}(\overline{C}+\overline{D})$
0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0
1	1	1	1	0	0

ตรงกันทั้ง 16 แถวครับ — ออก 1 แค่ 3 แถว คือแถวที่ $A=1, B=0$ และ $CD \neq 11$

วิธีที่ 2 — รัน `same_logic()` **:**

tools/dig.py

```
same_logic("~((~A|B)|(C&D))", "A&~B&(~C|~D)", "ABCD")
>>> True
same_logic("~((~A|B)|(C&D))", "(A&~B&~C)|(A&~B&~D)", "ABCD")
>>> True
```

⑥ กับดักของข้อนี้

คำตอบผิดที่พบบ่อยที่สุด: $A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$ — เกิดจากการ**มองว่าใต้ขีดชั้นนอกมีสี่ก้อนบวกกัน** ($\overline{A}$, B, C, D) ทั้งที่จริงมีสองก้อนคือวงเล็บกับ CD ซึ่ง CD เป็นการคูณ

พิสูจน์ว่าผิด: $A=1, B=0, C=1, D=0$ → ของจริง: $(\overline{A}+B)=0+0=0, CD=1\cdot 0=0$ → $\overline{0+0}=1\cdot$ ของผิด $=1\cdot 1\cdot 0\cdot 1=0$ ✗ · ของถูก $=1\cdot 1\cdot(0+1)=1$ ✓

วิธีกัน: ก่อนแตกทุกครั้ง ให้**วงกลมรอบ "ก้อน" ที่อยู่ใต้ขีด** แล้วนับว่ามีกี่ก้อน — วงเล็บนับเป็นก้อนเดียว และตัวแปรที่ติดกัน (CD) ก็นับเป็นก้อนเดียวครับ

หัวใจของข้อนี้: ขีดบนตัวแปรเดี่ยว ($\overline{A}$) กับขีดบนวงเล็บ ($\overline{(A+B)}$) คนละเรื่องกัน — อ่านผิดข้อเดียวเปลี่ยนคำตอบทั้งข้อ

ข้อ 3 (f)

3 (f) Assignment #3

> Apply De Morgan's laws to the following expression: $\overline{ABC}+\overline{(\overline{D}+E)}$

แปล: ใช้กฎเดอมอร์แกนกับ $\overline{ABC}+\overline{(\overline{D}+E)}$ ครับ
โจทย์ซ่อนอะไรไว้: ★ **ข้อนี้ไม่มีขีดคลุมทั้งนิพจน์** — เครื่องหมาย $+$ ตรงกลางอยู่**นอกขีด**ทั้งสองเส้น เพราะฉะนั้น **ห้ามแตะเครื่องหมาย $+$ ตรงกลางเด็ดขาด** ให้แยกทำสองก้อนอิสระแล้วเอามาบวกกันเหมือนเดิม

$$\overline{\mathrm{ABC}}\ +\ \overline{(\overline{\mathrm{D}}\ +\ \mathrm{E})}$$

① ตั้งเลขชั้น — **มีขีดสองกลุ่มที่แยกกันอยู่** ไม่ได้ซ้อนกัน: กลุ่มซ้ายคือขีดเดี่ยวคลุม ABC · กลุ่มขวาคือขีดชั้น 2 คลุม $(\overline{D}+E)$ กับขีดชั้น 1 บน D · **เครื่องหมาย $+$ ตรงกลางไม่ได้อยู่ใต้ขีดไหนเลย**

② เตรียมก่อนลงมือ

ใช้วิธีไหน: แยกเป็นสองงานที่ไม่เกี่ยวกันเลยครับ ทำก้อนซ้ายให้เสร็จ ทำก้อนขวาให้เสร็จ แล้วเอามาบวกกันตอนท้าย

กฎที่จะใช้: ก้อนซ้ายใช้ De Morgan II (ใต้ขีดเป็นการคูณ) · ก้อนขวาใช้ De Morgan I (ใต้ขีดเป็นการบวก) แล้วตามด้วย Involution

③ ไล่ทีละขั้น — แยกสองก้อน

$$\overline{ABC}+\overline{(\overline{D}+E)}$$

โจทย์ตั้งต้น — สองก้อนอิสระ บวกกันอยู่นอกขีด

ก้อนซ้าย $\overline{ABC}$ — ใต้ขีดเป็นการคูณสามตัว

$$\overline{ABC} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$$

De Morgan's Law II — คูณพลิกเป็นบวก แจกขีดให้ทุกตัว

ก้อนขวา $\overline{(\overline{D} + E)}$ — ใต้ขีดเป็นการบวกสองก้อน

$$\overline{(\overline{D} + E)} = \overline{\overline{D}} \cdot \overline{E}$$

De Morgan's Law I — บวกพลิกเป็นคูณ สองก้อนได้ขีดของตัวเอง

$$= D\overline{E}$$

Involution Law — $\overline{\overline{D}} = D$

เอาสองก้อนมาบวกกันเหมือนเดิม (เครื่องหมาย $+$ ตรงกลางไม่เคยถูกแตะเลย)

④ คำตอบสุดท้าย

$$\overline{ABC} + \overline{(\overline{D} + E)} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + D\overline{E}$$

ขีดทุกเส้นคลุมตัวเดียว ✓ · *“*$\overline{ABC} + \overline{(\overline{D} + E)} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + D\overline{E}$*.”*

⑤ ตรวจด้วยวิธีที่สอง

วิธีที่ 1 — แทนค่า: $A = B = C = 1$ (ทำให้ $\overline{ABC} = 0$), $D = 1, E = 0$ → ก้อนขวา $= \overline{(\overline{1} + 0)} = \overline{0} = 1$ → ต้นฉบับ $= 0 + 1 = 1$ · คำตอบ $= 0 + 0 + 0 + 1 \cdot 1 = 1$ ✓

$A = B = C = 1, D = 1, E = 1$ → ก้อนขวา $= \overline{0 + 1} = 0$ → ต้นฉบับ $= 0$ · คำตอบ $= 0 + 0 + 0 + 1 \cdot 0 = 0$ ✓

$A = 1, B = 0, C = 1, D = 0, E = 1$ → ต้นฉบับ $= \overline{0} + \overline{1 + 1} = 1 + 0 = 1$ · คำตอบ $= 0 + 1 + 0 + 0 = 1$ ✓

วิธีที่ 2 — รัน `same_logic()` **ครบ 32 แถว:**

tools/dig.py

```
same_logic("~(A&B&C)|~(~D|E)",
           "~A|~B|~C|(D&~E)", "ABCDE")
>>> True
```

⑥ กับดักของข้อนี้

คำตอบผิดที่พบบ่อยที่สุด: $(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})\cdot D\overline{E}$ — เกิดจาก**เผลอนึกว่ามีขีดคลุมทั้งนิพจน์** แล้วไปพลิกเครื่องหมาย $+$ ตรงกลางเป็น $\cdot$

พิสูจน์ว่าผิด: $A=1, B=0, C=1, D=0, E=0$ → ของจริง $=\overline{0}+\overline{(1+0)}=1+0=1$ · ของผิด $=(0+1+0)\cdot(0\cdot 1)=1\cdot 0=0$ ✗

วิธีกัน: ก่อนทำทุกข้อ ให้**ไล่นิ้วตามขีดที่ยาวที่สุด** แล้วดูว่ามันจบตรงไหน — ถ้ามันจบก่อนถึงเครื่องหมายกลาง แปลว่าเครื่องหมายนั้น**อยู่นอกขีด** และห้ามแตะครับ

หัวใจของข้อนี้: ขีดที่ยาวที่สุดไม่จำเป็นต้องคลุมทั้งนิพจน์เสมอไป — ต้องดูจริง ๆ ว่ามันจบตรงไหน

10 เฉลย Assignment #3 ข้อ 3 — (g) (h) (i)

ข้อ 3 (g)

3 (g) Assignment #3

> Apply De Morgan's laws to the following expression: $\overline{A+B+C}+\overline{\overline{D}E}$

แปล: ใช้กฎเดอมอร์แกนกับ $\overline{A+B+C}+\overline{\overline{D}E}$ ครับ
โจทย์ซ่อนอะไรไว้: เหมือนข้อ (f) ครับ — **เครื่องหมาย $+$ ตรงกลางอยู่นอกขีดทั้งสองเส้น** ขีดเส้นแรกจบที่ C พอดี ไม่ได้ลากยาวไปถึง DE **ต้องซูมดูตรงนี้ให้ชัดบนกระดาษข้อสอบ**

$$\overline{\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C}} + \overline{\overline{\mathrm{D}}\mathrm{E}}$$

① ตั้งเลขชั้น — **ขีดเส้นซ้ายจบที่ C** · ฝั่งขวามีขีดชั้น 2 คลุม $\overline{D}E$ และขีดชั้น 1 บน D · เครื่องหมาย $+$ ตรงกลางลอยอยู่นอกขีดทั้งคู่

② เตรียมก่อนลงมือ

ใช้วิธีไหน: แยกทำสองก้อนอิสระ แล้วเอามาบวกกันเหมือนเดิมครับ
กฎที่จะใช้: ก้อนซ้ายใช้ De Morgan I (ใต้ขีดเป็นการบวกสามตัว) · ก้อนขวาใช้ De Morgan II (ใต้ขีดเป็นการคูณระหว่าง $\overline{D}$ กับ E) แล้วตามด้วย Involution

③ ไล่ทีละขั้น — แยกสองก้อน

$$\overline{A+B+C}+\overline{\overline{D}E}$$

โจทย์ตั้งต้น — สองก้อนอิสระบวกกันอยู่นอกขีด

ก้อนซ้าย $\overline{A+B+C}$ — ใต้ขีดเป็นการบวกสามตัว

$$\overline{A+B+C}=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$$

De Morgan's Law I — บวกทั้งหมดพลิกเป็นคูณ แจกขีดให้ทุกตัว

ก้อนขวา $\overline{\overline{D}E}$ — ใต้ขีดชั้น 2 เป็นการคูณระหว่างสองก้อน

$$\overline{\overline{D}E}=\overline{\overline{D}}+\overline{E}$$

De Morgan's Law II — คูณพลิกเป็นบวก แต่ละก้อนได้ขีดของตัวเอง

$$= D + \overline{E}$$

Involution Law — $\overline{\overline{D}} = D$ เพราะขีดสองชั้นคลุม D ตัวเดียวเป๊ะ

④ คำตอบสุดท้าย

$$\overline{A + B + C} + \overline{\overline{D}E} = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + D + \overline{E}$$

ขีดทุกเส้นคลุมตัวเดียว ✓ · *"$\overline{A + B + C} + \overline{\overline{D}E} = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + D + \overline{E}$."*

⑤ ตรวจด้วยวิธีที่สอง

วิธีที่ 1 — แทนค่า: $A = B = C = 0$ (ทำให้ก้อนซ้าย $= \overline{0} = 1$), $D = 0, E = 1$ → ก้อนขวา $= \overline{\overline{0} \cdot 1} = \overline{1 \cdot 1} = 0$ → ต้นฉบับ $= 1 + 0 = 1$ · คำตอบ $= 1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 + 0 = 1$ ✓

$A = 1, B = 0, C = 0, D = 0, E = 1$ → ก้อนซ้าย $= \overline{1} = 0$ · ก้อนขวา $= \overline{1 \cdot 1} = 0$ → ต้นฉบับ $= 0$ · คำตอบ $= 0 \cdot 1 \cdot 1 + 0 + 0 = 0$ ✓ **(แถวสำคัญ — แยกคำตอบถูกกับผิดได้)**

$A = 1, B = 1, C = 1, D = 1, E = 1$ → ต้นฉบับ $= \overline{1} + \overline{0 \cdot 1} = 0 + 1 = 1$ · คำตอบ $= 0 + 1 + 0 = 1$ ✓

วิธีที่ 2 — รัน `same_logic()` **ครบ 32 แถว:**

tools/dig.py

```
same_logic("~(A|B|C)|~(~D&E)",
           "(~A&~B&~C)|D|~E", "ABCDE")
>>> True
```

⑥ กับดักของข้อนี้

คำตอบผิดแบบที่ 1: $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}(D + \overline{E})$ — เกิดจากคิดว่ามีขีดคลุมทั้งนิพจน์แล้วพลิก $+$ ตรงกลางเป็น $\cdot$

คำตอบผิดแบบที่ 2: $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{D}\,\overline{E}$ — เกิดจากแตกก้อนขวาผิดกฎ (ใช้ De Morgan I ทั้งที่ใต้ขีดเป็นการคูณ) และลืม involution ที่ D

พิสูจน์ว่าผิดทั้งคู่: $A = 1, B = 0, C = 0, D = 1, E = 0$ → ของจริง $= \overline{1} + \overline{\overline{1} \cdot 0} = 0 + \overline{0} = 1$
ผิดแบบที่ 1 $= 0 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (1 + 1) = 0$ ✗ · ผิดแบบที่ 2 $= 0 + 0 \cdot 1 = 0$ ✗ · ของถูก $= 0 + 1 + 1 = 1$ ✓

หัวใจของข้อนี้: ต้องดูให้ออกว่ $\overline{\overline{D}E}$ คือขีดคลุม "ก้อน $\overline{D}E$" ไม่ใช่ขีดคลุม D กับ E แยกกัน

ข้อ 3 (h)

3 (h) Assignment #3

> Apply De Morgan's laws to the following expression: $\overline{(A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+B+\overline{C})}$

แปล: ใช้กฎเดอมอร์แกนกับ $\overline{(A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+B+\overline{C})}$ ครับ
โจทย์ซ่อนอะไรไว้: ① ใต้ขีดยาวคือ**วงเล็บสองอันคูณกัน** ต้องใช้ De Morgan II ก่อน ② ข้างในวงเล็บมีขีดเล็กอยู่ 4 เส้น ซึ่งจะกลายเป็นขีดซ้อนขีดตอนแตกรอบสอง — **ต้อง involution 4 ครั้ง**

$$\overline{(\mathrm{A}+\overline{\mathrm{B}}+\overline{\mathrm{C}})(\overline{\mathrm{A}}+\mathrm{B}+\overline{\mathrm{C}})}$$

ขีดชั้นบนสุด (สีแดง) คือชั้นที่ต้องแตกก่อน

① ตั้งเลขชั้น — ขีดแดงคือชั้น 2 คลุมทั้งสองวงเล็บ · ขีดดำสั้น ๆ สี่เส้นคือชั้น 1 อยู่บน B, C (วงเล็บแรก) และ A, C (วงเล็บที่สอง)

② เตรียมก่อนลงมือ

ใช้วิธีไหน: แตกชั้น 2 ด้วย De Morgan II (เพราะใต้ขีดคือวงเล็บ**คูณ**วงเล็บ) → ได้สองก้อนบวกกัน แต่ละก้อนมีขีดคลุมวงเล็บของตัวเอง → แตกทั้งสองก้อนด้วย De Morgan I (เพราะข้างในวงเล็บเป็นการบวก) → เก็บ involution

กฎที่จะใช้: De Morgan II → De Morgan I (สองครั้ง) → Involution (สี่ครั้ง)

③ ไล่ทีละขั้น

$$\overline{(A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+B+\overline{C})}$$

โจทย์ตั้งต้น — ใต้ขีดยาวคือวงเล็บสองอันคูณกัน

$$=\overline{(A+\overline{B}+\overline{C})}+\overline{(\overline{A}+B+\overline{C})}$$

De Morgan's Law II — คูณพลิกเป็นบวก แต่ละวงเล็บได้ขีดของตัวเอง

$$\overline{(\mathrm{A}+\overline{\mathrm{B}}+\overline{\mathrm{C}})}+\overline{(\overline{\mathrm{A}}+\mathrm{B}+\overline{\mathrm{C}})}$$

หลังแตกขีดชั้นนอก — คูณกลายเป็นบวก แต่ละวงเล็บได้ขีดของตัวเอง

ภาพหลังขั้นแรก — ตอนนี้มีขีดสองเส้น (แดง) คลุมวงเล็บละหนึ่งเส้น และมีขีดเล็กเดิมอยู่ข้างใน **ขีดแดงกับขีดดำคนละขอบเขต จึงยัง involution ไม่ได้**

แตกวงเล็บแรก — ใต้ขีดเป็นการบวกสามก้อน

$$\overline{(A+\overline{B}+\overline{C})} = \overline{A}\cdot\overline{\overline{B}}\cdot\overline{\overline{C}} = \overline{A}BC$$

De Morgan's Law I แล้วตามด้วย Involution Law สองครั้ง

แตกวงเล็บที่สอง — ใต้ขีดเป็นการบวกสามก้อนเหมือนกัน

$$\overline{(\overline{A}+B+\overline{C})} = \overline{\overline{A}}\cdot\overline{B}\cdot\overline{\overline{C}} = A\overline{B}C$$

De Morgan's Law I แล้วตามด้วย Involution Law สองครั้ง

④ คำตอบสุดท้าย

$$\overline{(A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+B+\overline{C})} = \overline{A}BC + A\overline{B}C$$

เขียนแบบดึงตัวร่วมก็ได้: $= C(\overline{A}B + A\overline{B}) = C(A\oplus B)$ **— คือ “XOR ของ A กับ B แล้ว AND กับ C”** ครับ (callback EP05)

ขีดทุกเส้นคลุมตัวเดียว ✓ · *“$\overline{(A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+B+\overline{C})} = \overline{A}BC + A\overline{B}C$.”*

⑤ ตรวจด้วยวิธีที่สอง

วิธีที่ 1 — ตารางค่าความจริง 8 แถว (คอลัมน์ที่ 4 คือโจทย์เดิม คอลัมน์ที่ 5 คือคำตอบ):

A	B	C	โจทย์เดิม	$\overline{A}BC + A\overline{B}C$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	0	0

ตรงกันทั้ง 8 แถวครับ — ออก 1 แค่ 2 แถว คือ 011 และ 101 ซึ่งตรงกับ "$C = 1$ และ A กับ B ต่างกัน" พอดี

วิธีที่ 2 — รัน `same_logic()` :

tools/dig.py

```
same_logic("~((A|~B|~C)&(~A|B|~C))",
           "(~A&B&C)|(A&~B&C)", "ABC")
>>> True
same_logic("~((A|~B|~C)&(~A|B|~C))",
           "C&((~A&B)|(A&~B))", "ABC")
>>> True
```

⑥ กับดักของข้อนี้

คำตอบผิดที่พบบ่อยที่สุด: $\overline{A}BC \cdot A\overline{B}C$ — เกิดจาก**ลืมพลิกเครื่องหมายชั้นนอก** (เห็นวงเล็บสองอันติดกัน แล้วคิดว่ายังคูณกันเหมือนเดิม) ซึ่งคำตอบนั้นมีทั้ง A และ $\overline{A}$ คูณกัน **ค่าเป็น 0 ตลอด** — ผิดชัดเจน

คำตอบผิดแบบที่สอง: $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + AB\overline{C}$ — เกิดจาก**ลืม involution** คือแจกขีดใหม่ให้ทุกตัวโดยไม่ดูว่าตัวไหนมีขีดอยู่แล้ว

พิสูจน์ว่าผิด: $A = 0, B = 1, C = 1$ → ของจริง: วงเล็บแรก $= 0 + 0 + 0 = 0$ → ทั้งหมด $= \overline{0 \cdot (\cdots)} = \overline{0} = 1$

ผิดแบบที่ 1 $= 0$ (ตลอดกาล) ✗ · ผิดแบบที่ 2 $= 1 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot 0 = 0$ ✗ · ของถูก $= 1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 = 1$ ✓

วิธีเช็คเร็ว ๆ: ถ้าคำตอบมี A กับ $\overline{A}$ คูณกันอยู่ในพจน์เดียว แปลว่า**ทำผิดแน่นอน** เพราะพจน์นั้นเป็น 0 ตลอด — ไม่มีข้อสอบข้อไหนเฉลยเป็น 0 เปล่า ๆ ครับ

หัวใจของข้อนี้: ขีดคลุมผลคูณของสองวงเล็บ → ต้องกลายเป็นผลบวก และตัวที่มีขีดอยู่แล้วต้องกลายเป็นตัวเปล่า

ข้อ 3 (i)

3 (i) Assignment #3

> Apply De Morgan's laws to the following expression: $\overline{\overline{A}BC + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}}$

แปล: ใช้กฎเดอมอร์แกนกับ $\overline{\overline{A}BC + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}}$ ครับ
โจทย์ซ่อนอะไรไว้: พจน์ที่สองมี**ขีดสามเส้นแยกกันบน** A, B, C (ไม่ใช่ขีดเดียวยาวคลุมสามตัว) — **ต้องซูมดูให้ชัดมาก** เพราะถ้าอ่านเป็นขีดเดียวจะได้คำตอบผิดทั้งข้อ

$$\overline{\overline{A}BC + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}}$$

ขีดชั้นบนสุด (สีแดง) คือชั้นที่ต้องแตกก่อน

① ตั้งเลขชั้น — ขีดแดงคือชั้น 2 คลุมทั้งสองพจน์ · ขีดดำคือชั้น 1: **พจน์แรกมีขีดเส้นเดียวบน** A · **พจน์ที่สองมีสามเส้นแยกกันบน** A, B, C

② เตรียมก่อนลงมือ

ใช้วิธีไหน: แตกชั้น 2 ด้วย De Morgan I (ใต้ขีดคือสองพจน์**บวก**กัน) → ได้สองก้อนคูณกัน แต่ละก้อนมีขีดคลุมพจน์ทั้งพจน์ → แตกทั้งสองด้วย De Morgan II (เพราะข้างในพจน์เป็นการคูณ) → เก็บ involution
กฎที่จะใช้: De Morgan I → De Morgan II (สองครั้ง) → Involution (สี่ครั้ง)

③ ไล่ทีละขั้น

$$\overline{\overline{A}BC + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}}$$

โจทย์ตั้งต้น — ใต้ขีดชั้น 2 คือสองพจน์บวกกัน

$$= \overline{\overline{A}BC} \cdot \overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}}$$

De Morgan's Law I — บวกพลิกเป็นคูณ แต่ละพจน์ได้ขีดของตัวเอง



หลังแตกขีดชั้นนอก — บวกกลายเป็นคูณ ได้สองก้อนที่มีขีดซ้อนขีด

ภาพหลังขั้นแรก — ขีดแดงสองเส้นคลุมพจน์ละหนึ่งเส้น **ขอบไม่ตรงกับขีดเล็กข้างใน จึงยังใช้ involution ไม่ได้** ต้องแตกด้วย De Morgan II ก่อน

แตกก้อนซ้าย — ใต้ขีดคือ $\overline{A} \cdot B \cdot C$

$$\overline{\overline{A}BC} = \overline{\overline{A}} + \overline{B} + \overline{C} = A + \overline{B} + \overline{C}$$

De Morgan's Law II แล้วตามด้วย Involution Law ที่ A

แตกก้อนขวา — ใต้ขีดคือ $\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$

$$\overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}} = \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} + \overline{\overline{C}} = A + B + C$$

De Morgan's Law II แล้วตามด้วย Involution Law สามครั้ง

④ คำตอบสุดท้าย

$$\overline{\overline{A}BC + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}} = (A + \overline{B} + \overline{C})(A + B + C)$$

ย่อต่อได้อีก (โบนัส): ใช้ Distributive Law II $(X + Y)(X + Z) = X + YZ$ โดย $X = A \rightarrow = A + (\overline{B} + \overline{C})(B + C) = A + B\overline{C} + \overline{B}C = A + (B \oplus C)$

ขีดทุกเส้นคลุมตัวเดียว ✓ · *“*$\overline{\overline{A}BC + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}} = (A + \overline{B} + \overline{C})(A + B + C)$*.”*

⑤ ตรวจด้วยวิธีที่สอง

วิธีที่ 1 — ตารางค่าความจริง 8 แถว (คอลัมน์ที่ 4 คือโจทย์เดิม คอลัมน์ที่ 5 คือคำตอบ):

A	B	C	โจทย์เดิม	$(A+\overline{B}+\overline{C})(A+B+C)$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

ตรงกันทั้ง 8 แถวครับ — ออก 0 แค่ 2 แถว คือ 011 (พจน์ $\overline{A}BC$ เป็น 1) และ 000 (พจน์ $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ เป็น 1) ซึ่งสมเหตุสมผล เพราะโจทย์คือ “นอตของผลรวมสองพจน์นั้น”

วิธีที่ 2 — รัน `same_logic()` :

tools/dig.py

```
same_logic("~((~A&B&C)|(~A&~B&~C))",
           "(A|~B|~C)&(A|B|C)", "ABC")
>>> True
same_logic("~((~A&B&C)|(~A&~B&~C))",
           "A|(B&~C)|(~B&C)", "ABC")
>>> True
```

⑥ กับดักของข้อนี้

กับดักหลัก — อ่านขีดผิด: ถ้าเผลออ่านพจน์ที่สองเป็น $\overline{ABC}$ (ขีดเดียวยาว) แทนที่จะเป็น $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ (สามเส้นแยกกัน) **คำตอบจะผิดทั้งข้อทันที**

เทียบให้เห็นชัด:
อ่านถูก: $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ → ก้อนขวาได้ $A+B+C$
อ่านผิด: $\overline{ABC}$ → ก้อนขวาจะได้ $\overline{\overline{ABC}} = ABC$ ซึ่ง**คนละเรื่องเลย**

กับดักที่สอง: ตอบ $(A+\overline{B}+\overline{C})+(A+B+C)$ — ลืมพลิก $+$ ชั้นนอกเป็น $\cdot$ ซึ่งจะได้ 1 ตลอด (เพราะรวมกันแล้วครอบทุกกรณี) ผิดชัดเจน

วิธีกัน: ตอนอ่านโจทย์ ให้**นับจำนวนเส้นขีดในแต่ละพจน์ก่อนลงมือ** แล้วเขียนกำกับไว้ข้าง ๆ เช่น “พจน์ 2 = ขีด 3 เส้นแยกกัน” ครับ

หัวใจของข้อนี้: ขีดสามเส้นสั้นไม่เท่ากับขีดเส้นเดียวยาว — ต้องซูมดูขอบขีดให้ชัดก่อนลงมือทุกครั้ง

11 เฉลย Assignment #3 ข้อ 4 (a) (b) และข้อ 5

อ่านก่อนเริ่ม · ข้อ 4 กับข้อ 5 ต่างจากข้อ 3 ตรงไหน

ข้อ 3 สั่งว่า Apply De Morgan's laws — แค่แตกขีดให้หมด ไม่ต้องย่อต่อ

ข้อ 4 สั่งว่า Using Boolean algebra techniques, simplify — ต้องแตกขีดแล้ว**ย่อต่อจนสั้นที่สุด** ด้วยกฎทั้ง 12 ข้อ

ข้อ 5 สั่งว่า Eliminate the consensus terms — ไม่ต้องแตกขีดเลย แต่ต้อง**หาพจน์ที่ซ้ำซ้อนแล้วตัดทิ้ง** ด้วย consensus theorem

อ่านคำสั่งให้ขาดก่อนลงมือครับ — ทำเกินหรือทำขาดคือเสียคะแนนทั้งคู่

ข้อ 4 (a)

4 (a) Assignment #3

> Using Boolean algebra techniques, simplify the following expression: $A\overline{B} + A\overline{(B+C)} + B\overline{(B+C)}$

แปล: ย่อ $A\overline{B} + A\overline{(B+C)} + B\overline{(B+C)}$ ให้สั้นที่สุดครับ

โจทย์ซ่อนอะไรไว้: ① ขีดคลุม $(B+C)$ ทั้งวงเล็บ ต้องแตกก่อน ② พอแตกแล้วจะเกิดพจน์ที่มีทั้ง B และ $\overline{B}$ คูณกัน ซึ่ง**ตายทันที** ③ พจน์ที่เหลือสองพจน์เข้าเงื่อนไข absorption พอดี

$$A\overline{B} + A\overline{(B+C)} + B\overline{(B+C)}$$

① ตั้งเลขชั้น — มีขีดชั้นเดียวสามเส้น: บน B ของพจน์แรก · คลุม $(B+C)$ ของพจน์ที่สอง · คลุม $(B+C)$ ของพจน์ที่สาม **ไม่มีขีดคลุมทั้งนิพจน์**

② เตรียมก่อนลงมือ

ใช้วิธีไหน: ตามลำดับการย่อในหัวข้อ 5 ครับ — จัดการขีดก่อน (ขั้น 1) → กระจายวงเล็บ (ขั้น 2) → สแกนพจน์ที่ตาย (ขั้น 3) → ดึงตัวร่วมยุบ (ขั้น 5)

กฎที่จะใช้: De Morgan I → Distributive I → Complementary II → Null II → Identity I → Distributive I (ดึงตัวร่วม) → Null I → Identity II

③ ไล่ทีละขั้น

$$A\overline{B} + A\overline{(B+C)} + B\overline{(B+C)}$$

โจทย์ตั้งต้น

$$= A\overline{B} + A\,\overline{B}\,\overline{C} + B\,\overline{B}\,\overline{C}$$

De Morgan's Law I — $\overline{(B+C)} = \overline{B}\,\overline{C}$ ใช้กับทั้งสองที่

$$A\overline{B} \;+\; A\overline{B}\overline{C} \;+\; B\overline{B}\overline{C}$$

หลังแตก De Morgan — พจน์ขวาสุดมีทั้ง B และ B (ตัวแดงมีขีด) คูณกัน จึงเป็น 0

ภาพหลังแตกขีด — **พจน์ขวาสุดมีทั้ง B (ไม่มีขีด) และ $\overline{B}$ (ตัวแดงมีขีด) คูณกัน** พจน์นั้นจึงเป็น 0 ทันที

$$B\,\overline{B} = 0 \;\Rightarrow\; B\,\overline{B}\,\overline{C} = 0 \cdot \overline{C} = 0$$

Complementary Law II แล้วตามด้วย Null Law II — พจน์ที่สามตายทั้งพจน์

$$= A\overline{B} + A\overline{B}\,\overline{C} + 0 = A\overline{B} + A\overline{B}\,\overline{C}$$

Identity Law I — บวก 0 แล้วไม่เปลี่ยนอะไร ตัดทิ้งได้

$$= A\overline{B}(1 + \overline{C})$$

Distributive Law I อ่านย้อนกลับ — ดึงตัวร่วม $A\overline{B}$ ออกมา

$$= A\overline{B} \cdot 1 = A\overline{B}$$

Null Law I ($1 + \overline{C} = 1$) แล้วตามด้วย Identity Law II ($X \cdot 1 = X$)

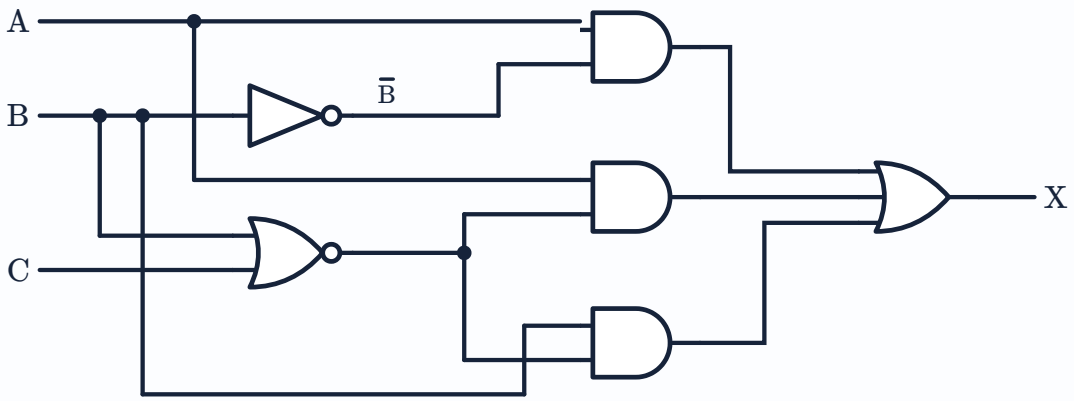
④ คำตอบสุดท้าย

$$A\overline{B} + A\overline{(B+C)} + B\overline{(B+C)} = A\overline{B}$$

จาก 3 พจน์เหลือพจน์เดียว และตัวแปร C หายไปทั้งตัว · *“$A\overline{B} + A\overline{B}\,\overline{C} + B\overline{B}\,\overline{C} = A\overline{B}(1+\overline{C}) = A\overline{B}$.”*

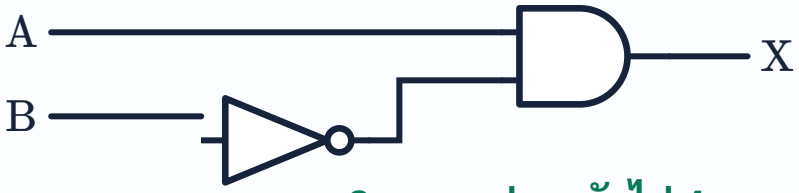
ทางลัดที่ได้คำตอบเดียวกันใน 1 บรรทัด: หลังแตกขีดแล้วเห็นว่า $A\overline{B}$ เป็นส่วนหนึ่งของ $A\overline{B}\,\overline{C}$ พอดี → ใช้ **Absorption Law I** ($X + XY = X$) ตัดพจน์ยาวทิ้งได้เลยครับ

วงจรก่อน-หลัง — ประหยัดไปกี่เกต



6 เกต (NOT 1 + NOR 1 + AND 3 + OR 1)

วงจรของนิพจน์เดิม — NOT 1 + NOR 1 + AND 3 + OR 3 ขาเข้า 1 = **6 เกต**



2 เกต — ประหยัดไป 4 เกต

วงจรของคำตอบ $A\overline{B}$ — NOT 1 + AND 1 = **2 เกต** และสาย C ตัดทิ้งได้ทั้งเส้น

⑤ ตรวจด้วยวิธีที่สอง

วิธีที่ 1 — ตารางค่าความจริง 8 แถว (คอลัมน์ที่ 4 คือโจทย์เดิม คอลัมน์ที่ 5 คือคำตอบ):

A	B	C	โจทย์เดิม	$A\overline{B}$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	0	0

ตรงกันทั้ง 8 แถวครับ — ออก 1 แค่ 2 แถวคือ 100 กับ 101 ซึ่งก็คือ "$A = 1$ และ $B = 0$" โดยไม่สนใจ C เลย ตรงกับที่ย่อได้

วิธีที่ 2 — รัน `same_logic()` ทั้งขั้นกลางและคำตอบ:

tools/dig.py

```
E = "(A&~B)|(A&~(B|C))|(B&~(B|C))"
same_logic(E, "(A&~B)|(A&~B&~C)|(B&~B&~C)", "ABC")   # หลังแตก De Morgan
>>> True
same_logic(E, "(A&~B)|(A&~B&~C)", "ABC")               # หลังตัดพจน์ที่เป็น 0
>>> True
same_logic(E, "A&~B", "ABC")                            # คำตอบสุดท้าย
>>> True
```

⑥ กับดักของข้อนี้

คำตอบผิดที่พบบ่อยที่สุด: $A\overline{B} + A\overline{C} + B\overline{C}$ — เกิดจาก**แตก** $\overline{(B+C)}$ **เป็น** $\overline{B} + \overline{C}$ (ลืมพลิกเครื่องหมาย) แล้วกระจายต่อ ซึ่งผิดตั้งแต่บรรทัดแรก

พิสูจน์ว่าผิด: $A = 0, B = 1, C = 0$ → ของจริง: $\overline{(B+C)} = \overline{1} = 0 \to 0 + 0 + 1 \cdot 0 = 0$ · ของผิด $= 0 + 0 + 1 \cdot 1 = 1$ ✗ · ของถูก $A\overline{B} = 0$ ✓

กับดักที่สอง: หยุดที่ $A\overline{B} + A\overline{B}\,\overline{C}$ แล้วคิดว่าจบแล้ว — **ยังไม่จบครับ** ยังตัดด้วย absorption ได้อีกหนึ่งพจน์ โจทย์บอกว่า `simplify` แปลว่าต้องย่อจนสั้นที่สุด

กับดักที่สาม: ลืมว่า $B\overline{B}\,\overline{C}$ เป็น 0 แล้วเขียนต่อเป็น $B\overline{C}$ — ตัดขีดผิดตัวครับ

หัวใจของข้อนี้: แตกขีดให้ถูกก่อน แล้วพจน์ที่มี $X\overline{X}$ จะตายเอง เหลือแค่คู่ที่ absorption จัดการได้

ข้อ 4 (b)

4 (b) Assignment #3

> Using Boolean algebra techniques, simplify the following expression: $\overline{AB + AC} + \overline{A}\,\overline{B}C$

แปล: ย่อ $\overline{AB + AC} + \overline{A}\,\overline{B}C$ ให้สั้นที่สุดครับ
โจทย์ซ่อนอะไรไว้: ① ขีดคลุม $AB + AC$ ทั้งก้อน (ไม่ได้คลุม $\overline{A}\,\overline{B}C$) ② ต้องแตก De Morgan **สองรอบ** ③ ผลลัพธ์จะกลายเป็นทรง POS ที่ต้องใช้ **Distributive Law II** ยุบ ④ แล้วปิดด้วย absorption **— ข้อนี้คือตัวอย่างสไลด์หน้า 53 เป๊ะ ๆ ครับ**

$$\overline{\mathrm{AB} + \mathrm{AC}} + \overline{\mathrm{A}}\,\overline{\mathrm{B}}\mathrm{C}$$

① ตั้งเลขชั้น — ขีดยาวคลุม $AB + AC$ เท่านั้น · ขีดสั้นสองเส้นบน A กับ B ของพจน์ที่สอง · **เครื่องหมาย + ตรงกลางอยู่นอกขีด**

② เตรียมก่อนลงมือ

ใช้วิธีไหน: แตกขีดยาวก่อน (De Morgan I เพราะใต้ขีดเป็นการบวก) → ได้สองก้อนคูณกัน แต่ละก้อนมีขีดคลุมพจน์คูณ → แตกด้วย De Morgan II → ได้ทรง POS สองวงเล็บที่มี $\overline{A}$ ร่วมกัน → ยุบด้วย Distributive Law II → รวมพจน์ที่สาม แล้วปิดด้วย Absorption
กฎที่จะใช้: De Morgan I → De Morgan II (สองครั้ง) → Distributive Law II → Absorption Law I

③ ไล่ทีละขั้น

$$\overline{AB + AC} + \overline{A}\,\overline{B}C$$

โจทย์ตั้งต้น — ทำเฉพาะก้อนซ้ายก่อน ก้อนขวาไม่มีขีดยาว ปล่อยไว้

$$\overline{AB + AC} = \overline{AB} \cdot \overline{AC}$$

De Morgan's Law I — บวกพลิกเป็นคูณ สองพจน์ได้ขีดของตัวเอง

$$= (\overline{A} + \overline{B})(\overline{A} + \overline{C})$$

De Morgan's Law II สองครั้ง — ใต้ขีดใหม่ทั้งสองเส้นเป็นการคูณ พลิกเป็นบวก

$$(\overline{\mathrm{A}} + \overline{\mathrm{B}})\,(\overline{\mathrm{A}} + \overline{\mathrm{C}}) + \overline{\mathrm{A}}\overline{\mathrm{B}}\mathrm{C}$$

หลังแตก De Morgan สองรอบ — สองวงเล็บแดงพร้อมใช้ Distributive II

ภาพหลังแตกขีดสองรอบ — ได้สองวงเล็บที่มี $\overline{A}$ อยู่ทั้งคู่ **นี่คือทรง** $(X+Y)(X+Z)$ **พอดี** พร้อมใช้ Distributive Law II

$$(\overline{A}+\overline{B})(\overline{A}+\overline{C}) = \overline{A}+\overline{B}\,\overline{C}$$

Distributive Law II — $(X+Y)(X+Z) = X + YZ$ โดย $X = \overline{A}$, $Y = \overline{B}$, $Z = \overline{C}$

$$= \overline{A}+\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$$

เอาพจน์ที่สามของโจทย์กลับมารวม

$$= \overline{A}+\overline{B}\,\overline{C}$$

Absorption Law I — $\overline{A}$ กลืน $\overline{A}\,\overline{B}C$ เพราะ $\overline{A}$ เป็นส่วนหนึ่งของพจน์นั้นพอดี

④ คำตอบสุดท้าย

$$\overline{AB+AC}+\overline{A}\,\overline{B}C = \overline{A}+\overline{B}\,\overline{C}$$

จาก 3 พจน์เหลือ 2 พจน์ และไม่มีขีดยาวเหลือเลย ✓ · *“*$\overline{AB+AC}+\overline{A}\,\overline{B}C = (\overline{A}+\overline{B})(\overline{A}+\overline{C}) + \overline{A}\,\overline{B}C = \overline{A}+\overline{B}\,\overline{C}$*.”*

⑤ ตรวจด้วยวิธีที่สอง

วิธีที่ 1 — ตารางค่าความจริง 8 แถว (คอลัมน์ที่ 4 คือโจทย์เดิม คอลัมน์ที่ 5 คือคำตอบ):

A	B	C	โจทย์เดิม	$\overline{A}+\overline{B}\,\overline{C}$
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	0	0

ตรงกันทั้ง 8 แถวครับ — ออก 1 ทุกแถวที่ $A=0$ (สี่แถวแรก) บวกแถว $A=1, B=0, C=0$ ซึ่งตรงกับ “$\overline{A}$ หรือ ($\overline{B}$ และ $\overline{C}$)” พอดี

วิธีที่ 2 — รัน `same_logic()` ทั้งขั้นกลางและคำตอบ:

tools/dig.py

```
E = "~((A&B)|(A&C))|(~A&~B&C)"
same_logic(E, "((~A|~B)&(~A|~C))|(~A&~B&C)", "ABC")   # หลัง De Morgan สองรอบ
>>> True
same_logic(E, "~A|(~B&~C)|(~A&~B&C)", "ABC")          # หลัง Distributive II
>>> True
same_logic(E, "~A|(~B&~C)", "ABC")                     # คำตอบสุดท้าย
>>> True
```

⑥ กับดักของข้อนี้

คำตอบผิดที่พบบ่อยที่สุด: $\overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}\,\overline{C}$ — เกิดจาก**แตกขีดยาวแล้วหยุดแค่รอบเดียว** คือได้ $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ แล้วเผลอเขียนต่อเป็นการบวกของสองก้อนแทนที่จะเป็นการคูณ

พิสูจน์ว่าผิด: $A=1, B=0, C=0$ → ของจริง $= \overline{0+0} + 0 = 1$ · ของผิด $= 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 0$ ✗ · ของถูก $= 0 + 1 \cdot 1 = 1$ ✓

กับดักที่สอง — มองไม่เห็น Distributive II: หลายคนกระจาย $(\overline{A}+\overline{B})(\overline{A}+\overline{C})$ ออกเป็น $\overline{A}\,\overline{A} + \overline{A}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B} + \overline{B}\,\overline{C}$ ซึ่ง**ก็ถูกนะครับ** แล้วต้องใช้ Idempotent ($\overline{A}\,\overline{A} = \overline{A}$) ตามด้วย Absorption สองครั้ง จึงจะได้ $\overline{A} + \overline{B}\,\overline{C}$ เหมือนกัน — **ยาวกว่าแต่ปลอดภัยกว่าถ้าจำ Distributive II ไม่ได้**

กับดักที่สาม: ลืมตัด $\overline{A}\,\overline{B}C$ ด้วย absorption แล้วตอบ $\overline{A} + \overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C$ — **ค่าถูกแต่ยังไม่สั้นที่สุด** ข้อสอบที่สั่ง simplify จะหักคะแนนตรงนี้ครับ

หัวใจของข้อนี้: แตก De Morgan สองรอบให้ได้ทรง $(X+Y)(X+Z)$ แล้วใช้ Distributive II ยุบเหลือ $X + YZ$ — เป็นท่าที่ออกสอบซ้ำ ๆ

ข้อ 5 — Consensus theorem

5 Assignment #3

> Eliminate the consensus terms from the following Boolean expression: $\overline{A}\,\overline{C}D + \overline{A}BD + BCD + ABC + AC\overline{D}$

แปล: ตัดพจน์ consensus ออกจาก $\overline{A}\,\overline{C}D + \overline{A}BD + BCD + ABC + AC\overline{D}$ ครับ
โจทย์ซ่อนอะไรไว้: ★ **ข้อนี้ตัดได้ถึงสองพจน์ ไม่ใช่พจน์เดียว** — ถ้าหยุดที่พจน์แรกจะได้คะแนนไม่เต็ม ต้องไล่ทุกคู่ให้ครบ (5 พจน์ = 10 คู่)

$$\overline{A}\overline{C}D \;+\; \overline{A}BD \;+\; BCD \;+\; ABC \;+\; AC\overline{D}$$

① โจทย์ตั้งต้น — ห้าพจน์ ตัวแปรสี่ตัว (A, B, C, D) · **ไม่มีขีดยาว ไม่ต้องแตก De Morgan เลย**

② เตรียมก่อนลงมือ

ใช้วิธีไหน: วิธี 3 ขั้นจากหัวข้อ 6 ครับ — ① หา pivot ทีละคู่ ② คูณสองพจน์แล้วตัด pivot กับคู่ตรงข้าม ③ ถ้าผลลัพธ์ตรงกับพจน์ที่มีอยู่ในโจทย์ ให้ตัดพจน์นั้นทิ้ง แล้ววนซ้ำจนไม่มีอะไรตัดได้อีก
ตั้งชื่อพจน์ก่อนจะได้ไม่งง: T1 $= \overline{A}\,\overline{C}D$ · T2 $= \overline{A}BD$ · T3 $= BCD$ · T4 $= ABC$ · T5 $= AC\overline{D}$

③ ไล่ทุกคู่ที่มีตัวแปรขัดกัน — ห้ามข้ามคู่ไหน

คู่	pivot	คูณกันแล้วตัด pivot ออก	ตรงกับพจน์ในโจทย์ไหม
T1, T3	C	$\overline{A}\,\overline{C}D \times BCD = \overline{A}BD$	**ตรงกับ T2 → ตัด T2 ทิ้ง**
T3, T5	D	$BCD \times AC\overline{D} = ABC$	**ตรงกับ T4 → ตัด T4 ทิ้ง**
T1, T4	A	$\overline{C}D \times BC = 0$ ($C\overline{C} = 0$)	ได้ 0 — ไม่ใช่ consensus term ข้ามครับ
T1, T5	A (หรือ C, D)	มีตัวแปรขัดกันถึง 3 ตัว ผลคูณเป็น 0 ทุกทาง	ข้าม — กฎใช้ได้เฉพาะตอนขัดกัน**ตัวเดียว**
T2, T4	A	$BD \times BC = BCD$	ตรงกับ T3 — แต่ T2 ถูกตัดไปแล้ว ใช้คู่นี้ไม่ได้
T2, T5	A และ D	ขัดกันสองตัว ผลคูณเป็น 0	ข้าม
T1, T2	—	มี $\overline{A}$ ทั้งคู่ ไม่มีตัวไหนขัดกัน	ข้าม
T2, T3	—	A อยู่แค่ใน T2 · C อยู่แค่ใน T3 ไม่ถือว่าขัดกัน	ข้าม
T3, T4	—	ไม่มีตัวแปรขัดกันเลย	ข้าม
T4, T5	—	D อยู่แค่ใน T5 ไม่ถือว่าขัดกัน	ข้าม

เช็คว่าไล่ครบ 10 คู่แล้วจริงไหม

5 พจน์จับคู่ได้ $\binom{5}{2} = 10$ คู่ครับ — ตารางข้างบนมี T1T3, T3T5, T1T4, T1T5, T2T4, T2T5, T1T2, T2T3, T3T4, T4T5 **ครบ 10 คู่พอดี** ในจำนวนนี้มีแค่ **2 คู่** ที่ให้ consensus term ที่มีอยู่จริงในโจทย์ **เพราะฉะนั้นตัดได้ 2 พจน์ครับ**

★ จุดที่ต้องคิดให้ดี — ตัดสองพจน์พร้อมกันได้จริงไหม

คำถามที่ต้องถามตัวเองคือ: **“พจน์ที่ใช้เป็นตัวผลิต consensus ยังอยู่ครบไหมหลังตัด”** ครับ

ตัด T2 ได้เพราะ ตัวผลิตคือ T1 กับ T3 — ทั้งคู่ยังอยู่ ✓
ตัด T4 ได้เพราะ ตัวผลิตคือ T3 กับ T5 — ทั้งคู่ยังอยู่ ✓
ทั้งสองการตัดไม่ได้พึ่งพากันเอง จึงตัดพร้อมกันได้อย่างปลอดภัยครับ

แต่ถ้าเจอกรณีที่ตัวผลิตของพจน์หนึ่งคือพจน์ที่เพิ่งตัดไป — ห้ามตัดครับ ต้องเลือกตัดอันเดียว (คู่ T2, T4 ในตารางเป็นตัวอย่างของกรณีนี้)

$$\overline{A}\,\overline{C}D + BCD + AC\overline{D}$$

หลังตัด consensus term ทิ้งสองพจน์ — เหลือสามพจน์

ผลหลังตัด T2 กับ T4 — เหลือสามพจน์ $\overline{A}\,\overline{C}D + BCD + AC\overline{D}$

วนสแกนซ้ำรอบสอง — เหลือ T1, T3, T5 · คู่ T1,T3 ให้ $\overline{A}BD$ (ไม่มีในนิพจน์แล้ว) · คู่ T3,T5 ให้ ABC (ไม่มีแล้ว) · คู่ T1,T5 ให้ 0 → **ตัดอะไรไม่ได้อีก จบครับ**

④ คำตอบสุดท้าย

$$\overline{A}\,\overline{C}D + \overline{A}BD + BCD + ABC + AC\overline{D} = \overline{A}\,\overline{C}D + BCD + AC\overline{D}$$

จาก 5 พจน์เหลือ 3 พจน์ — ตัด consensus term ไปสองพจน์คือ $\overline{A}BD$ และ ABC

“$\overline{A}BD$ is the consensus of $\overline{A}\,\overline{C}D$ and BCD; ABC is the consensus of BCD and $AC\overline{D}$. Both are redundant.”

⑤ ตรวจด้วยวิธีที่สอง

วิธีที่ 1 — ทางลัด “พจน์นี้เคยได้ทำงานไหม” ครับ

เช็ค $\overline{A}BD$: พจน์นี้เป็น 1 เมื่อ $A=0, B=1, D=1$ — ถ้า $C=0$ พจน์ $\overline{A}\,\overline{C}D = 1\cdot 1\cdot 1 = 1$ อยู่แล้ว ✓ · ถ้า $C=1$ พจน์ $BCD = 1\cdot 1\cdot 1 = 1$ อยู่แล้ว ✓ **ครบทุกกรณี → ตัดได้**

เช็ค ABC: พจน์นี้เป็น 1 เมื่อ $A=1, B=1, C=1$ — ถ้า $D=1$ พจน์ $BCD = 1$ อยู่แล้ว ✓ · ถ้า $D=0$ พจน์ $AC\overline{D} = 1\cdot 1\cdot 1 = 1$ อยู่แล้ว ✓ **ครบทุกกรณี → ตัดได้**

วิธีที่ 2 — ตารางค่าความจริง 16 แถวเต็ม (คอลัมน์ที่ 5 คือโจทย์เดิม 5 พจน์ คอลัมน์ที่ 6 คือคำตอบ 3 พจน์):

A	B	C	D	โจทย์เดิม (5 พจน์)	เหลือ 3 พจน์
0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1

ตรงกันทั้ง 16 แถวครับ

วิธีที่ 3 — รัน `same_logic()` ทั้งขั้นกลางและคำตอบ:

tools/dig.py

```
E = "(~A&~C&D)|(~A&B&D)|(B&C&D)|(A&B&C)|(A&C&~D)"
same_logic(E, "(~A&~C&D)|(B&C&D)|(A&B&C)|(A&C&~D)", "ABCD")   # ตัด T2 แล้ว
>>> True
same_logic(E, "(~A&~C&D)|(B&C&D)|(A&C&~D)", "ABCD")           # ตัด T4 ด้วย
>>> True
```

⑥ กับดักของข้อนี้

กับดักที่ 1 — หยุดที่พจน์เดียว ตอบ $\overline{A}\,\overline{C}D + BCD + ABC + AC\overline{D}$ (ตัดแค่ $\overline{A}BD$) **ค่ายังถูกอยู่ แต่ยังไม่จบงาน** โจทย์บอกว่า `terms` เป็นพหูพจน์ แปลว่ามีมากกว่าหนึ่งพจน์ให้ตัดครับ

กับดักที่ 2 — ตัดพจน์ที่เป็น "ตัวผลิต" เช่นตัด BCD ทิ้ง เพราะเห็นว่ามันโผล่ในหลายคู่ **ผิดครับ** — BCD เป็นตัวผลิต consensus ให้พจน์อื่น ไม่ใช่ตัวที่ถูกผลิต

พิสูจน์ว่าผิด: $A=0, B=1, C=1, D=1$ → ของจริง: $\overline{A}\,\overline{C}D = 0$, $BCD = 1$ → ทั้งหมด $= 1$ · ถ้าตัด BCD และ ABC ทิ้ง: $0+0+0 = 0$ ✗

กับดักที่ 3 — ใช้คู่ที่ขัดกันเกินหนึ่งตัว เช่นเอา T1 กับ T5 มาหา consensus ทั้งที่ขัดกันถึงสามตัว (A, C, D) **กฎบังคับว่าต้องขัดกันตัวเดียวเท่านั้น** ถ้าขัดกันหลายตัว ผลคูณจะเป็น 0 เสมอครับ

หัวใจของข้อนี้: ไล่ให้ครบทุกคู่ แล้วเช็คว่าตัวผลิตยังอยู่ครบก่อนตัด — ข้อนี้ตัดได้สองพจน์ ไม่ใช่พจน์เดียว

12 กับดักรวม สรุปหน้าเดียว และเช็คลิสต์ก่อนสอบ

กับดักรวมของทั้ง EP — 8 ข้อที่ทำให้เสียคะแนนมากที่สุด

#	ทำผิดแบบนี้	ที่ถูกต้องคือ	วิธีกันพลาด
1	$\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$	$\overline{A+B} = \overline{A}\,\overline{B}$	ท่อง **“ขีดแตก เครื่องหมายพลิก”** — เขียนเครื่องหมายใหม่**ก่อน**เขียนตัวแปรทุกครั้ง
2	แตกขีดสองชั้นพร้อมกันในบรรทัดเดียว	แตกทีละชั้น เขียนบรรทัดใหม่ทุกครั้ง	บังคับตัวเองให้ขึ้นบรรทัดใหม่ทุกครั้งที่แตกหนึ่งชั้น ห้ามคิดในหัวข้ามขั้น
3	$\overline{\overline{A}B} = AB$	$\overline{\overline{A}B} = A + \overline{B}$	involution ใช้ได้เฉพาะเมื่อ**ขอบซ้ายและขอบขวาของขีดสองเส้นตรงกันเป๊ะ**
4	ลืมว่าตัวแปรมีขีดอยู่ก่อนแล้ว แล้วแจกขีดใหม่ทับ	ตัวที่มีขีดในโจทย์ → กลายเป็นตัวเปล่าในคำตอบ	ก่อนเขียนคำตอบ ให้ย้อนดูโจทย์ว่าตัวไหนมีขีดอยู่แล้วบ้าง
5	คิดว่าขีดที่ยาวสุดคลุมทั้งนิพจน์เสมอ	ต้องดูจริงว่าขีดจบตรงไหน (ข้อ 3f, 3g)	ไล่นิ้วตามเส้นขีดจากซ้ายไปขวา ดูว่าจบก่อนหรือหลังเครื่องหมายกลาง
6	สับสน absorption กับ distributive III	$A + AB = A \cdot A + \overline{A}B = A + B$	เช็คว่าตัวหน้ากับตัวในพจน์ยาว **ขีดตรงกัน** (absorption) หรือ **ตรงข้าม** (dist III)
7	ตัด consensus term ที่ไม่ได้อยู่ในโจทย์	ตัดได้เฉพาะพจน์ที่มีอยู่จริงในนิพจน์	คำนวณ consensus แล้ว**เอาไปเทียบกับพจน์ในโจทย์ทุกครั้ง** ไม่ตรงก็ข้าม
8	ย่อได้ครึ่งทางแล้วหยุด	สแกนซ้ำจนไม่มีอะไรยุบได้อีก	วนกลับไปขั้น 1 ของลำดับการย่อทุกครั้งที่ยุบสำเร็จหนึ่งครั้ง

กับดักพิเศษ · เรื่องชื่อกฎที่สไลด์เรียกไม่ตรงกัน

สไลด์หน้า 59 เรียก $A + \overline{A} = 1$ ว่า **Null law I** และเรียก $A \cdot \overline{A} = 0$ ว่า **Null law II** ครับ แต่สไลด์หน้า 28 (ที่นิยามกฎ) เรียกสองสูตรนี้ว่า **Complementary Law I และ II** ส่วน null law คือ $A + 1 = 1$ กับ $A \cdot 0 = 0$

สไลด์หน้า 59 ยังเรียก $(A + B)(A + C) = A + BC$ ว่า **Distributive Laws I** ทั้งที่หน้า 32 นิยาม Distributive Law I ว่า $A(B + C) = AB + AC$ ครับ

ตอนสอบให้ยึด “สูตร” เป็นหลัก ไม่ใช่ “ชื่อ” — ถ้าจำเป็นต้องเขียนชื่อกฎ พี่แนะนำให้เขียนสูตรกำกับไว้ข้าง ๆ ด้วยเสมอ เช่น *“by $A + \overline{A} = 1$ (complementary / null law I)”* จะปลอดภัยที่สุดครับ

สรุปหน้าเดียว — ตารางกฎทั้งหมดที่ต้องจำ

ชื่อกฎ	สูตร	ใช้ตอนไหน / ประหยัดกี่เกต
Commutative I, II	$A+B=B+A$ · $AB=BA$	จัดเรียงพจน์ใหม่ให้เห็นคู่ที่ยุบได้ · 0 เกต
Associative I, II	$(A+B)+C=A+(B+C)$ · $(AB)C=A(BC)$	ยุบ OR/AND สองตัวเป็นตัวเดียว 3 ขาเข้า · 1 เกต
Identity I, II	$A+0=A$ · $A\cdot 1=A$	เก็บกวาดตอนท้าย · 1 เกต
Complementary I, II	$A+\overline{A}=1$ · $A\overline{A}=0$	ฆ่าพจน์ที่มีตัวขัดกัน / ยุบวงเล็บเป็น 1 · 2 เกต
Idempotent I, II	$A+A=A$ · $AA=A$	ลบพจน์ซ้ำ และ**ก๊อปพจน์ขึ้นมาใช้ซ้ำ** · 1 เกต
Involution	$\overline{\overline{A}}=A$	ตัดขีดสองชั้นที่คลุมของเดียวกัน · 2 เกต
Null I, II	$A+1=1$ · $A\cdot 0=0$	ยุบวงเล็บที่มี 1 บวกอยู่ · ตัดทั้งกิ่ง
Distributive I	$A(B+C)=AB+AC$	อ่านซ้ายไปขวา = แจกแจง · **อ่านขวาไปซ้าย = ดึงตัวร่วม (ท่าไม้ตาย)**
Distributive II	$(A+B)(A+C)=A+BC$	ยุบทรง POS ที่มีตัวร่วม · 1 เกต · ใช้ในข้อ 4b
Distributive III	$A+\overline{A}B=A+B$ · $A\cdot\overline{A}+AB=\overline{A}+B$	ตัดขีดที่ซ้ำซ้อนทิ้ง · 2 เกต
Absorption I, II	$A+AB=A$ · $A(A+B)=A$	ลบพจน์ยาวที่ถูกพจน์สั้นกลืน · 2 เกต · ใช้ในข้อ 4a และ 4b
De Morgan I	$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$	ขีดคลุมผลบวก → แตกเป็นผลคูณ · NOR = negative-AND
De Morgan II	$\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$	ขีดคลุมผลคูณ → แตกเป็นผลบวก · NAND = negative-OR
Consensus	$AB+\overline{A}C+BC=AB+\overline{A}C$	ตัดพจน์ผลผสมที่ไม่เคยได้ทำงาน · ใช้ในข้อ 5

สรุปที่ต้องจำให้ได้ก่อนเข้าห้องสอบ

คาถาประจำ EP นี้

“ขีดแตก เครื่องหมายพลิก” — แตกขีดยาวออก แล้ว **+** กลายเป็น **·** และกลับกัน ทุกก้อนย่อยได้ขีดใหม่ก้อนละหนึ่งขีด

ลำดับลอกขีดซ้อนขีด (ห้ามสลับ)

① ตั้งเลขชั้นให้ขีดทุกเส้น ② หาชั้นที่**เลขมากที่สุด** ③ ดูเครื่องหมายใต้ขีดชั้นนั้น ④ แตก**ชั้นเดียว**แล้วขึ้นบรรทัดใหม่ ⑤ เช็ค involution ⑥ วนซ้ำจนไม่มีขีดคลุมเกินหนึ่งตัว

เงื่อนไข involution (เช็คก่อนตัดทุกครั้ง)

ขีดสองชั้นต้องคลุม**ของสิ่งเดียวกันเป๊ะ — ขอบซ้ายตรงกัน และขอบขวาตรงกัน** ถ้าไม่ตรงแม้แต่ข้างเดียว ต้องแตก De Morgan ก่อน

ลำดับการย่อนิพจน์ 6 ขั้น

① แตกขีดยาวให้หมดก่อน ② กระจายวงเล็บ ③ ฆ่าพจน์ที่มี $X\overline{X}$ และยุบ XX ④ ลบพจน์ซ้ำและพจน์ที่ถูกกลืน ⑤ ดึงตัวร่วมแล้วยุบด้วย $X+\overline{X}=1$ กับ $1+X=1$ ⑥ ตรวจด้วยตารางค่าความจริง

Consensus 3 ขั้น

① หา pivot = ตัวแปรที่โผล่ทั้ง**มีขีดและไม่มีขีด**ในสองพจน์ ② คูณสองพจน์แล้ว**ตัด pivot กับคู่ตรงข้ามออก** ③ ถ้าผลลัพธ์**มีอยู่จริงในโจทย์** ให้ตัดพจน์นั้นทิ้ง แล้ววนซ้ำ

SOP vs POS

SOP = ผลบวกของพจน์คูณ (เครื่องหมายนอกสุดคือ $+$) — วงจร AND-OR · **POS** = ผลคูณของพจน์บวก (เครื่องหมายนอกสุดคือ $\cdot$) — วงจร OR-AND · **standard** = ทุกพจน์มีตัวแปรครบทุกตัวใน domain

แปลงเป็น standard form

SOP ขาดตัวแปร D → **คูณด้วย** $(D+\overline{D})$ ซึ่งเท่ากับ 1 · POS ขาดตัวแปร D → **บวกด้วย** $D\overline{D}$ ซึ่งเท่ากับ 0 แล้วแยกด้วย $X+YZ=(X+Y)(X+Z)$

เลขที่ต้องจำจากคำตอบ Assignment

ข้อ 4a ตอบ $A\overline{B}$ (6 เกต → 2 เกต) · ข้อ 4b ตอบ $\overline{A}+\overline{B}\,\overline{C}$ · ข้อ 5 ตอบ $\overline{A}\,\overline{C}D+BCD+AC\overline{D}$ (ตัดไป 2 พจน์)

เช็คลิสต์ก่อนสอบ — ทำได้ครบทุกข้อหรือยัง

✓	ถ้าตอบว่า “ยัง” ให้กลับไปอ่านหัวข้อนี้
☐	เขียนกฎทั้ง 12 ชุดจากความจำได้ พร้อมบอกว่าแต่ละกฎประหยัดเกตไปกี่ตัว **(หัวข้อ 2)**
☐	แยก Identity กับ Null ออกจากกันได้ทันทีโดยไม่ต้องคิดนาน **(หัวข้อ 2)**
☐	เขียน De Morgan สองข้อได้ และอธิบายได้ว่าทำไม NOR = negative-AND **(หัวข้อ 3)**

✓	ถ้าตอบว่า “ยัง” ให้กลับไปอ่านหัวข้อนี้
☐	ตั้งเลขชั้นให้ขีดในนิพจน์ที่มีขีดสามชั้นได้ถูกต้อง **(หัวข้อ 4)**
☐	บอกได้ว่าเมื่อไหร่ involution ใช้ได้ เมื่อไหร่ใช้ไม่ได้ **(หัวข้อ 4)**
☐	ย่อนิพจน์ 5 พจน์ให้เหลือ 2–3 พจน์ได้ โดยกำกับชื่อกฎทุกบรรทัด **(หัวข้อ 5)**
☐	อธิบายที่มาของ consensus theorem ได้โดยไม่ต้องท่องสูตร **(หัวข้อ 6)**
☐	ดูนิพจน์แล้วบอกได้ทันทีว่าเป็น SOP, POS หรือไม่ใช่ทั้งคู่ **(หัวข้อ 7)**
☐	แปลงนิพจน์ที่ไม่ standard ให้เป็น standard SOP และ standard POS ได้ **(หัวข้อ 7)**
☐	ทำข้อ 3 ทั้ง 9 ข้อย่อยใหม่ได้เองโดยไม่ดูเฉลย **(หัวข้อ 8–10)**
☐	ทำข้อ 4a, 4b, 5 ใหม่ได้เอง พร้อมตรวจคำตอบด้วยตารางค่าความจริง **(หัวข้อ 11)**
☐	วาดวงจรจากนิพจน์ที่ย่อแล้วได้ และบอกได้ว่าประหยัดเกตไปกี่ตัว **(หัวข้อ 2 และ 11)**

ท่าที่ใช้ได้ทุกข้อในห้องสอบ · อ่านซ้ำก่อนเข้าห้อง

ขั้นที่ 1 — อ่านคำสั่งให้ขาดก่อน `Apply De Morgan's laws` = แค่แตกขีด · `Simplify` = แตกขีดแล้วย่อจนสั้นที่สุด · `Eliminate the consensus terms` = หาพจน์ซ้ำซ้อนตัดทิ้ง

ขั้นที่ 2 — ตั้งเลขชั้นให้ขีดทุกเส้นก่อนลงมือ เขียนเลขกำกับข้างเส้นเลยครับ 10 วินาทีนี้ช่วยกันพลาดได้ทั้งข้อ

ขั้นที่ 3 — เขียนชื่อกฎกำกับทุกบรรทัด วิชานี้ให้คะแนนกระบวนการ ถ้าคำตอบผิดแต่กระบวนการถูกก็ยังได้คะแนนบางส่วนครับ

ขั้นที่ 4 — ตรวจด้วยการแทนค่าอย่างน้อย 2 แถวก่อนส่ง เลือกแถวที่ตัวแปรไม่เหมือนกันหมด (เช่น $A=1, B=0, C=1$) เพราะแถวที่ค่าเหมือนกันหมด มักให้ผลตรงกันทั้งคำตอบถูกและคำตอบผิด

EP ต่อไป · EP07 — Minterm และ SOP/POS จากตารางค่าความจริง

EP นี้น้องย่อนิพจน์ที่**มีอยู่แล้ว**ให้สั้นลงได้แล้วครับ

ตอนนี้น้องย่อนิพจน์ได้แล้ว แต่ถ้าโจทย์ให้มาเป็นตารางค่าความจริงเปล่า ๆ แล้วบอกว่า “จงเขียนนิพจน์” ละครับ จะเริ่มยังไง — ไม่มีนิพจน์ให้ย่อเลยสักตัว มีแต่คอลัมน์ 0 กับ 1

EP07 จะตอบคำถามนี้ครับ น้องจะได้รู้จัก **minterm** (พจน์ที่ตรงกับแถวที่เอาต์พุตเป็น 1) และ **maxterm** (วงเล็บที่ตรงกับแถวที่เอาต์พุตเป็น 0) แล้วเขียนย่อเป็นสัญกรณ์ $\sum m(\dots)$ กับ $\prod M(\dots)$ ได้ — **และของที่เรียนใน EP06 จะกลายเป็นเครื่องมือย่อผลลัพธ์ที่อ่านออกมาจากตารางนั่นเองครับ**

แหล่งอ้างอิง

แหล่ง	หน้า / ข้อ	เนื้อหาที่ใช้
สไลด์ EES271 Week 3 — *Logic Gates 2026*	หน้า 21–46 (สไลด์เลข 23–64)	Boolean algebra · กฎทั้ง 12 ชุด · De Morgan · SOP/POS · standard form · consensus theorem
Assignment #3 (EES271-4, 2026)	ข้อ 3 (a–i), ข้อ 4 (a–b), ข้อ 5	โจทย์ทั้งหมดในหัวข้อ 8–11 คัดมาจากต้นฉบับเป๊ะ ๆ (อ่านจากภาพเพื่อยืนยันขอบเขตของขีดบนทุกเส้น)
Floyd, *Digital Fundamentals*, 10th ed.	บทที่ 4	สัญลักษณ์เกตแบบ distinctive shape · ชื่อกฎบูลีน · consensus theorem
`tools/dig.py` (เครื่องมือของชีทชุดนี้)	`truth_table`, `same_logic`	ใช้ตรวจทุกนิพจน์และทุกตารางค่าความจริงในชีทนี้ — **ทุกคำตอบผ่าน** `same_logic()` = **True**

คำสั่งที่ใช้ตรวจชีทนี้ (ลองรันเองได้)

```
cd "C:/Claude Factory Pdf/build"
python -c "import sys; sys.path.insert(0,'tools'); from dig import *; \
print(same_logic('~((A&B&C)|(D&E&F))','(~A|~B|~C)&(~D|~E|~F)','ABCDEF'))"
>>> True
```

น้องเอาไปตรวจคำตอบของตัวเองได้เลยครับ — เขียนนิพจน์ต้นฉบับกับคำตอบเป็นสัญกรณ์ Python (`&` = AND, `|` = OR, `~` = NOT) แล้วดูว่าได้ `True` ไหม **ถ้าได้ False แปลว่าย่อผิด ห้ามส่งครับ**