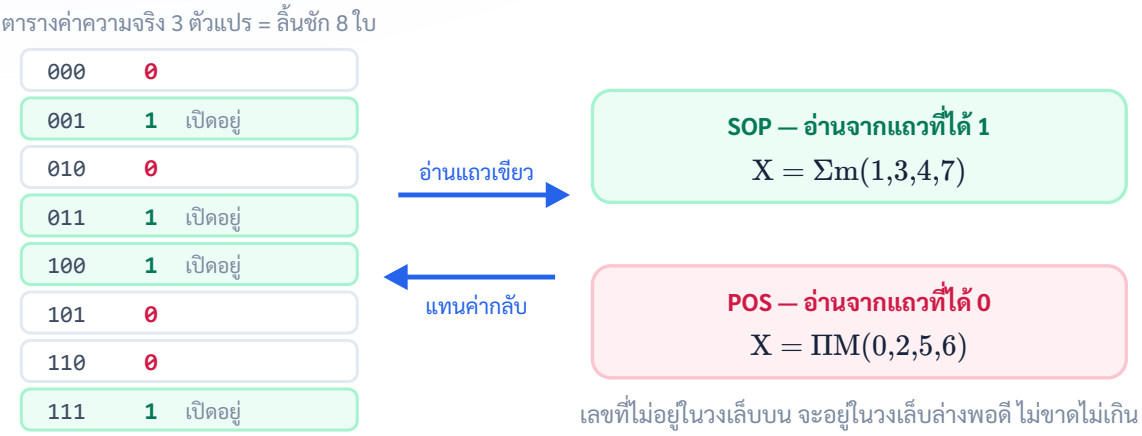
07 EP

Minterm กับ Maxterm

ตารางค่าความจริง ↔ SOP / POS แปลงไปกลับได้ทั้ง 4 ทิศ

minterm คือพจน์ที่เป็น 1 ได้แถวเดียว · maxterm คือพจน์ที่เป็น 0 ได้แถวเดียว · สัญกรณ์ $\sum m$ และ $\prod M$ · ตาราง → SOP · ตาราง → POS · SOP → ตาราง · POS → ตาราง



เลขที่ไม่อยู่ในวงเล็บบน จะอยู่ในวงเล็บล่างพอดี ไม่ขาดไม่เกิน

ตารางเดียวกัน เขียนได้สองหน้าตา แต่วงจรทำงานเหมือนกันเป๊ะครับ

พี่สอนน้องแบบไม่ต้องมีพื้นฐานมาก่อนเลยครับ · อ้างอิงสไลด์ EES271 Lecture 04 หน้า 1–19 + Assignment #4 ข้อ 1–3

ตอนนี้เราจะเดินไปทางไหนกัน

ก่อนเริ่ม พี่ขอกางแผนที่ให้น้องดูก่อนครับ ว่า EP นี้มีอะไรบ้าง จะได้ไม่หลงทาง

1	**ศัพท์ 3 คำที่ต้องรู้ก่อน: literal · product term · sum term**	ปูพื้น
2	**minterm — พจน์ที่เป็น 1 ได้แค่แถวเดียว (พร้อมตารางพิสูจน์)**	หัวใจ EP
3	**maxterm — พจน์ที่เป็น 0 ได้แค่แถวเดียว**	คู่แฝดกลับด้าน
4	**สัญกรณ์ $\sum m(\dots)$ กับ $\prod M(\dots)$ และเส้นแบ่ง 8 ช่อง**	ออกสอบชัวร์
5	**ทิศที่ (1): ตารางค่าความจริง → SOP**	ง่ายที่สุด
6	**ทิศที่ (2): ตารางค่าความจริง → POS ★ จุดที่คนสับสนที่สุด**	ยากที่สุด
7	**ทิศที่ (3) และ (4): นิพจน์ SOP / POS → ตารางค่าความจริง**	เดินย้อนกลับ
8	**เฉลย Assignment 4 ข้อ 1 (a–c) — minterm notation ของ X และ $\overline{X}$**	เฉลยเต็ม 6 ชั้น
9	**เฉลย Assignment 4 ข้อ 2 (a–c) — เขียนทั้ง SOP และ POS**	เฉลยเต็ม 6 ชั้น
10	**เฉลย Assignment 4 ข้อ 3 (a–b) — นิพจน์ → ตาราง**	เฉลยเต็ม 6 ชั้น
11	**เฉลย Assignment 4 ข้อ 3 (c–d) — นิพจน์ → ตาราง**	เฉลยเต็ม 6 ชั้น
12	**กับดักรวม + สรุปหน้าเดียว + เช็คลิสต์ก่อนสอบ**	ทวนก่อนสอบ

ชีทนี้ใช้ยังไงให้ได้ผลที่สุด

ในชีทจะมีป้าย 3 แบบสลับกันไปครับ อยากให้น้องใช้มันคนละแบบ

I DO

พี่ทำให้ดู — น้องอ่านอย่างเดียวพอครับ แต่ขอให้อ่าน**เหตุผล**ในแต่ละขั้นด้วย ไม่ใช่แค่ดูว่าทำอะไร

WE DO

ทำด้วยกัน — มีช่องว่างให้เติม ลองเติมในใจก่อนแล้วค่อยดูเฉลยที่อยู่ถัดลงไปทันทีครับ

YOU DO

ตาน้อง — เฉลยอยู่ติดกันเลย แต่พี่ขอให้**ปิดไว้ก่อน** ทำเองให้จบแล้วค่อยเปิดเทียบครับ

เรื่องสีในตารางค่าความจริงของชีทนี้ — สำคัญมาก

EP นี้ทั้ง EP อยู่บนตารางค่าความจริงครับ พี่เลยใช้สีช่วยแยกให้ตลอดเล่ม

แถวเขียว = เอาต์พุตเป็น 1 → แถวพวกนี้คือวัตถุดิบของ **SOP**

แถวขาว (ตัวเลขแดง) = เอาต์พุตเป็น 0 → แถวพวกนี้คือวัตถุดิบของ **POS**

ถ้าน้องจำสีนี้ได้ตั้งแต่ตอนนี้ ครึ่ง EP จบไปแล้วครับ เพราะที่เหลือคือรายละเอียดของการเขียนตัวอักษร

ส่วน**ขีดบน** $\overline{A}$ อ่านว่า “เอบาร์” หรือ “นอตเอ” แปลว่ากลับค่าของ A ครับ

มาจากไหน จะไปไหนต่อ

มาจาก EP06: น้องเพิ่งเรียนพีชคณิตบูลีน กฎ 12 ชุด และ De Morgan ตอนนั้นโจทย์**ให้นิพจน์มา**แล้วให้น้องย่อให้สั้นลง

EP07 นี้: โจทย์จะ**ให้ตารางค่าความจริงเปล่า ๆ มา** แล้วบอกว่า “จงเขียนนิพจน์” — พี่จะสอนวิธีเดินทั้ง 4 ทิศระหว่างตารางกับนิพจน์ครับ

จะไปต่อที่ EP08: เอานิพจน์ที่ได้ไป**วาดเป็นวงจรจริง** และถ้าโรงงานมีแต่เกต NAND อย่างเดียวจะทำยังไง

1 ศัพท์ 3 คำที่ต้องรู้ก่อน · แผนที่ 4 ทิศของ EP นี้

ตะขอเกี่ยว — คำถามที่ค้างมาจาก EP06

ตอนนี้น้องย่อนิพจน์ได้แล้ว แต่**ถ้าโจทย์ให้มาเป็นตารางค่าความจริงเปล่า ๆ แล้วบอกว่า “จงเขียนนิพจน์” ละครับ จะเริ่มยังไง**

ลองนึกภาพว่าอาจารย์วางกระดาษแผ่นหนึ่งลงบนโต๊ะ มีแค่คอลัมน์ A, B, C กับคอลัมน์ X ที่เต็มไปด้วย 0 กับ 1 — ไม่มีนิพจน์ ไม่มีวงจร ไม่มีอะไรให้ย่อเลย

สมมติว่าถ้าน้องเจอโจทย์แบบนี้ในห้องสอบ น้องจะเริ่มจากตรงไหนครับ

คำตอบสั้น ๆ คือ **เริ่มจากแถวที่เอาต์พุตเป็น 1** ครับ แต่ก่อนจะไปถึงตรงนั้น พี่ขอปูศัพท์ 3 คำที่สไลด์หน้า 2 เขียนไว้ก่อน เพราะทั้ง EP จะใช้สามคำนี้ตลอด

ของใกล้ตัว — นิพจน์บูลีนก็เหมือนกล่องดินสอ

พี่ขอเปรียบก่อนครับ นิพจน์บูลีนหนึ่งอันเหมือน**กล่องดินสอ** ที่ข้างในมีของหลายชิ้น แล้วเราต้องเรียกชื่อของแต่ละระดับให้ถูก



ช่องย่อยในกล่อง = product term (คูณกันด้วย AND) · ของแต่ละชิ้น = literal

เครื่องหมาย + ที่คั่นระหว่างช่อง คือ OR — เพราะฉะนั้นนิพจน์นี้อยู่ในรูป SOP

นิพจน์ตัวอย่างจากสไลด์หน้า 2: $A\overline{B} + B\overline{C}D + \overline{A}D$ — 3 product term · รวมทั้งหมด 7 literal

เข้าเรื่อง — นิยาม 3 คำจากสไลด์หน้า 2

Literal

Literal ~ The appearance of a variable or its complement (i.e. A and $\overline{A}$). Each appearance of a variable or its complement is counted.

ภาษาพี่: literal คือ**ตัวแปรหนึ่งตัวที่โผล่มาหนึ่งครั้ง** จะมีขีดบนหรือไม่มีก็นับเป็น literal เหมือนกันครับ

ที่มาของการนับ: ที่สไลด์ต้องนับ literal เพราะ literal หนึ่งตัว = **สายไฟหนึ่งเส้นที่ต้องเดินเข้าเกต** ยิ่ง literal เยอะ วงจรยิ่งใหญ่ ยิ่งแพง สไลด์เลยเขียนว่า **"One measurement of the complexity of a Boolean expression is the number of literals."**

ระวัง: ตัวแปรเดียวกันโผล่ 2 ที่ นับ 2 ครับ เช่น $AB + A\overline{C}$ มี 4 literal (ไม่ใช่ 3 ทั้งที่มีตัวแปรแค่ 3 ตัว)

Product term

Product term ~ One or more literals connected by AND operators. A single literal is also a product term.

ภาษาพี่: product term คือ literal ที่**คูณกัน** (AND) เช่น $A\overline{B}$, BCD, หรือแม้แต่ $\overline{E}$ ตัวเดียวโดด ๆ

ที่มาของชื่อ: AND ในบูลีนคือ**การคูณ** (EP05 บอกว่า AND = multiplication) ผลของการคูณเรียกว่า product เพราะฉะนั้นก้อนที่คูณกันจึงชื่อ product term ครับ

Sum term (สไลด์ยังไม่ได้ตั้งชื่อ แต่ต้องรู้คู่กัน)

Sum term ~ One or more literals connected by OR operators.

ภาษาพี่: sum term คือ literal ที่**บวกกัน** (OR) เช่น $(A + \overline{B} + C)$

ที่มาของชื่อ: OR ในบูลีนคือการบวก ผลของการบวกเรียกว่า sum ครับ

สองคำนี้เป็นคู่กัน และเป็นรากของสองรูปแบบที่ทั้ง EP นี้พูดถึง:

SOP = Sum Of Products

เอา **product term** มา **บวก** (OR) กัน

$X = \overline{A}B + AB\overline{C} + AC$

รูปหน้าตา: AND ก่อน แล้ว OR ทีหลัง

POS = Product Of Sums

เอา **sum term** มา **คูณ** (AND) กัน

$X = (A + B)(\overline{A} + B + C)(A + \overline{C})$

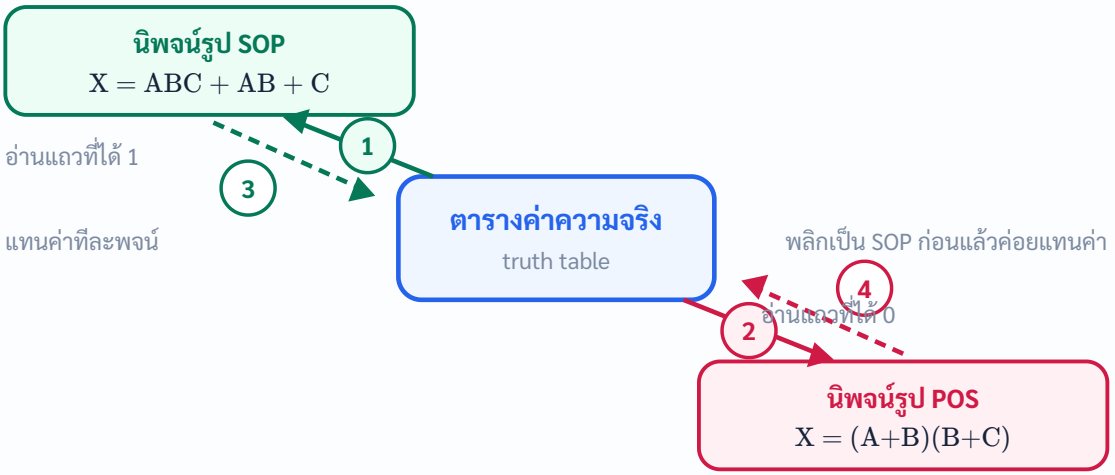
รูปหน้าตา: OR ก่อน แล้ว AND ทีหลัง

กับดักแรกของ EP — อย่าสับสนสองคำนี้

คนพลาดกันเยอะมากตรงนี้ครับ เพราะชื่อมันคล้ายกัน จำแบบนี้ไปเลย:
ชื่อบอกสิ่งที่ทำ "ชั้นนอกสุด" — **S**OP ตัวหน้าคือ **S**um แปลว่า**ชั้นนอกสุดคือ OR** (ข้างในเป็นก้อนคูณ) · **P**OS ตัวหน้าคือ **P**roduct แปลว่า**ชั้นนอกสุดคือ AND** (ข้างในเป็นก้อนบวก)
วิธีเช็คเร็ว: ถ้าเห็น**วงเล็บ**เยอะ ๆ ติดกัน แทบจะเป็น POS เสมอครับ เพราะ sum term ต้องใส่วงเล็บครอบไว้ ส่วน SOP ไม่ต้องใส่วงเล็บเลย

แผนที่ของ EP นี้ — 4 ทิศทางที่ต้องเดินให้ได้

สไลด์ Lecture 04 แบ่งหัวข้อไว้เป็น (1) (2) (3) (4) พอดีเป๊ะ ซึ่งก็คือ 4 ทิศทางการแปลงครับ พี่จะสอนตามลำดับนี้เลย



เส้นทึบ = ออกจากตาราง (หัวข้อ 5 กับ 6) · เส้นประ = กลับเข้าตาราง (หัวข้อ 7)

4 ทิศทางการแปลง ตรงกับหัวข้อ (1)–(4) ในสไลด์ Lecture 04 พอดีทุกข้อ

เทียบของเก่า — EP06 ทำแบบนี้ ตอนนี้มีอะไรเพิ่ม

EP06: โจทย์ให้นิพจน์มา น้องใช้กฎ 12 ชุด + De Morgan ย่อให้สั้นลง — ทิศทางเดียว คือ **นิพจน์ → นิพจน์**
EP07: ตารางค่าความจริงเข้ามาเป็น "ภาษากลาง" ครับ ทำให้เดินได้ครบ 4 ทิศ
ทำไมต้องมีตารางเป็นตัวกลาง: เพราะนิพจน์เขียนได้หลายหน้าตา แต่**ตารางค่าความจริงของฟังก์ชันหนึ่งมีได้หน้าตาเดียว** เพราะฉะนั้น**วิธีพิสูจน์ว่านิพจน์สองอันเท่ากันจริงคือแปลงเป็นตารางแล้วเทียบ** — นี่คือสิ่งเดียวกับที่ฟังก์ชัน `same_logic()` ในเครื่องมือตรวจของชีททำเลยครับ

ศัพท์สอบของหัวข้อนี้

English	แปลว่า	ข้อสอบเขียนมาแบบนี้
literal	ตัวแปรหนึ่งตัวที่โผล่หนึ่งครั้ง (มีขีดบนก็นับ)	**Determine the number of literals.**
product term	ก้อนที่ literal คูณ (AND) กัน	**One or more literals connected by AND operators.**
sum term	ก้อนที่ literal บวก (OR) กัน	**One or more literals connected by OR operators.**
SOP (sum of products)	ผลบวกของผลคูณ — AND ก่อน OR ทีหลัง	**Express the logic in SOP form.**
POS (product of sums)	ผลคูณของผลบวก — OR ก่อน AND ทีหลัง	**Express the logic in POS form.**
standard / canonical form	รูปมาตรฐาน — ทุกพจน์มีตัวแปรครบทุกตัว	**Write the expression in standard SOP form.**
complement	ค่ากลับ (ขีดบน)	**...either complemented or uncomplemented.**

ทางลัด — นับ literal / product term ใน 5 วินาที

สไลด์หน้า 6 (Example I) ให้นับ 4 อย่างจากนิพจน์: variables · literals · product terms · minterms

นับ product term: นับเครื่องหมาย $+$ ที่อยู่**ชั้นนอกสุด** แล้วบวกหนึ่ง

นับ literal: นับตัวอักษรทุกตัวที่เห็น (ขีดบนไม่ทำให้จำนวนเปลี่ยน)

นับ variables: นับ**ชื่อ**ตัวแปรที่ไม่ซ้ำกัน

ลองกับสไลด์ Expression 1: $A + \overline{B} + AB$ → variables 2 ตัว (A, B) · literals 4 ตัว · product terms 3 ก้อน · **minterm 1 ก้อน** (เฉพาะ AB ที่มีตัวแปรครบ 2 ตัว) — คำว่า minterm หมายถึงอะไรกันแน่ ไปดูหัวข้อถัดไปครับ

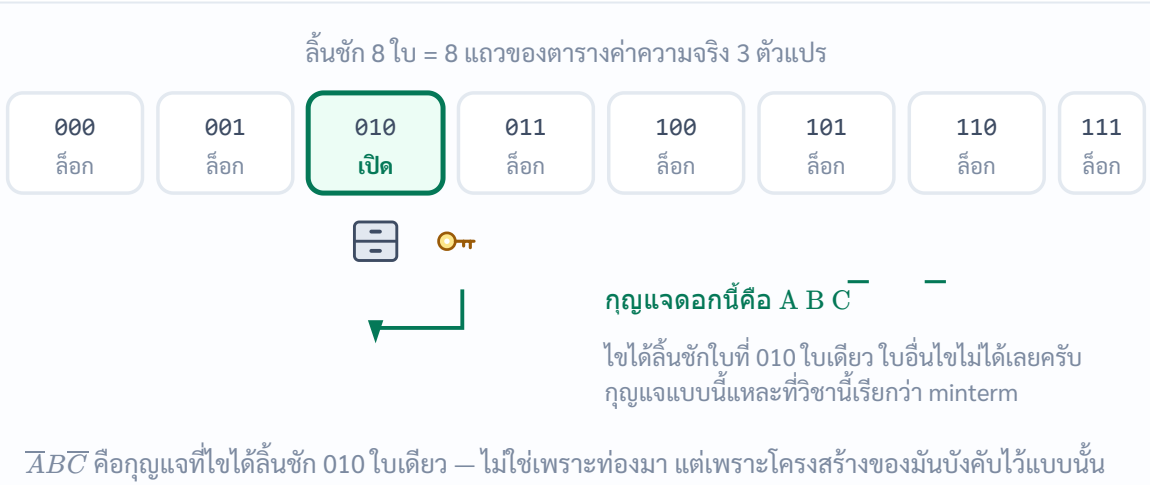
2 minterm — พจน์ที่เป็น 1 ได้แค่แถวเดียว

ตะขอเกี่ยว

สมมติว่าถ้าน้องอยากได้นิพจน์ที่ “ติดเฉพาะแถวเดียว” ละครับ — คือแทนค่าลงไปแล้วได้ 1 **แถวเดียวเป๊ะ** ส่วนอีก 7 แถวได้ 0 หมด จะเขียนยังไง
ถ้าน้องหาของแบบนี้เจอ น้องจะประกอบตารางค่าความจริง**อะไรก็ได้**ขึ้นมาเองได้ทันทีครับ เพราะแค่หยิบตัวที่ติดแถว 1 มาต่อกันด้วย OR ก็จบ
ของชิ้นนั้นมีจริงครับ ชื่อว่า **minterm**

ของใกล้ตัว — กุญแจดอกที่ไขได้ลิ้นชักเดียว

พี่ขอเปรียบด้วยลิ้นชักครับ สมมติมีตู้ลิ้นชัก 8 ใบ ติดป้ายเลข 000 ถึง 111 แล้วน้องมีกุญแจอยู่ดอกหนึ่ง



$\overline{A}B\overline{C}$ คือกุญแจที่ไขได้ลิ้นชัก 010 ใบเดียว — ไม่ใช่เพราะท่องมา แต่เพราะโครงสร้างของมันบังคับไว้แบบนั้น

เข้าเรื่อง — นิยามจากสไลด์หน้า 3

Minterm (standard product term)

A minterm of n variables = product of n literals in which each variable appears exactly once either complemented or uncomplemented, but not in both.

ภาษาพี่: minterm คือ product term ที่มีตัวแปร**ครบทุกตัวพอดี ตัวละหนึ่งครั้ง** จะเป็นแบบมีขีดบนหรือไม่มีก็ได้ แต่ห้ามขาดและห้ามซ้ำครับ

สไลด์ยกตัวอย่างไว้ (4 ตัวแปร A, B, C, D):

- $AB\overline{C}D$ **เป็น minterm** — ครบ 4 ตัว
- $\overline{A}B\overline{C}\overline{D}$ **เป็น minterm** — ครบ 4 ตัว
- $\overline{A}B\overline{D}$ **ไม่เป็น minterm** — เพราะ C หายไป

★ ที่มา — ทำไม minterm ถึงเป็น 1 ได้แค่แถวเดียว (พิสูจน์ด้วยตาราง)

ตรงนี้สำคัญที่สุดของหัวข้อครับ พี่ไม่อยากให้น้องท่องนิยามลอย ๆ อยากให้**เห็นด้วยตาว่ามันจริง** พี่เลยเอา $\overline{A}B\overline{C}$ มากางทั้ง 8 แถว แล้วคิดทีละคอลัมน์ให้ดู

1

$$\overline{A} \cdot B \cdot \overline{C}$$

AND สามชั้น
ต้อง 1 ครบทุกชิ้น

minterm คือ AND ล้วน — เพราะฉะนั้นต้องผ่านทุกด่าน

$\overline{A}B\overline{C}$ คือการเอา 3 ชิ้นมา AND กันครับ

กฎ AND จาก EP05 บอกว่า **ได้ 1 ก็ต่อเมื่อทุกชิ้นเป็น 1** ขาดชิ้นเดียวได้ 0 ทันที

เพราะฉะนั้น**เงื่อนไขของมันคือ “ต้องผ่านทั้ง 3 ด่านพร้อมกัน”** ครับ

2

$\overline{A} = 1$ แปลว่า A = 0
$B = 1$ แปลว่า B = 1
$\overline{C} = 1$ แปลว่า C = 0

แปลแต่ละด่านกลับเป็นค่าของตัวแปร

ด่านที่ 1 คือ $\overline{A} = 1$ ซึ่งเกิดได้เมื่อ $A = 0$ เท่านั้นครับ

ด่านที่ 2 คือ $B = 1$ ซึ่งเกิดได้เมื่อ $B = 1$ เท่านั้น

ด่านที่ 3 คือ $\overline{C} = 1$ ซึ่งเกิดได้เมื่อ $C = 0$ เท่านั้น

สังเกตว่าทุกด่าน**บังคับค่าไว้แบบตายตัว ไม่มีทางเลือก**ครับ

3

0 1 0

มีชุดเดียวที่ผ่านครบ

รวมทั้งสามด่าน = ได้ชุดค่าเดียว

ต้องผ่านพร้อมกันทั้งสามด่าน แปลว่า A ต้อง 0 และ B ต้อง 1 และ C ต้อง 0 พร้อมกัน

นั่นคือ $ABC = 010$ **ชุดเดียวเท่านั้น** ในตาราง 8 แถวมีชุดนี้อยู่แถวเดียว

เพราะฉะนั้น $\overline{A}B\overline{C}$ **เป็น 1 ได้แถวเดียว** — พิสูจน์เสร็จครับ ไม่ต้องท่อง

ทีนี้พี่กางตารางจริงให้ดู เอาคอลัมน์ย่อยของทั้ง 3 ด่านมาแปะไว้ด้วย จะได้เห็นว่ามีแถวเดียวจริง ๆ ที่ทั้งสามคอลัมน์เป็น 1 พร้อมกัน

A	B	C	$\overline{A}$	B	$\overline{C}$	$\overline{A}B\overline{C}$
0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	1	0	0

อ่านตารางนี้ยังไง

สามคอลัมน์กลาง ($\overline{A}$, B, $\overline{C}$) คือ**ค่าของแต่ละด่าน** ครับ ไล่ดูทีละแถวจะเห็นว่า

· แถว 000 → $\overline{A} = 1$ ผ่าน แต่ $B = 0$ **ตกด่านที่ 2** → เอาต์พุต 0

· แถว 001 → $\overline{A} = 1$ ผ่าน · $B = 0$ ตก · $\overline{C} = 0$ ตกอีก → 0

· **แถว 010 → 1, 1, 1 ผ่านครบทั้งสาม → เอาต์พุตเป็น 1** (แถวเขียวแถวเดียวในตาราง)

· แถว 011 → $\overline{C} = 0$ เพราะ $C = 1$ **ตกด่านสุดท้าย** → 0

· แถว 100 ถึง 111 → $A = 1$ ทั้งหมด ทำให้ $\overline{A} = 0$ **ตกตั้งแต่ด่านแรก** → 0 ยกแถว

นับแล้วมีเลข 1 ในคอลัมน์เอาต์พุต **1 ตัวพอดี** ครับ นี่คือลายเซ็นของ minterm

ทางลัด — อ่าน minterm เป็นเลขฐานสองได้เลย

พอเข้าใจที่มาแล้ว น้องไม่ต้องกางตารางอีกเลยครับ ใช้กฎแปลงตรง ๆ ได้:

ตัวแปรที่ “มีขีดบน” → บิตนั้นเป็น 0 · ตัวแปรที่ “ไม่มีขีดบน” → บิตนั้นเป็น 1

ลองดู: $\overline{A}B\overline{C}$ → มีขีด, ไม่มีขีด, มีขีด → 0 1 0 → แถวที่ 2 (ฐานสิบ)

อีกอัน: $AB\overline{C}$ → ไม่มี, ไม่มี, มี → 1 1 0 → แถวที่ 6

ตรงนี้เร็วมากครับ ใช้ได้ทั้งขาไปและขากลับ

ลองอีกตัวหนึ่งเพื่อความมั่นใจ คราวนี้ $AB\overline{C}$ ซึ่งตามทางลัดต้องติดแถว 110:

A	B	C	A	B	$\overline{C}$	$AB\overline{C}$
0	0	0	0	0	1	**0**
0	0	1	0	0	0	**0**
0	1	0	0	1	1	**0**
0	1	1	0	1	0	**0**
1	0	0	1	0	1	**0**
1	0	1	1	0	0	**0**
1	1	0	1	1	1	**1**
1	1	1	1	1	0	**0**

ถูกต้องครับ แถวเขียวคือแถว $ABC = 110$ แถวเดียว ตรงกับที่ทางลัดทำนายไว้

เลขประจำตัวของ minterm — สัญกรณ์ m_i

Minterm number m_i (สไลด์หน้า 3)

Minterms are often referred to by number m_i, obtained from converting the binary number in the input row of the truth table to its decimal value.

ภาษาพี่: เอา**เลขฐานสองของแถว**ที่ minterm นั้นติด มาแปลงเป็นฐานสิบ แล้วเขียนเป็นตัวห้อยครับ

ที่มา: เขียน $\overline{A}B\overline{C}$ ทุกครั้งมันยาว ในเมื่อมันผูกกับแถว 010 = 2 อยู่แล้ว ก็เรียกมันสั้น ๆ ว่า m_2 ไปเลย — **เป็นแค่ชื่อเล่น ไม่ใช่ของใหม่** ครับ

callback EP01: การแปลง $010_2 \rightarrow 2_{10}$ คือ positional numbering ที่น้องทำมาตั้งแต่ EP01 ($0 \times 4 + 1 \times 2 + 0 \times 1 = 2$) — วนกลับมาใช้อีกรอบครับ

ตารางอ้างอิงที่ต้องเปิดได้ทันที — 2 ตัวแปร (4 แถว)

สไลด์หน้า 4 ให้ตารางนี้มาเป็นช่องเปล่า ๆ ให้เติมในคาบ พี่เติมให้ครบแล้วครับ

A,B	เลขของ minterm	minterm
00	m_0	$\overline{A}\,\overline{B}$
01	m_1	$\overline{A}B$
10	m_2	$A\overline{B}$
11	m_3	AB

อ่านตารางนี้ยังไง

ดูคอลัมน์ซ้ายเป็นเลขฐานสองของแถว แล้วแปลงเป็นตัวอักษรตามกฎ **0 ใส่ขีดบน · 1 ไม่ใส่** ครับ

แถว 01 → A เป็น 0 ใส่ขีด, B เป็น 1 ไม่ใส่ → $\overline{A}B = m_1$

2 ตัวแปรมี minterm ได้ 4 ตัวพอดี คือ m_0 ถึง m_3 ไม่มีมากกว่านี้ครับ

จำง่าย ๆ

n ตัวแปร → มี minterm ได้ 2^n ตัว เท่ากับจำนวนแถวของตารางพอดี

เพราะ minterm หนึ่งตัวจองไว้หนึ่งแถว และไม่มีแถวไหนถูกจองซ้ำครับ

(callback EP01: 2^n ตัวเดียวกับที่ใช้นับจำนวนแถวมาตลอด)

ตารางอ้างอิงที่ต้องเปิดได้ทันที — 3 ตัวแปร (8 แถว)

อันนี้คือตารางที่น้องจะใช้บ่อยที่สุดทั้ง EP และทั้ง Assignment 4 เลยครับ ควรจำ**วิธีสร้าง**ให้ได้ ไม่ต้องท่องทั้งตาราง

A,B,C	เลขของ minterm	minterm
000	m_0	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$
001	m_1	$\overline{A}\overline{B}C$
010	m_2	$\overline{A}B\overline{C}$
011	m_3	$\overline{A}BC$
100	m_4	$A\overline{B}\overline{C}$
101	m_5	$A\overline{B}C$
110	m_6	$AB\overline{C}$
111	m_7	ABC

กับดัก — สลับ 0 กับ 1 ตอนใส่ขีดบน

คนพลาดข้อนี้เยอะที่สุดในเรื่อง minterm ครับ บางคนจำสลับเป็น “1 ใส่ขีด 0 ไม่ใส่” แล้วคำตอบจะกลับด้านทุกตัวอักษรทันที

วิธีกันที่แน่นอนที่สุดคือย้อนกลับไปที่ “ทำไม” ครับ: ถ้าอยากให้ A ที่มีค่า **0** ทำให้พจน์ผ่านด่าน AND ได้ ต้องเอาอะไรมาคลุมให้มันกลายเป็น 1 — ก็ต้องใส่ขีดบนสิครับ $\overline{0} = 1$

เพราะฉะนั้น **0 → ต้องใส่ขีดบน** เสมอ ไม่มีทางเป็นอย่างอื่น

คำตอบผิดที่จะได้ถ้าพลาด: แถว 010 จะเขียนเป็น $A\overline{B}C$ ซึ่งจริง ๆ แล้วคือแถว 101 คนละแถวไปเลยครับ

เทียบของเก่า — minterm เคยผ่านตาน้องมาแล้ว

EP05: ตาราง AND 3 ขาเข้าที่น้องเติมใน Assignment 3 ข้อ 1 มีเลข 1 อยู่แถวเดียว คือแถว 111 — **นั่นคือ** $m_7 = ABC$ **พอดีเป๊ะ** ครับ

แปลว่าน้องเคยเจอ minterm มาแล้วตั้งแต่ EP05 แค่ยังไม่รู้จักชื่อมัน

สรุปให้เห็นภาพ: เกต AND ที่มีอินเวอร์เตอร์แปะขาเข้าตามตำแหน่งที่ต้องการ = ตัวสร้าง minterm หนึ่งตัวในวงจรจริงครับ

หัวใจของหัวข้อนี้

minterm = พจน์ AND ที่มีตัวแปรครบทุกตัว → เป็น 1 ได้แถวเดียว → เลขประจำตัวคือเลขฐานสองของแถวนั้นแปลงเป็นฐานสิบ · เขียนกลับด้วยกฎ 0 ใส่ขีด 1 ไม่ใส่

3 maxterm — พจน์ที่เป็น 0 ได้แค่แถวเดียว

ตะขอเกี่ยว

หัวข้อที่แล้วน้องได้กุญแจที่**เปิด**ลิ้นชักได้ใบเดียวไปแล้วครับ
สมมติว่าถ้าคราวนี้พี่อยากได้ของกลับด้าน คือของที่**ปิด**ลิ้นชักได้ใบเดียว (อีก 7 ใบเปิดหมด) ละครับ จะเขียนยังไง
ของชิ้นนั้นก็มีจริงครับ ชื่อว่า **maxterm** และมันคือ **OR** ล้วน ๆ ไม่ใช่ AND

ของใกล้ตัว — สวิตช์ไฟต่อขนาน

ย้อนกลับไป EP05 ครับ สวิตช์ต่อ**ขนาน** คือ OR — ไฟจะดับก็ต่อเมื่อ**ปิดสวิตช์ทุกตัวพร้อมกัน** ถ้ามีสวิตช์ตัวไหนเปิดอยู่แม้แต่ตัวเดียว ไฟก็ยังติด



สวิตช์ทั้งสองตัวปิด (0 ทั้งคู่)
= แถวเดียวที่ไฟดับ

$$A + B = 0$$

มีสวิตช์เปิดแค่ตัวเดียวก็พอ
= อีก 3 แถวไฟติดหมด

$$A + B = 1$$

OR เป็น 0 ได้ยากมาก — ต้องเป็น 0 ครบทุกขาพร้อมกัน ซึ่งเกิดได้แค่ชุดค่าเดียว

เข้าเรื่อง — นิยาม maxterm

Maxterm (standard sum term)

A maxterm of n variables = sum of n literals in which each variable appears exactly once, either complemented or uncomplemented.

ภาษาพี่: maxterm คือ sum term ที่มีตัวแปร**ครบทุกตัวพอดี ตัวละหนึ่งครั้ง** — โครงเหมือน minterm เป๊ะ ต่างกันแค่ข้างในเป็น **OR** แทน AND ครับ

ตัวอย่าง 3 ตัวแปร: $(A + \overline{B} + C)$ เป็น maxterm · $(A + \overline{B})$ ไม่เป็น เพราะ C หายไป

★ ที่มา — ทำไม maxterm ถึงเป็น 0 ได้แค่แถวเดียว

1

$$A + \overline{B} + C$$

OR สามชั้น
ต้อง 0 ครบทุกชิ้น ถึงจะได้ 0

maxterm คือ OR ล้วน — เพราะฉะนั้นเป็น 0 ยากมาก

กฎ OR จาก EP05: **ได้ 0 ก็ต่อเมื่อทุกชิ้นเป็น 0** ครับ ถ้ามีชิ้นไหนเป็น 1 แม้แต่ชิ้นเดียว ผลออกมาเป็น 1 ทันที
เพราะฉะนั้นเงื่อนไขของการเป็น 0 คือ **“ทุกชิ้นต้องเป็น 0 พร้อมกัน”** — ซึ่งเข้มงวดพอ ๆ กับเงื่อนไขของ AND แค่กลับด้าน

2

$A = 0$ แปลว่า A = 0
$\overline{B} = 0$ แปลว่า B = 1
$C = 0$ แปลว่า C = 0

แปลแต่ละชิ้นกลับเป็นค่าของตัวแปร — ★ ตรงนี้กลับด้านจาก minterm

ชิ้นที่ 1 คือ A ต้องเป็น 0 → $A = 0$
ชิ้นที่ 2 คือ $\overline{B}$ ต้องเป็น 0 → นั่นแปลว่า $B = 1$ ครับ **เห็นไหมครับว่ากลับกับ minterm**
ชิ้นที่ 3 คือ C ต้องเป็น 0 → $C = 0$

3

0 1 0

มีชุดเดียวที่ได้ 0

รวมสามชิ้น = ได้ชุดค่าเดียวอีกเหมือนกัน

ต้องเป็น 0 พร้อมกันทั้งสามชิ้น แปลว่า $ABC = 010$ ชุดเดียว
เพราะฉะนั้น $A + \overline{B} + C$ **เป็น 0 ได้แถวเดียว คือแถวที่ 2** ครับ
และเลขประจำตัวของมันคือ M_2 — ใช้ **M ตัวใหญ่** เพื่อไม่ให้ปนกับ m ตัวเล็ก

กางตารางจริงให้ดูเหมือนเดิมครับ คราวนี้ให้ดู**แถวที่เอาต์พุตเป็น 0** (แถวขาว ตัวเลขแดง)

A	B	C	A	$\overline{B}$	C	$A + \overline{B} + C$
0	0	0	0	1	0	**1**
0	0	1	0	1	1	**1**
0	1	0	0	0	0	**0**
0	1	1	0	0	1	**1**
1	0	0	1	1	0	**1**
1	0	1	1	1	1	**1**
1	1	0	1	0	0	**1**
1	1	1	1	0	1	**1**

อ่านตารางนี้ยังไง

คอลัมน์กลางสามคอลัมน์คือค่าของแต่ละชิ้นใน OR ครับ

· แถว 000 → $A=0, \overline{B}=1$ ← **มี 1 โผล่มาแล้ว** → OR ได้ 1 ทันที

· **แถว 010 → 0, 0, 0 ครบสามศูนย์ → เอาต์พุตเป็น 0** (แถวเดียวในตารางที่เป็น 0)

· แถว 100 → $A=1$ → OR ได้ 1 ทันที ไม่ต้องดูชิ้นอื่น

นับแล้วมีเลข 0 ในคอลัมน์เอาต์พุต **1 ตัวพอดี** ครับ — ลายเซ็นของ maxterm

★ ทางลัดของ maxterm — กลับด้านกับ minterm ทั้งสองอย่าง

จำคู่กันไปเลยครับ นี่คือประโยคที่ต้องท่องให้ได้ทั้ง EP:

minterm: บิตเป็น 0 → ใส่ขีดบน · บิตเป็น 1 → ไม่ใส่

maxterm: บิตเป็น 0 → ไม่ใส่ขีดบน · บิตเป็น 1 → ใส่

ลองดู: แถว 010 → minterm คือ $\overline{A}B\overline{C}$ (m_2) · maxterm คือ $(A+\overline{B}+C)$ (M_2)

ตรวจง่าย ๆ: ตัวอักษรตัวไหนมีขีดใน m_i ต้อง**ไม่**มีขีดใน M_i และกลับกัน — สลับกันทุกตัวเป๊ะ ๆ ครับ

ทำไมถึงกลับด้าน — ที่มาจาก De Morgan (callback EP06)

อ๋อ อันเดิมจาก EP06 นี่เอง

ตรงนี้พี่ไม่อยากให้น้องท่องว่า “maxterm กลับด้าน” ลอย ๆ ครับ มันมี**ที่มาชัดเจน** คือ De Morgan ที่น้องเรียนไปแล้วใน EP06

จำได้ไหมครับว่า $\overline{XYZ}=\overline{X}+\overline{Y}+\overline{Z}$ (คลุมยาวหนึ่งขีดของ AND = แตกเป็น OR ของขีดสั้น)

ทีนี้ลองเอา $m_2=\overline{A}B\overline{C}$ มาใส่ขีดบนทั้งก้อนดูครับ:

$$\overline{m_2} \;=\; \overline{\overline{A}\,B\,\overline{C}} \;=\; \overline{\overline{A}}+\overline{B}+\overline{\overline{C}} \;=\; A+\overline{B}+C \;=\; M_2$$

De Morgan (แตกขีดยาวของ AND เป็น OR) แล้วตามด้วย involution ($\overline{\overline{A}}=A$)

ผลลัพธ์ที่ต้องจำ

$M_i=\overline{m_i}$ **และ** $m_i=\overline{M_i}$ **ทุกค่าของ** i

นี่คือคำอธิบายว่า**ทำไมตัวอักษรถึงกลับด้าน**ครับ — เพราะ De Morgan พลิกทั้ง ① เครื่องหมาย (AND ↔ OR) และ ② ขีดบนของทุกตัวแปร **พร้อมกันทีเดียว**

ไม่ใช่กฎใหม่ที่ต้องท่อง แต่เป็นผลของกฎเดิมจาก EP06 ครับ

ถ้ายังไม่มั่นใจ พี่กางตารางเทียบ m_2 กับ M_2 ให้ดูข้างกันเลยครับ ทุกแถวต้องมีค่าตรงกันข้ามกันพอดี

A	B	C	$m_2 = \overline{A}B\overline{C}$	M_2
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	0	1

เห็นอะไรจากตารางนี้

คอลัมน์ m_2 กับคอลัมน์ M_2 **ตรงข้ามกันทุกแถว 8 แถว** ครับ: m_2 เป็น `0 0 1 0 0 0 0 0` · M_2 เป็น `1 1 0 1 1 1 1 1`

อันหนึ่งมี 1 ตัวเดียว อีกอันมี 0 ตัวเดียว และอยู่**แถวเดียวกัน**คือแถว 010

นี่คือหลักฐานว่า $M_2 = \overline{m_2}$ จริงครับ พี่รันด้วย `same_logic()` ยืนยันแล้วทั้ง $i = 0$ ถึง 7

ตารางอ้างอิง minterm คู่ maxterm — 2 ตัวแปร และ 3 ตัวแปร

สองตารางนี้คือ**ของที่ต้องพกเข้าห้องสอบในหัว**ครับ พี่แนะนำให้ฝึกเขียนเองจากศูนย์ให้ได้ภายใน 1 นาที

2 ตัวแปร — 4 แถว

เลขแถว	A,B	minterm (เป็น 1 แถวเดียว)	maxterm (เป็น 0 แถวเดียว)
0	00	$m_0 = \overline{A}\overline{B}$	$M_0 = (A + B)$
1	01	$m_1 = \overline{A}B$	$M_1 = (A + \overline{B})$
2	10	$m_2 = A\overline{B}$	$M_2 = (\overline{A} + B)$
3	11	$m_3 = AB$	$M_3 = (\overline{A} + \overline{B})$

3 ตัวแปร — 8 แถว

เลขแถว	A,B,C	minterm (เป็น 1 แถวเดียว)	maxterm (เป็น 0 แถวเดียว)
0	000	$m_0 = \overline{A}\overline{B}\overline{C}$	$M_0 = (A + B + C)$
1	001	$m_1 = \overline{A}\overline{B}C$	$M_1 = (A + B + \overline{C})$
2	010	$m_2 = \overline{A}B\overline{C}$	$M_2 = (A + \overline{B} + C)$

เลขแถว	A,B,C	minterm (เป็น 1 แถวเดียว)	maxterm (เป็น 0 แถวเดียว)
3	011	$m_3 = \overline{A}BC$	$M_3 = (A + \overline{B} + \overline{C})$
4	100	$m_4 = A\overline{B}\overline{C}$	$M_4 = (\overline{A} + B + C)$
5	101	$m_5 = A\overline{B}C$	$M_5 = (\overline{A} + B + \overline{C})$
6	110	$m_6 = AB\overline{C}$	$M_6 = (\overline{A} + \overline{B} + C)$
7	111	$m_7 = ABC$	$M_7 = (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})$

กับดักของ maxterm — 3 อย่างที่พลาดกันบ่อย

① ลืมใส่วงเล็บ — maxterm ต้องมีวงเล็บครอบเสมอครับ เพราะเวลาเอาไปคูณกันหลายก้อน ถ้าไม่มีวงเล็บ $A + B \cdot \overline{A} + C$ จะอ่านผิดความหมายทันที (AND ทำก่อน OR)
คำตอบผิดที่จะได้: ได้นิพจน์คนละอันไปเลย ตารางค่าความจริงไม่ตรง

② ใช้ m ตัวเล็กแทน M ตัวใหญ่ — สองอันนี้คนละตัวคนละความหมายครับ $m_2 = \overline{A}B\overline{C}$ ส่วน $M_2 = (A + \overline{B} + C)$ เขียนผิดตัวเดียวคือผิดทั้งข้อ
วิธีกัน: ดูรูปทรง — ถ้ามีวงเล็บและมีเครื่องหมาย $+$ ข้างใน ต้องเป็น M ตัวใหญ่เสมอ

③ นึกว่า M_2 คือ maxterm ตัวที่ 2 นับจาก 1 — ไม่ใช่ครับ ตัวห้อยคือ**เลขแถว** และแถวเริ่มนับจาก **0** เสมอ M_0 คือแถวแรก (000) · M_7 คือแถวสุดท้าย (111) — มี 8 ตัวคือ M_0 ถึง M_7 ครับ

ศัพท์สอบของหัวข้อนี้

English	แปลว่า	ข้อสอบเขียนมาแบบนี้
minterm / standard product term	พจน์ AND ที่มีตัวแปรครบ — เป็น 1 แถวเดียว	...product of n literals in which each variable appears exactly once.
maxterm / standard sum term	พจน์ OR ที่มีตัวแปรครบ — เป็น 0 แถวเดียว	...sum of n literals in which each variable appears exactly once.
minterm number m_i	เลขแถวของ minterm นั้น (ฐานสิบ)	Minterms are often referred to by number m_i.
complemented / uncomplemented	มีขีดบน / ไม่มีขีดบน	...either complemented or uncomplemented, but not in both.
duality principle	หลักคู่กัน — ทุกอย่างมีคู่ที่กลับด้านเป๊ะ	...its complement is in the POS form (duality principle).

หัวใจของหัวข้อนี้

maxterm คือ minterm ที่โดนขีดบนคลุมทั้งก้อน ($M_i = \overline{m_i}$) — De Morgan เลยพลิกให้ทั้งเครื่องหมายและขีดบนกลับด้านพร้อมกัน นั่นคือเหตุผลเดียวที่ทำให้กฎการเขียนตัวอักษรกลับด้านครับ

4 สัญกรณ์ $\sum m(\dots)$ กับ $\prod M(\dots)$

ตะขอเกี่ยว

ตอนนี้น้องเขียน $\overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C}$ ได้แล้วครับ
สมมติว่าถ้าโจทย์มี 4 ตัวแปร แล้วมีแถวที่เป็น 1 อยู่ 9 แถวละครับ — น้องต้องเขียน 9 ก้อน ก้อนละ 4 ตัวอักษร รวม 36 ตัวอักษรพร้อมขีดบนอีกเพียบ
เขียนทีเดียวไม่พลาดยากมากครับ และอาจารย์ก็ตรวจยากด้วย
คนเลยคิด**ตัวย่อ**ขึ้นมา ซึ่งใช้แค่**ตัวเลข** — นั่นคือสัญกรณ์ $\sum m$ ที่สไลด์หน้า 5 พูดถึงครับ

เข้าเรื่อง — สัญกรณ์ผลรวมของ minterm

$\sum m$ notation (สไลด์หน้า 5)

Minterm notations are commonly used to express the truth table. To represent a function, we perform a sum of minterms, also called the Sum Of Products (SOP).

ภาษาพี่: เขียน $\sum m$ แล้วใส่**เลขของแถวที่เอาต์พุตเป็น 1** ในวงเล็บครับ
ตัวอย่างจากสไลด์: ถ้าตาราง 2 ตัวแปรมี 1 อยู่ที่แถว 1 กับ 2 เขียนว่า

$$X(A,B) = \sum m(1,2) = \overline{A}B + A\overline{B}$$

ที่มาของสัญลักษณ์: $\sum$ (ซิกมา) เป็นสัญลักษณ์ “ผลรวม” ในคณิตศาสตร์ครับ ที่ใช้ตัวนี้เพราะ**เราเอา minterm มา OR (บวก) กัน** — OR คือการบวกในพีชคณิตบูลีน
สังเกตหัวข้อ: ต้องเขียน $X(A,B)$ ไม่ใช่ X เฉย ๆ เพราะ**ลำดับตัวแปรในวงเล็บบอกว่าบิตไหนคือหลักไหน** ครับ

$\prod M$ notation

A product of maxterms, also called the Product Of Sums (POS).

ภาษาพี่: เขียน $\prod M$ แล้วใส่**เลขของแถวที่เอาต์พุตเป็น 0** ในวงเล็บครับ
ที่มาของสัญลักษณ์: $\prod$ (พาย ตัวใหญ่) คือสัญลักษณ์ “ผลคูณ” เพราะเราเอา maxterm มา AND (คูณ) กัน
ตัวอย่างเดียวกัน: ตาราง 2 ตัวแปรที่มี 1 ที่แถว 1, 2 → มี **0** ที่แถว 0, 3 → เขียนว่า

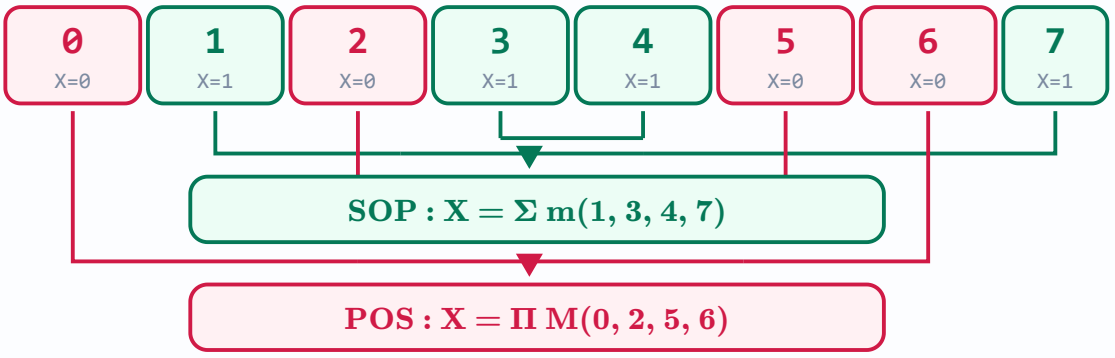
$$X(A,B) = \prod M(0,3) = (A+B)(\overline{A}+\overline{B})$$

★ ความสัมพันธ์ที่ต้องเห็นเป็นภาพ — เลข 8 ตัวถูกแบ่งเป็น 2 กอง

ตรงนี้คือหัวใจของหัวข้อครับ ถ้าน้องเห็นภาพนี้ได้ จะไม่มีทางเขียน $\prod M$ ผิดอีกเลย

ลองนึกภาพว่า**เลขแถว 0 ถึง 7 เรียงกันอยู่ 8 ช่อง** ทุกช่องต้องอยู่กองใดกองหนึ่ง **ไม่มีช่องไหนอยู่สองกอง และไม่มีช่องไหนตกหล่น**

ตัวอย่าง: ตาราง 3 ตัวแปรที่มีเอาต์พุตเป็น 1 ที่แถว 1, 3, 4, 7



4 + 4 = 8 ครบพอดี · ไม่มีเลขไหนอยู่ทั้งสองกอง · ไม่มีเลขไหนตกหล่น

เพราะเอาต์พุตของแต่ละแถวเป็นได้แค่ 0 หรือ 1 อย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้นครับ

เลข 0–7 ถูกแบ่งเป็นสองกองที่ไม่ทับกัน — กองเขียวไปเป็น $\sum m$ กองแดงไปเป็น $\prod M$

กฎที่ได้จากภาพนี้ — ใช้ตรวจคำตอบได้ทุกข้อ

เลขที่ไม่อยู่ใน $\sum m$ จะอยู่ใน $\prod M$ พอดี (และกลับกัน)

ที่มา: ทุกแถวของตารางมีเอาต์พุตเป็น 0 หรือ 1 **อย่างใดอย่างหนึ่ง** เท่านั้น เป็นสองอย่างพร้อมกันไม่ได้ และไม่เป็นอะไรเลยก็ไม่ได้ครับ — เพราะฉะนั้นเลขแถวทั้งหมดจึงถูกแบ่งเป็นสองกองที่ไม่ทับกันและไม่มีเศษ

ผลที่ใช้ได้จริงในห้องสอบ: ถ้าน้องเขียน $\sum m$ เสร็จแล้ว จะได้ $\prod M$ ฟรี ๆ ทันที แค่**เขียนเลขที่เหลือ** — ไม่ต้องกลับไปนั่งอ่านตารางใหม่

ใช้ตรวจคำตอบ: จำนวนเลขในสองวงเล็บรวมกันต้องได้ 2^n พอดีเสมอ (3 ตัวแปร = 8 · 4 ตัวแปร = 16) ถ้าไม่ครบ แปลว่าอ่านตกไปแถวหนึ่งแน่นอนครับ

I DO — พี่ทำให้ดู 1 ข้อ

I DO

จากตาราง เขียนทั้ง $\sum m$ และ $\prod M$

A	B	C	X	minterm	maxterm
0	0	0	0	—	$M_0 = (A + B + C)$
0	0	1	1	$m_1 = \overline{A}\overline{B}C$	—
0	1	0	0	—	$M_2 = (A + \overline{B} + C)$
0	1	1	0	—	$M_3 = (A + \overline{B} + \overline{C})$
1	0	0	1	$m_4 = A\overline{B}\overline{C}$	—
1	0	1	0	—	$M_5 = (\overline{A} + B + \overline{C})$
1	1	0	1	$m_6 = AB\overline{C}$	—
1	1	1	0	—	$M_7 = (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})$

อ่านตารางแล้วเขียนสองบรรทัด

ขั้น 1 — กวาดหาแถวเขียว (เอาต์พุตเป็น 1) เจอที่แถว **1, 4, 6** ครับ

ขั้น 2 — เขียน $\sum m$ ได้ $X(A,B,C) = \sum m(1,4,6)$

ขั้น 3 — เลขที่เหลือคือ $\prod M$ จาก 0–7 เอา 1, 4, 6 ออก เหลือ **0, 2, 3, 5, 7** ครับ

ขั้น 4 — ตรวจ $3 + 5 = 8$ ครบพอดี

ไม่ต้องอ่านตารางสองรอบ

คนส่วนใหญ่จะกวาดตารางรอบแรกหา 1 แล้วกวาดรอบสองหา 0

ไม่ต้องครับ — **กวาดรอบเดียวหา 1 แล้วเขียนเลขที่เหลือ** เร็วกว่าและพลาดน้อยกว่า เพราะการกวาดสองรอบมีโอกาสอ่านตกสองเท่า

คำตอบเต็มของ I DO

ขั้น 1 — รูปย่อ (สัญกรณ์):

$$X(A,B,C) = \sum m(1,4,6) = \prod M(0,2,3,5,7)$$

ขั้น 2 — กางเป็น SOP เต็ม โดยเอา m_1, m_4, m_6 จากตารางอ้างอิงหัวข้อ 3 มาต่อกันด้วย $+$:

$$X = \overline{A}\,\overline{B}C + A\overline{B}\,\overline{C} + AB\overline{C}$$

ขั้น 3 — กางเป็น POS เต็ม โดยเอา M_0, M_2, M_3, M_5, M_7 มาคูณกัน:

$$X = (A + B + C)(A + \overline{B} + C)(A + \overline{B} + \overline{C})(\overline{A} + B + \overline{C})(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})$$

ขั้น 4 — เช็คความสมเหตุสมผล: ตารางมี 1 อยู่ 3 แถว → SOP มี 3 ก้อน ✓ · มี 0 อยู่ 5 แถว → POS มี 5 วงเล็บ ✓

ตอบ: $\mathbf{X = \sum m(1,4,6) = \prod M(0,2,3,5,7)}$

"X(A,B,C) = Σm(1,4,6) = ΠM(0,2,3,5,7)."

WE DO — ทำด้วยกัน

WE DO

เติมช่องว่าง 4 ช่อง แล้วดูเฉลยพร้อมเหตุผลของทุกช่อง

W4.1

> A three-variable function is given as $F(A,B,C) = \sum m(0,2,5)$. Write F in $\prod M$ notation, and state how many product terms and how many sum terms the two forms contain.

โจทย์ให้ $\sum m$ มา ให้เขียน $\prod M$ ครับ

· เลขที่ขาดหายไปจาก 0–7 คือ .....

· เพราะฉะนั้น $F = \prod M($ ..... $)$

· รูป SOP มี product term ทั้งหมด ..... ก้อน

· รูป POS มี sum term ทั้งหมด ..... ก้อน

เฉลย W4.1 — เติมทุกช่องพร้อมเหตุผล

ช่องที่ 1 — เลขที่ขาดหายไป = 1, 3, 4, 6, 7

ทำไม: เลขแถวของ 3 ตัวแปรคือ 0 ถึง 7 ครับ โจทย์ให้ $\sum m$ ใช้ไป 3 ตัว (0, 2, 5) ที่เหลือคือ 1, 3, 4, 6, 7 — พี่ไล่นับตามลำดับเลยจะได้ไม่ตก: 0 ใช้แล้ว · 1 เหลือ · 2 ใช้แล้ว · 3 เหลือ · 4 เหลือ · 5 ใช้แล้ว · 6 เหลือ · 7 เหลือ

ช่องที่ 2 — $F = \prod M(1,3,4,6,7)$

ทำไม: เพราะแถวที่ไม่ได้ให้ 1 ก็ต้องให้ 0 ครับ และ $\prod M$ อ่านจากแถวที่ให้ 0 พอดี

ตรวจ: $3 + 5 = 8$ ครบ ✓

ช่องที่ 3 — SOP มี 3 product term

ทำไม: จำนวน product term ใน SOP = จำนวนแถวที่เอาต์พุตเป็น 1 = จำนวนเลขใน $\sum m$ = 3 ครับ กางออกมาคือ $F = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}C$

ช่องที่ 4 — POS มี 5 sum term

ทำไม: จำนวน sum term ใน POS = จำนวนแถวที่เอาต์พุตเป็น 0 = จำนวนเลขใน $\prod M$ = 5 ครับ

ข้อสังเกตจากสไลด์หน้า 15: **“If SOP expression is long, then the POS expression will be short and vice versa.”** — ข้อนี้ SOP สั้น (3 ก้อน) POS เลยยาว (5 ก้อน) ตรงตามที่สไลด์บอกครับ

ตอบ: $\mathbf{F = \prod M(1,3,4,6,7)}$ **· SOP 3 product terms · POS 5 sum terms**

“F(A,B,C) = Σm(0,2,5) = ΠM(1,3,4,6,7); the SOP form has 3 product terms and the POS form has 5 sum terms.”

YOU DO — ตาน้อง

YOU DO

ปิดเฉลยไว้ก่อน ทำเองให้จบแล้วค่อยเปิดเทียบครับ

Y4.1

> Given $G(A,B,C) = \prod M(0,1,6)$, write G using the $\sum m$ notation and expand it into a standard SOP expression.

โจทย์ให้ $\prod M$ มา ให้เขียนเป็น $\sum m$ แล้วกางเป็น SOP เต็ม ๆ ครับ

เฉลย Y4.1

ขั้น 1 — หาเลขที่เหลือ เพราะ $\sum m$ กับ $\prod M$ แบ่งเลข 0–7 กันคนละกอง ไม่ทับกัน
เลขทั้งหมด 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 · โจทย์ใช้ไป 0, 1, 6 → เหลือ **2, 3, 4, 5, 7**

ขั้น 2 — เขียนรูปย่อ $G(A,B,C) = \sum m(2,3,4,5,7)$
ตรวจ: $3 + 5 = 8$ ครบพอดี ✓

ขั้น 3 — กางทีละตัว เพราะโจทย์สั่งว่า `expand into a standard SOP expression` แปลว่าต้องเขียนตัวอักษรจริง ๆ ไม่ใช่ทิ้งไว้เป็นตัวเลข ใช้กฎ **0 ใส่ขีดบน 1 ไม่ใส่**:
$m_2 = 010 \to \overline{A}B\overline{C}$ · $m_3 = 011 \to \overline{A}BC$ · $m_4 = 100 \to A\overline{B}\,\overline{C}$
$m_5 = 101 \to A\overline{B}C$ · $m_7 = 111 \to ABC$

ขั้น 4 — ต่อกันด้วย OR เพราะ SOP คือผลบวกของ product term ครับ

ตอบ: $\mathbf{G = \sum m(2,3,4,5,7) = \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C + ABC}$

"G(A,B,C) = ΠM(0,1,6) = Σm(2,3,4,5,7) = A'BC' + A'BC + AB'C' + AB'C + ABC."
(ในข้อสอบเขียนขีดบนตามสไลด์ได้เลยครับ พี่พิมพ์เป็น A' ตรงนี้เพราะบรรทัดอังกฤษพิมพ์ขีดบนไม่ได้)

กับดักของสัญกรณ์ — 3 อย่าง

① ใส่เลขแถวเรียงไม่ครบเพราะนับข้าม — เวลาหา “เลขที่เหลือ” ต้องไล่จาก 0 ถึง $2^n - 1$ ทีละตัวครับ อย่าเดา วิธีกันคือเขียน 0 1 2 3 4 5 6 7 ลงกระดาษก่อนแล้วขีดฆ่าตัวที่ใช้แล้ว

② ลืมเขียนชื่อตัวแปรในวงเล็บหัวข้อ — ต้องเขียน $X(A, B, C)$ ไม่ใช่ X เฉย ๆ
เพราะ $\sum m(3)$ ของ $X(A, B, C)$ คือ $\overline{A}BC$ แต่ของ $X(C, B, A)$ จะกลายเป็น $\overline{C}BA$ คนละตัวเลยครับ **ลำดับตัวแปรคือสิ่งที่บอกว่าบิตซ้ายสุดเป็นของใคร**

③ ใช้ $\sum$ กับ maxterm หรือ $\prod$ กับ minterm
จำคู่ให้แน่นครับ: $\sum$ **คู่กับ** m **ตัวเล็กเสมอ ·** $\prod$ **คู่กับ** M **ตัวใหญ่เสมอ** ไม่มีการสลับคู่ เพราะ minterm ต้องเอามา OR (บวก) และ maxterm ต้องเอามา AND (คูณ) ครับ

หัวใจของหัวข้อนี้

$\sum m$ เก็บเลขแถวที่ได้ 1 · $\prod M$ เก็บเลขแถวที่ได้ 0 · สองกองรวมกันได้ 2^n พอดีเสมอ — เขียนกองหนึ่งเสร็จ อีกกองได้ฟรีทันทีครับ

5 ทิศที่ (1) — ตารางค่าความจริง → SOP

ตะขอเกี่ยว

น้องมี minterm อยู่ในมือแล้ว ซึ่งแต่ละตัวติดได้แถวเดียว
สมมติว่าถ้าตารางของเรามี 1 อยู่ **3 แถว** ละครับ จะเขียนยังไง
คำตอบง่ายมากครับ — **หยิบ minterm ของทั้งสามแถวมาต่อกันด้วย OR** เพราะ OR แปลว่า “อันไหนติดก็ได้” เพราะฉะนั้นผลรวมจะติดครบทั้งสามแถวพอดีเป๊ะ ไม่เกินไม่ขาด
นี่คือทั้งหมดของหัวข้อ (1) ครับ ที่เหลือคือรายละเอียดการเขียนให้ไม่ผิด

เข้าเรื่อง — วิธีจากสไลด์หน้า 10

Truth Table to SOP Boolean Expression

Each row of the truth table corresponds to a product term. A sum of products (SOP) expression is formed by ORing those minterms corresponding to rows of the truth table for which the function or output is 1.

ภาษาพี่: ทุกแถวมี minterm ประจำตัวของมันอยู่แล้ว ให้หยิบ**เฉพาะแถวที่เอาต์พุตเป็น 1** มา OR กันครับ
ที่มา — ทำไมถึงได้ตารางตรงเป๊ะ: พี่อธิบายเป็นสองทางครับ
· **แถวที่ควรได้ 1:** minterm ของแถวนั้นอยู่ในสูตร และมันเป็น 1 ที่แถวนั้น → OR มีสมาชิกเป็น 1 → ได้ 1 ✓
· **แถวที่ควรได้ 0:** minterm ทุกตัวในสูตรเป็นของแถว**อื่น** ทั้งหมด → ทุกตัวเป็น 0 ที่แถวนี้ → OR ของศูนย์ล้วนได้ 0 ✓
เพราะฉะนั้นสูตรที่ได้**ตรงกับตารางทุกแถวโดยอัตโนมัติ** ไม่ต้องเช็คทีละแถวเลยครับ

ตัวอย่างของสไลด์ — เกต OR

สไลด์หน้า 10 ใช้ตาราง OR เป็นตัวอย่างแรก พี่ใส่คอลัมน์ minterm ต่อท้ายให้ดูด้วย

A	B	$X = A + B$	minterm
0	0	0	—
0	1	1	$m_1 = \overline{A}B$
1	0	1	$m_2 = A\overline{B}$
1	1	1	$m_3 = AB$

อ่านทีละแถว

แถว 00 → 0 ข้ามครับ ไม่เอาไปเขียน

แถว 01 → 1 เอา! minterm คือ $\overline{A}B$ (0 ใส่ขีด · 1 ไม่ใส่)

แถว 10 → 1 เอา! minterm คือ $A\overline{B}$

แถว 11 → 1 เอา! minterm คือ AB

ต่อกันด้วย $+$ ได้ $X = \overline{A}B + A\overline{B} + AB$

แปลกไหมที่ได้สูตรยาวกว่า $A + B$

ไม่แปลกครับ! เพราะ SOP ที่ได้จากตารางเป็น **standard form** คือทุกก้อนมีตัวแปรครบ ซึ่งมัก**ยาวกว่าที่จำเป็น**

ถ้าเอา $\overline{A}B + A\overline{B} + AB$ ไปย่อด้วยกฎ EP06 จะได้ $A + B$ กลับมาพอดีครับ

ตารางให้รูปที่ถูกต้องเสมอ แต่ไม่ใช่รูปที่สั้นที่สุด — การย่อเป็นคนละขั้นตอน

step card — วิธีทำ 4 ขั้น ใช้ได้ทุกข้อ

1

```
A B C X
0 0 1 1
0 1 0 0
1 0 0 1
```

ขั้น 1 — ระบายแถวที่เอาต์พุตเป็น 1

ทำเป็นอย่างแรกเสมอครับ ใช้ดินสอวงกลมหรือขีดเส้นใต้ก็ได้ **เพราะ**ถ้าไม่ทำเครื่องหมายไว้ก่อน พอไล่เขียนตัวอักษรไปกลาง ๆ ทางแล้วจะลืมว่าอ่านถึงแถวไหน แล้วจะเขียนซ้ำหรือเขียนตกครับ

2

0 1 0

$\overline{A}$ B $\overline{C}$

0 ใส่ขีด

ขั้น 2 — แปลงบิตของแถวนั้นเป็นตัวอักษร

ไล่จากซ้ายไปขวาทีละบิตครับ **บิต 0 → ใส่ขีดบน · บิต 1 → ไม่ใส่** **เพราะ**เราต้องการให้ literal ทุกตัวเป็น 1 ที่แถวนี้ (AND ถึงจะผ่าน) — ตัวที่มีค่า 0 อยู่ ต้องใส่ขีดบนมันถึงจะกลายเป็น 1 ครับ

เขียนติดกันไปเลยไม่ต้องใส่เครื่องหมายคูณ

3

แถวที่ 1 + แถวที่ 2 + แถวที่ 3

OR ทุกก้อนเข้าด้วยกัน

ขั้น 3 — เอาทุกก้อนมาต่อกันด้วยเครื่องหมาย +

เพราะ OR แปลว่า “ก้อนไหนติดก็นับ” ครับ — เราอยากให้เอาต์พุตเป็น 1 ที่แถวไหนก็ตามที่ตรงกับก้อนใดก้อนหนึ่ง นั่นคือความหมายของ OR พอดี

ห้ามใส่วงเล็บครอบทั้งหมดนะครับ ถ้าใส่วงเล็บมันจะกลายเป็นหน้าตาของ POS ทันที

4

แถวที่ได้ 1 | จำนวนก้อน

3 = 3

ต้องเท่ากันเสมอ

ขั้น 4 — ตรวจ: นับก้อนเทียบกับนับแถว

เพราะแต่ละแถวที่ได้ 1 ต้องให้ product term มา 1 ก้อนพอดี ไม่มากไม่น้อยครับ

ถ้านับแถวได้ 3 แต่เขียนออกมา 2 ก้อน แปลว่า**อ่านตกแถวหนึ่ง** และทุกก้อนต้องมีตัวอักษรครบ n ตัว — ถ้ามีก้อนไหนสั้นกว่าเพื่อน แปลว่าลืมเขียนตัวแปรไปตัวหนึ่งครับ

ตัวอย่างจากสไลด์ Example III — 2 ตัวแปร

Example III (สไลด์หน้า 11) EES271 · Lecture 04

> Write the following truth table using minterm notation and as an SOP Boolean expression.

ตารางในสไลด์คือ $A, B \rightarrow X$ = 0, 1, 0, 1 ครับ (แถว 00, 01, 10, 11 ตามลำดับ)

A	B	X	minterm
0	0	0	—
0	1	1	$m_1 = \overline{A}B$
1	0	0	—

เฉลย Example III (2 ตัวแปร)

ขั้น 1 — ระบายแถวที่ได้ 1 ได้แถว **01** กับ **11** ครับ → เลขแถวคือ 1 กับ 3

ขั้น 2 — แปลงเป็นตัวอักษร

แถว 01: $A = 0$ ใส่ขีด · $B = 1$ ไม่ใส่ → $\overline{A}B$

แถว 11: $A = 1$ ไม่ใส่ · $B = 1$ ไม่ใส่ → AB

ขั้น 3 — OR เข้าด้วยกัน → $X = \overline{A}B + AB$

ขั้น 4 — ตรวจ แถวที่ได้ 1 มี 2 แถว · เขียนได้ 2 ก้อน ✓ ทุกก้อนมี 2 ตัวอักษร ✓

ตอบ:

$$\mathbf{X(A,B) = \sum m(1,3) = \overline{A}B + AB}$$

“X(A,B) = Σm(1,3) = A'B + AB.”

A	B	X	minterm
1	1	1	$m_3 = AB$

เกร็ด: ย่อต่อได้เป็น $X = B(\overline{A} + A) = B$ ครับ (กฎ complement จาก EP06) แต่โจทย์ถามรูป SOP จากตาราง ก็ตอบรูปเต็มไปได้เลย

ตัวอย่างจากสไลด์ Example III — 3 ตัวแปร

Example III (สไลด์หน้า 13) EES271 · Lecture 04

> Write the following truth table using minterm notation and as an SOP Boolean expression.

คราวนี้ตัวแปรชื่อ A_2, A_1, A_0 ครับ (สไลด์ตั้งชื่อแบบนี้เพื่อให้เห็นว่าชื่อตัวแปรเป็นอะไรก็ได้ ขอแค่รู้ว่าตัวไหนเป็นบิตซ้ายสุด) เอาต์พุตจากบนลงล่างคือ 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1

A_2	A_1	A_0	X	mintern
0	0	0	0	—
0	0	1	1	$m_1 = \overline{A_2}\,\overline{A_1}A_0$
0	1	0	1	$m_2 = \overline{A_2}A_1\overline{A_0}$
0	1	1	0	—
1	0	0	1	$m_4 = A_2\overline{A_1}\,\overline{A_0}$
1	0	1	1	$m_5 = A_2\overline{A_1}A_0$
1	1	0	0	—
1	1	1	1	$m_7 = A_2A_1A_0$

เฉลย Example III (3 ตัวแปร)

ขั้น 1 — ระบายแถวที่ได้ 1 ไล่จากบนลงล่าง: แถว 001, 010, 100, 101, 111

แปลงเป็นเลขฐานสิบ (positional จาก EP01): 1, 2, 4, 5, 7 ครับ

ขั้น 2 — แปลงทีละแถว (A_2 เป็นบิตซ้ายสุด เพราะสไลด์เขียนหัวคอลัมน์เรียงแบบนั้น)

$001 \to \overline{A_2}\,\overline{A_1}A_0$ · $010 \to \overline{A_2}A_1\overline{A_0}$ · $100 \to A_2\overline{A_1}\,\overline{A_0}$

$101 \to A_2\overline{A_1}A_0$ · $111 \to A_2A_1A_0$

ขั้น 3 — OR เข้าด้วยกัน

ขั้น 4 — ตรวจ 5 แถว → 5 ก้อน ✓ · ทุกก้อนมี 3 ตัวอักษร ✓

อีกวิธี: แถวที่ได้ 0 มี 3 แถว (0, 3, 6) และ $5 + 3 = 8$ ครบ ✓

ตอบ: $\mathbf{X = \sum m(1, 2, 4, 5, 7)}$

$$\mathbf{X = \overline{A_2}\,\overline{A_1}A_0 + \overline{A_2}A_1\overline{A_0} + A_2\overline{A_1}\,\overline{A_0} + A_2\overline{A_1}A_0 + A_2A_1A_0}$$

"X(A2,A1,A0) = Σm(1,2,4,5,7)."

I DO — พี่ทำให้ดูอีกข้อ (โจทย์พี่แต่งเอง)

I DO

ตาราง 3 ตัวแปร → SOP + สัญกรณ์ $\sum m$

A	B	C	X	minterm
0	0	0	1	$m_0 = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$
0	0	1	0	—
0	1	0	0	—
0	1	1	1	$m_3 = \overline{A}BC$
1	0	0	0	—
1	0	1	1	$m_5 = A\overline{B}C$
1	1	0	0	—
1	1	1	0	—

พี่คิดยังไง

ขั้น 1 — กวาดหาแถวเขียว ไล่จากบนลงล่างครับ: แถว 000 เป็น 1 ✓ · แถว 011 เป็น 1 ✓ · แถว 101 เป็น 1 ✓ · ที่เหลือเป็น 0 หมด

เลขแถวคือ **0, 3, 5**

ขั้น 2 — แปลงทีละแถว

000: ทั้งสามตัวเป็น 0 → ใส่ขีดครบสามตัว → $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$

011: A เป็น 0 ใส่ขีด · B กับ C เป็น 1 ไม่ใส่ → $\overline{A}BC$

101: A เป็น 1 · B เป็น 0 ใส่ขีด · C เป็น 1 → $A\overline{B}C$

ขั้น 3 — OR → $X = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}C$

ขั้น 4 — ตรวจสองชั้น

· นับก้อน: 3 แถว → 3 ก้อน ✓ · ทุกก้อน 3 ตัวอักษร ✓

· แทนค่าลองสักแถว: ที่ $ABC = 101$ ก้อนที่ 3 คือ $A\overline{B}C = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ → OR ได้ 1 ตรงกับตาราง ✓

· ลองแถวที่ควรได้ 0 ด้วย: ที่ $ABC = 111$ ก้อนที่ 1 มี $\overline{A} = 0$ ตก · ก้อนที่ 2 มี $\overline{A} = 0$ ตก · ก้อนที่ 3 มี $\overline{B} = 0$ ตก → OR ได้ 0 ✓

ตอบ:

$$\mathbf{X = \sum m(0,3,5) = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}C}$$

“X(A,B,C) = Σm(0,3,5) = A'B'C' + A'BC + AB'C.”

WE DO — ทำด้วยกัน

WE DO

เติม 4 ช่อง แล้วดูเฉลยพร้อมเหตุผลของทุกช่อง

W5.1

> Write the SOP Boolean expression and the $\sum m$ notation for the truth table below.

· แถวที่เอาต์พุตเป็น 1 คือแถวเลข .....

· minterm ของแถว 100 คือ .....

· นิพจน์ SOP เต็มคือ .....

· ถ้าเขียนเป็น $\prod M$ จะได้ .....

A	B	C	X	minterm
0	0	0	0	—
0	0	1	1	$m_1 = \overline{A}\overline{B}C$
0	1	0	0	—
0	1	1	0	—
1	0	0	1	$m_4 = A\overline{B}\overline{C}$
1	0	1	0	—
1	1	0	1	$m_6 = AB\overline{C}$
1	1	1	1	$m_7 = ABC$

เฉลย W5.1 — เติมทุกช่องพร้อมเหตุผล

ช่องที่ 1 — แถวที่เป็น 1 คือ 1, 4, 6, 7

ทำไม: กวาดคอลัมน์เอาต์พุตจากบนลงล่างครับ แถว 001 (=1) ✓ · แถว 100 (=4) ✓ · แถว 110 (=6) ✓ · แถว 111 (=7) ✓ ส่วนแถว 0, 2, 3, 5 เป็น 0

ช่องที่ 2 — minterm ของแถว 100 คือ $A\overline{B}\,\overline{C}$

ทำไม: ไล่ทีละบิตครับ $A = 1 \rightarrow$ ไม่ใส่ขีด · $B = 0 \rightarrow$ ใส่ขีด · $C = 0 \rightarrow$ ใส่ขีด

ระวัง: คนมักตอบ $\overline{A}BC$ เพราะจำกฎสลับ — ต้องย้อนไปที่เหตุผล ว่า “ตัวที่เป็น 0 ต้องใส่ขีดเพื่อให้กลายเป็น 1” ครับ

ช่องที่ 3 — $X = \overline{A}\,\overline{B}C + A\overline{B}\,\overline{C} + AB\overline{C} + ABC$

ทำไม: เอา minterm ของทั้ง 4 แถวมาต่อกันด้วย $+$

$m_1 = 001 \rightarrow \overline{A}\,\overline{B}C \;\cdot\; m_4 = 100 \rightarrow A\overline{B}\,\overline{C} \;\cdot\; m_6 = 110 \rightarrow AB\overline{C} \;\cdot\; m_7 = 111 \rightarrow ABC$

ช่องที่ 4 — $\prod M(0, 2, 3, 5)$

ทำไม: เลขที่เหลือจาก 0–7 หลังเอา 1, 4, 6, 7 ออก คือ 0, 2, 3, 5 ครับ

ตรวจ: $4 + 4 = 8$ ครบ ✓

ตอบ: $\mathbf{X = \sum m(1,4,6,7) = \prod M(0,2,3,5)}$

"X(A,B,C) = Σm(1,4,6,7) = A'B'C + AB'C' + ABC' + ABC."

YOU DO — ตาน้อง

YOU DO

ปิดเฉลยไว้ก่อนนะครับ

Y5.1

> For the truth table below, (a) list the minterm numbers, (b) write the standard SOP expression, and (c) state how many literals the expression contains.

ข้อ (c) ถามจำนวน literal — ทวนศัพท์จากหัวข้อ 1 ครับ

A	B	C	X	minterm
0	0	0	1	$m_0 = \overline{A}\overline{B}\overline{C}$
0	0	1	0	—
0	1	0	1	$m_2 = \overline{A}B\overline{C}$
0	1	1	1	$m_3 = \overline{A}BC$
1	0	0	0	—
1	0	1	0	—
1	1	0	1	$m_6 = AB\overline{C}$
1	1	1	0	—

เฉลย Y5.1

(a) ขั้น 1 — กวาดหาแถวที่เอาต์พุตเป็น 1 เพราะ SOP อ่านจากแถวที่ได้ 1 เท่านั้นครับ
ไล่จากบนลงล่าง: แถว 000 เป็น 1 ✓ · แถว 001 เป็น 0 · แถว 010 เป็น 1 ✓ · แถว 011 เป็น 1 ✓ · แถว 100 เป็น 0 · แถว 101 เป็น 0 · แถว 110 เป็น 1 ✓ · แถว 111 เป็น 0

ตอบ (a): minterm numbers = 0, 2, 3, 6

(b) ขั้น 2 — แปลงทีละแถวด้วยกฎ 0 ใส่ขีด 1 ไม่ใส่
$m_0 = 000 \rightarrow \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ — ทั้งสามตัวเป็น 0 จึงใส่ขีดครบ
$m_2 = 010 \rightarrow \overline{A}B\overline{C}$ — A กับ C เป็น 0 ใส่ขีด B เป็น 1 ไม่ใส่

$m_3 = 011 \rightarrow \overline{A}BC$ — เฉพาะ A ที่เป็น 0

$m_6 = 110 \rightarrow AB\overline{C}$ — เฉพาะ C ที่เป็น 0

ขั้น 3 — ต่อกันด้วย OR เพราะแถวไหนติดก็ให้เอาต์พุตเป็น 1 ได้ทั้งนั้น

ตอบ (b): $\mathbf{X = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + AB\overline{C}}$

(c) ขั้น 4 — นับ literal นับตัวอักษรทุกตัวที่ปรากฏ ขีดบนไม่ทำให้จำนวนเปลี่ยนครับ

ก้อนละ 3 ตัว มี 4 ก้อน → $3 \times 4 = \mathbf{12}$ literals

ตอบ (c): 12 literals

ตรวจ: 4 แถวที่ได้ 1 → 4 ก้อน ✓ · แถวที่ได้ 0 มี 4 แถว (1, 4, 5, 7) → $\prod M(1,4,5,7) \cdot 4 + 4 = 8$ ครบ ✓

"X(A,B,C) = Σm(0,2,3,6) = A'B'C' + A'BC' + A'BC + ABC'; it contains 12 literals."

กับดักของทิศ (1)

① **อ่านจากแถวที่เป็น 0** — นี่คือกับดักอันดับหนึ่งครับ SOP อ่านจากแถวที่เป็น **1** เท่านั้น
คำตอบผิดที่จะได้: ถ้าตารางมี 1 อยู่ 3 แถวแล้วเผลออ่านแถว 0 จะได้ 5 ก้อน ซึ่งเป็น**นิพจน์ของ** $\overline{X}$ ไม่ใช่ X — ผิดทั้งข้อ

② **เขียน product term ไม่ครบตัวแปร** — เช่นตาราง 3 ตัวแปรแต่เขียน $\overline{A}B$ (แค่ 2 ตัว)
อันนั้นไม่ใช่ minterm ครับ และมันจะติดสองแถว (010 กับ 011) ไม่ใช่แถวเดียว ทำให้ตารางเพี้ยน

③ **ลืมว่าโจทย์อาจสลับชื่อตัวแปร** — สไลด์ใช้ A_2, A_1, A_0 บ้าง A, B, C บ้าง
ให้ยึดหัวคอลัมน์ในตารางเสมอ ตัวที่อยู่ซ้ายสุดคือบิตที่มีน้ำหนักมากที่สุด (MSB) ครับ

หัวใจของทิศ (1)

ตาราง → SOP: ระบายแถวที่ได้ 1 → แปลงบิตเป็นตัวอักษร (0 ใส่ขีด) → ต่อกันด้วย + → นับก้อนให้เท่าจำนวนแถว

6 ★ ทิศที่ (2) — ตารางค่าความจริง → POS

อ่านตรงนี้ก่อนเข้าหัวข้อ

หัวข้อนี้คือ**จุดที่คนสับสนมากที่สุดของทั้ง EP** ครับ พี่เลยจะไม่รีบ
พี่จะบอก**กฎ**ก่อน แล้วค่อยพิสูจน์**ที่มา**ด้วย De Morgan แล้วปิดด้วย**ตารางเทียบสองคอลัมน์**ให้เห็นชัดว่าอะไรกลับด้านบ้าง
ขอให้อ่านช้า ๆ ครับ ถ้าตรงนี้แน่น Assignment 4 ข้อ 2 จะง่ายมาก

ตะขอเกี่ยว

น้องเขียน SOP จากตารางได้แล้วครับ
สมมติว่าถ้าตารางมี **1 อยู่ 7 แถว** และมี **0 แค่แถวเดียว** ละครับ — เขียนแบบ SOP จะได้ 7 ก้อน ก้อนละ 3 ตัวอักษร รวม 21 ตัว ยาวมาก
แต่ถ้ามองอีกมุมหนึ่ง เอาต์พุตเป็น 0 แค่แถวเดียว — **ทำไมเราไม่บรรยายแค่แถวเดียวนั้นล่ะครับ**
นั่นคือความคิดของ POS พอดี และสไลด์หน้า 15 ก็เขียนไว้ว่า **“If SOP expression is long, then the POS expression will be short and vice versa.”**

★ กฎที่ต้องจำ — และสิ่งที่กลับด้าน สองอย่าง

คนพลาด POS เพราะจำได้แค่ครึ่งเดียวครับ — จำได้ว่า “อ่านจากแถวที่ได้ 0” แต่ลืมว่าตัวอักษรก็ต้องกลับด้วย
พี่ทำภาพเทียบข้างกันให้ดูเลย

SOP	POS
กลับด้านที่ 1 — อ่านจากแถวไหน อ่านแถวที่เอาต์พุตเป็น 1	**กลับด้านที่ 1 — อ่านจากแถวไหน** อ่านแถวที่เอาต์พุตเป็น 0
กลับด้านที่ 2 — เขียนตัวแปรยังไง บิตเป็น 0 → ใส่ขีดบน บิตเป็น 1 → ไม่ใส่ขีดบน	**กลับด้านที่ 2 — เขียนตัวแปรยังไง** บิตเป็น 0 → ไม่ใส่ขีดบน บิตเป็น 1 → ใส่ขีดบน
ตัวอย่าง — แถว 010 เขียนได้ว่า $\overline{A}\,B\,\overline{C}$	ตัวอย่าง — แถว 010 เขียนได้ว่า $(A + \overline{B} + C)$

ขีดบนสลับที่กันทุกตัว · และเครื่องหมายเปลี่ยนจาก AND เป็น OR ด้วย

POS ไม่ได้กลับแค่ “อ่านแถว 0” อย่างเดียว — **ตัวอักษรก็กลับด้วย** ครับ นี่คือจุดที่คนลืม

ตารางสรุปเทียบข้างกัน — พิมพ์ติดผนังได้เลย

เทียบเรื่อง	SOP (sum of products)	POS (product of sums)
อ่านจากแถวไหน	**แถวที่เอาต์พุตเป็น 1** (แถวเขียว)	**แถวที่เอาต์พุตเป็น 0** (แถวขาว)
บิตเป็น 0 เขียนยังไง	**ใส่ขีดบน** เช่น $\overline{A}$	**ไม่ใส่ขีดบน** เช่น A
บิตเป็น 1 เขียนยังไง	**ไม่ใส่ขีดบน** เช่น B	**ใส่ขีดบน** เช่น $\overline{B}$
เชื่อมภายในหนึ่งก้อน	AND (คูณ — เขียนติดกัน)	OR (บวก — เขียน $+$)
เชื่อมระหว่างก้อน	OR (บวก — เขียน $+$)	AND (คูณ — วงเล็บชนกัน)
ต้องมีวงเล็บไหม	ไม่ต้อง	**ต้องมีทุกก้อน**
สัญกรณ์ย่อ	$\sum m(\dots)$ — เลขแถวที่ได้ 1	$\prod M(\dots)$ — เลขแถวที่ได้ 0
ชื่อของก้อน	minterm m_i	maxterm M_i
แถว 011 เขียนเป็น	$\overline{A}BC$	$(A+\overline{B}+\overline{C})$
แถว 110 เขียนเป็น	$AB\overline{C}$	$(\overline{A}+\overline{B}+C)$

★ ที่มา — ทำไมถึงต้องกลับด้าน (พิสูจน์ด้วย De Morgan · callback EP06)

ถึงตรงนี้น้องอาจรู้สึกว่า “ก็จำ ๆ ไปสิ” ครับ แต่พี่ไม่อยากให้จำ เพราะ**กฎที่จำมาลอย ๆ จะจำสลับตอนตื่นเต้นในห้องสอบ**
สไลด์หน้า 15 บอกวิธีคิดไว้ 3 ขั้นพอดี ซึ่งอธิบายทุกอย่างได้ — พี่จะเดินตามนั้นทีละขั้น

วิธีของสไลด์หน้า 15 — 3 ขั้น

(1) Begin by constructing a new column for the complement of the output $\overline{X}$.

(2) From the minterms, find the SOP expression of the complement variable.

(3) Use the involution and De Morgan's laws to obtain the output variable as a POS Boolean expression.

แปลเป็นภาษาพี่: ① เพิ่มคอลัมน์ $\overline{X}$ (พลิกทุกค่าของ X) ② เขียน SOP ของ $\overline{X}$ ด้วยวิธีเดิมที่รู้แล้ว ③ ใส่ขีดบนทั้งก้อนสองครั้งแล้วแตกด้วย De Morgan

ที่มาของแนวคิด (duality principle): สไลด์เขียนว่า “if a function is in the SOP form, then its complement is in the POS form” — เพราะ De Morgan พลิก AND เป็น OR และพลิก OR เป็น AND พร้อมกัน ก้อน SOP จึงกลายเป็นก้อน POS โดยอัตโนมัติครับ

พี่ทำให้ดูทีละขั้นด้วยตารางของสไลด์หน้า 15 เลยครับ (เอาต์พุต X = 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0)

A	B	C	$\overline{X}$	X	maxterm
0	0	0	1	0	$M_0 = (A + B + C)$
0	0	1	0	1	—
0	1	0	0	1	—
0	1	1	0	1	—
1	0	0	0	1	—
1	0	1	0	1	—
1	1	0	1	0	$M_6 = (\overline{A} + \overline{B} + C)$
1	1	1	1	0	$M_7 = (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})$

1

X → $\overline{X}$
0 → 1
1 → 0
1 → 0

ขั้น 1 — สร้างคอลัมน์ $\overline{X}$ โดยพลิกทุกค่า

เพราะเราจะยืมวิธีที่รู้แล้ว (ตาราง → SOP) มาใช้ครับ แต่ SOP อ่านจากแถวที่เป็น 1 ในเมื่อเราสนใจแถวที่ X เป็น 0 ก็แค่**พลิกให้มันกลายเป็น 1 ในคอลัมน์ใหม่**

ตารางข้างบน: X เป็น 0 ที่แถว 0, 6, 7 → $\overline{X}$ เป็น 1 ที่แถว 0, 6, 7 พอดี

2

SOP ของคอลัมน์ใหม่

$$\overline{X} = \overline{A}\overline{B}\overline{C} + ABC + \overline{A}BC$$

อ่านแถว 0, 6, 7 ด้วยกฎ SOP เดิม

ขั้น 2 — เขียน SOP ของ $\overline{X}$ ด้วยวิธีเดิม

เพราะตอนนี้คอลัมน์ $\overline{X}$ ก็เป็นตารางธรรมดาอันหนึ่ง ใช้วิธีทิศ (1) ได้เลยครับ

แถว 0 = 000 → $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ · แถว 6 = 110 → $AB\overline{C}$ · แถว 7 = 111 → ABC

$$\overline{X} = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + AB\overline{C} + ABC$$

3

$$X = \overline{\overline{X}}$$

involution — ขีดสองชั้นหักล้าง

แล้วแตกขีดนอกด้วย De Morgan

ขั้น 3 — ใส่ขีดสองชั้นแล้วแตกชั้นนอกด้วย De Morgan

เพราะเราต้องการ X ไม่ใช่ $\overline{X}$ ครับ กฎ involution จาก EP06 บอกว่า $X = \overline{\overline{X}}$ (ขีดสองชั้นหักล้างกัน) เอาไปใช้ได้เลย

แล้วขีดชั้นนอกที่คลุมทั้งก้อน SOP จะโดน De Morgan แตกออก กลายเป็น POS ตามที่ต้องการครับ

ที่นี้พี่กางบรรทัดคณิตศาสตร์ให้เห็นเต็ม ๆ ครับ กำกับชื่อกฎทุกบรรทัดตามกติกา EP06

$$\overline{X} = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + AB\overline{C} + ABC$$

① SOP ของ $\overline{X}$ — ได้จากแถวที่ X เป็น 0 (แถว 0, 6, 7)

$$X = \overline{\overline{X}} = \overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + AB\overline{C} + ABC}$$

② involution — ใส่ขีดคลุมสองชั้นให้กลับมาเป็น X

$$X = \overline{(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})} \cdot \overline{(AB\overline{C})} \cdot \overline{(ABC)}$$

③ De Morgan ข้อที่สอง — ขีดคลุม OR แตกเป็น AND ของขีดสั้น ($\overline{P+Q} = \overline{P}\,\overline{Q}$)

$$X = (A+B+C)(\overline{A}+\overline{B}+C)(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$$

④ De Morgan ข้อแรก แตกทีละก้อน ($\overline{PQR} = \overline{P}+\overline{Q}+\overline{R}$) แล้ว involution ล้างขีดซ้อน

สรุปที่มา — ทำไมตัวอักษรถึงกลับด้าน

ดูก้อนที่ 2 ให้ดีครับ: จากแถว 110 เราได้ minterm $AB\overline{C}$ พอโดนขีดบนคลุม De Morgan แตกออกเป็น $\overline{A}+\overline{B}+\overline{\overline{C}} = \overline{A}+\overline{B}+C$

เห็นไหมครับว่าขีดบนสลับที่กันครบทุกตัว — ตัวที่เคยมีขีดกลายเป็นไม่มี ตัวที่ไม่มีกลายเป็นมี และเครื่องหมายก็สลับจาก AND เป็น OR พร้อมกันด้วย

นี่คือคำตอบทั้งหมดของคำถามว่า “ทำไม POS ถึงกลับด้าน” — เพราะมันคือ minterm ที่โดน De Morgan เล่นงานหนึ่งครั้งครับ ไม่ใช่กฎใหม่เลย

ผลพลอยได้: น้องเลยข้ามขั้นที่ 1–3 ไปได้เลย ใช้กฎลัด “อ่านแถว 0 แล้วเขียนกลับค่า” ตรง ๆ เพราะรู้แล้วว่ามันมาจากไหน

step card — วิธีลัด 4 ขั้นสำหรับทำข้อสอบ

1

```
0 0 0 0
0 0 1 1
0 1 0 0
0 1 1 1
```

ขั้น 1 — ระบายแถวที่เอาต์พุตเป็น 0

กลับกับ SOP ครับ ตรงนี้คือจุดแรกที่กลับด้าน

เพราะ POS คือผลคูณ (AND) และ AND จะได้ 0 ทันทีถ้ามีก้อนไหนเป็น 0 — เราจึงต้องใส่ maxterm ไว้ “ดักแถวที่ต้องได้ 0” ครับ

2

0	1	0
A	$\overline{B}$	C

1 ใส่ขีด

ขั้น 2 — แปลงบิตแบบกลับค่า: 0 → ไม่ใส่ขีด · 1 → ใส่ขีด

ตรงนี้คือจุดที่สองที่กลับด้าน และคือจุดที่คนลืมบ่อยที่สุดครับ

เพราะเราต้องการให้ literal ทุกตัวเป็น **0** ที่แถวนี้ (OR ถึงจะได้ 0) — ตัวที่มีค่า 1 อยู่ ต้องใส่ขีดบนมันถึงจะกลายเป็น 0 ครับ

เทียบกับ SOP ที่ต้องการให้ทุก literal เป็น 1 — **เป้าหมายกลับกัน กฎเลยกลับกัน**

3	$(\bar{A}+B+C)\ (\bar{A}+B+\bar{C})$ วงเล็บชนกัน = คูณกัน ห้ามใส่เครื่องหมาย + ระหว่างวงเล็บ	**ขั้น 3 — เอาทุกวงเล็บมาคูณกัน (เขียนติดกัน)** **เพราะ** AND แปลว่า “ต้องผ่านทุกก้อน” ครับ — เราอยากให้เอาต์พุตเป็น 0 ทันทีที่ตกก้อนใดก้อนหนึ่ง ซึ่ง AND ทำให้พอดี **ห้ามลืมวงเล็บ** เด็ดขาด ถ้าไม่ใส่ ลำดับการทำจะเพี้ยนทันทีเพราะ AND ทำก่อน OR ครับ
4	Σm 3 ตัว ΠM 5 ตัว 3 + 5 = 8 ต้องครบ 2^n เสมอ	**ขั้น 4 — ตรวจว่าจำนวนวงเล็บ + จำนวนก้อน SOP = 2^n** **เพราะ**ทุกแถวต้องอยู่กองใดกองหนึ่งพอดี ไม่ทับกัน (หัวข้อ 4) ถ้ารวมกันแล้วไม่ครบ 8 (สำหรับ 3 ตัวแปร) แปลว่าอ่านตกแถวหนึ่งแน่นอนครับ **ตรวจซ้ำอีกชั้น:** ทุกวงเล็บต้องมีตัวอักษรครบ n ตัว และมีเครื่องหมาย $+$ คั่นทุกตัว

ตัวอย่างจากสไลด์ Example IV — 2 ตัวแปร

Example IV (สไลด์หน้า 16) EES271 · Lecture 04

> Write the following truth table as a POS Boolean expression.

ตารางเดียวกับ Example III ครับ (X = 0, 1, 0, 1) แต่คราวนี้ให้เขียนเป็น POS

A	B	X	maxterm
0	0	0	$M_0 = (A + B)$
0	1	1	—
1	0	0	$M_2 = (\overline{A} + B)$

เฉลย Example IV (2 ตัวแปร)

ขั้น 1 — ระบายแถวที่เป็น 0 ได้แถว **00** กับ **10** → เลขแถว 0 กับ 2

ขั้น 2 — แปลงแบบกลับค่า

แถว 00: $A = 0$ → **ไม่**ใส่ขีด · $B = 0$ → **ไม่**ใส่ขีด → $(A + B)$

แถว 10: $A = 1$ → **ใส่**ขีด · $B = 0$ → ไม่ใส่ → $(\overline{A} + B)$

ขั้น 3 — คูณกัน → $X = (A + B)(\overline{A} + B)$

ขั้น 4 — ตรวจ $\prod M$ มี 2 ตัว · $\sum m$ มี 2 ตัว · $2 + 2 = 4 = 2^2$ ✓

ตอบ:

$$\mathbf{X(A,B) = \prod M(0,2) = (A+B)(\overline{A}+B)}$$

“X(A,B) = ΠM(0,2) = (A+B)(A'+B).”

A	B	X	maxterm
1	1	1	—

ตรวจด้วยวิธีที่สอง: ที่แถว $AB = 01$ ได้ $(0 + 1)(1 + 1) = 1 \cdot 1 = 1$ ตรงกับตาราง ✓ และที่ $AB = 10$ ได้ $(1 + 0)(0 + 0) = 1 \cdot 0 = 0$ ตรง ✓

ตัวอย่างจากสไลด์ Example IV — 3 ตัวแปร

Example IV (สไลด์หน้า 18) EES271 · Lecture 04

> Write the following truth table as a POS Boolean expression.

ตารางเดียวกับ Example III 3 ตัวแปร (X = 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1) แต่ให้เขียนเป็น POS ครับ

A_2	A_1	A_0	X	maxterm
0	0	0	0	$M_0 = (A_2 + A_1 + A_0)$
0	0	1	1	—
0	1	0	1	—
0	1	1	0	$M_3 = (A_2 + \overline{A_1} + \overline{A_0})$
1	0	0	1	—
1	0	1	1	—
1	1	0	0	$M_6 = (\overline{A_2} + \overline{A_1} + A_0)$
1	1	1	1	—

เฉลย Example IV (3 ตัวแปร)

ขั้น 1 — ระบายแถวที่เป็น 0 ได้แถว **000, 011, 110** → เลขแถว **0, 3, 6**

ขั้น 2 — แปลงแบบกลับค่าทีละแถว

000: ทั้งสามเป็น 0 → ไม่ใส่ขีดเลย → $(A_2 + A_1 + A_0)$

011: A_2 เป็น 0 ไม่ใส่ · A_1 กับ A_0 เป็น 1 **ใส่ขีด** → $(A_2 + \overline{A_1} + \overline{A_0})$

110: A_2 กับ A_1 เป็น 1 **ใส่ขีด** · A_0 เป็น 0 ไม่ใส่ → $(\overline{A_2} + \overline{A_1} + A_0)$

ขั้น 3 — คูณทั้งสามวงเล็บ

ขั้น 4 — ตรวจ $\prod M$ 3 ตัว + $\sum m$ 5 ตัว = 8 ✓ · ทุกวงเล็บมี 3 ตัวอักษร ✓

ตอบ:

$$\mathbf{X = \prod M(0, 3, 6) = (A_2 + A_1 + A_0)(A_2 + \overline{A_1} + \overline{A_0})(\overline{A_2} + \overline{A_1} + A_0)}$$

"X(A2,A1,A0) = ΠM(0,3,6)."

I DO — พี่ทำให้ดู (โจทย์พี่แต่งเอง)

I DO

ตารางที่ SOP ยาว แต่ POS สั้น — เห็นข้อดีของ POS ชัด ๆ

A	B	C	X	maxterm
0	0	0	1	—
0	0	1	1	—
0	1	0	1	—
0	1	1	1	—
1	0	0	0	$M_4 = (\overline{A} + B + C)$
1	0	1	1	—
1	1	0	0	$M_6 = (\overline{A} + \overline{B} + C)$
1	1	1	1	—

พี่คิดยังไง

ขั้น 0 — มองภาพรวมก่อนลงมือ ตารางนี้มี 1 อยู่ 6 แถว มี 0 แค่ 2 แถวครับ
ถ้าเขียน SOP จะได้ 6 ก้อน = 18 ตัวอักษร · ถ้าเขียน POS จะได้ 2 วงเล็บ = 6 ตัวอักษร
เลือก POS ชัดเจน — นี่คือสิ่งที่สไลด์หมายถึงตอนบอกว่า SOP ยาว POS จะสั้น

ขั้น 1 — ระบายแถวที่เป็น 0 ได้แถว **100** กับ **110** → เลขแถว **4** กับ **6**

ขั้น 2 — แปลงแบบกลับค่า
100: $A = 1$ ใส่ขีด · $B = 0$ ไม่ใส่ · $C = 0$ ไม่ใส่ → $(\overline{A} + B + C)$
110: $A = 1$ ใส่ขีด · $B = 1$ ใส่ขีด · $C = 0$ ไม่ใส่ → $(\overline{A} + \overline{B} + C)$

ขั้น 3 — คูณกัน $X = (\overline{A} + B + C)(\overline{A} + \overline{B} + C)$

ขั้น 4 — ตรวจสองชั้น
· นับ: $\prod M$ 2 ตัว + $\sum m$ 6 ตัว = 8 ✓
· แทนค่าแถวที่ควรได้ 0: ที่ $ABC = 100$ → $(\overline{1} + 0 + 0)(\overline{1} + \overline{0} + 0) = (0 + 0 + 0)(0 + 1 + 0) = 0 \cdot 1 = 0$ ✓
· แทนค่าแถวที่ควรได้ 1: ที่ $ABC = 111$ → $(0 + 1 + 1)(0 + 0 + 1) = 1 \cdot 1 = 1$ ✓

ตอบ:

$$\mathbf{X = \prod M(4, 6) = (\overline{A} + B + C)(\overline{A} + \overline{B} + C)}$$

“X(A,B,C) = ΠM(4,6) = (A'+B+C)(A'+B'+C).”

WE DO — ทำด้วยกัน

WE DO
เติม 4 ช่อง แล้วดูเฉลยพร้อมเหตุผลของทุกช่อง

W6.1

> Write the POS Boolean expression for the truth table below, and verify it by substituting one row that should give 0 and one row that should give 1.

· แถวที่เอาต์พุตเป็น 0 คือแถวเลข .....

· maxterm ของแถว 001 คือ .....

· นิพจน์ POS เต็มคือ .....

· แทนค่า $ABC = 011$ แล้วได้ .....

A	B	C	X	maxterm
0	0	0	1	—
0	0	1	0	$M_1 = (A + B + \overline{C})$
0	1	0	1	—
0	1	1	0	$M_3 = (A + \overline{B} + \overline{C})$
1	0	0	1	—
1	0	1	1	—
1	1	0	1	—
1	1	1	1	—

เฉลย W6.1 — เติมทุกช่องพร้อมเหตุผล

ช่องที่ 1 — แถวที่เป็น 0 คือ 1 กับ 3
ทำไม: กวาดคอลัมน์เอาต์พุตหา**เลข 0** ครับ (ไม่ใช่เลข 1 — นี่คือ POS) เจอที่แถว 001 (=1) และแถว 011 (=3) ส่วนอีก 6 แถวเป็น 1 หมด

ช่องที่ 2 — maxterm ของแถว 001 คือ $(A + B + \overline{C})$
ทำไม: กฎของ POS คือกลับค่าครับ — $A = 0 \rightarrow$ ไม่ใส่ขีด · $B = 0 \rightarrow$ ไม่ใส่ขีด · $C = 1 \rightarrow$ **ใส่ขีด**
ระวัง: ถ้าเผลอใช้กฎ SOP จะได้ $\overline{A}\,\overline{B}C$ ซึ่งผิดทั้งเครื่องหมายและขีดบนครับ

ช่องที่ 3 — $X = (A + B + \overline{C})(A + \overline{B} + \overline{C})$
ทำไม: แถว 3 = 011 → $A = 0$ ไม่ใส่ · $B = 1$ ใส่ขีด · $C = 1$ ใส่ขีด → $(A + \overline{B} + \overline{C})$ แล้วเอามาคูณกับก้อนแรก
ตรวจจำนวน: $\prod M$ 2 ตัว + $\sum m$ 6 ตัว = 8 ✓

ช่องที่ 4 — แทน $ABC = 011$ **แล้วได้ 0**
ทำไม: ก้อนแรก $(0 + 1 + \overline{1}) = (0 + 1 + 0) = 1$ ผ่าน
ก้อนที่สอง $(0 + \overline{1} + \overline{1}) = (0 + 0 + 0) = \mathbf{0}$ ตก
AND ของ $1 \cdot 0 = \mathbf{0}$ — ตรงกับตารางที่แถวนี้เป็น 0 ✓

ลองแถวที่ควรได้ 1 ด้วย ที่ $ABC = 000$: $(0+0+1)(0+1+1) = 1 \cdot 1 = 1$ ✓

ตอบ: $\mathbf{X = \prod M(1,3) = (A + B + \overline{C})(A + \overline{B} + \overline{C})}$

"X(A,B,C) = ΠM(1,3) = (A+B+C')(A+B'+C')."

YOU DO — ตาน้อง

YOU DO

ข้อนี้ให้เขียนทั้งสองรูปแล้วเทียบกัน — ตรงกับ Assignment ข้อ 2 เป๊ะ

Y6.1

> For the truth table below, write the Boolean expression in **both** SOP and POS forms, then verify that both forms describe the same truth table by substituting the row $ABC = 110$.

ทำทั้งสองรูปแล้วแทนค่าตรวจครับ — นี่คือทักษะที่ Assignment 4 ข้อ 2 ต้องใช้

A	B	C	X	minterm	maxterm
0	0	0	0	—	$M_0 = (A + B + C)$
0	0	1	1	$m_1 = \overline{A}\overline{B}C$	—
0	1	0	1	$m_2 = \overline{A}B\overline{C}$	—
0	1	1	1	$m_3 = \overline{A}BC$	—
1	0	0	0	—	$M_4 = (\overline{A} + B + C)$
1	0	1	0	—	$M_5 = (\overline{A} + B + \overline{C})$
1	1	0	1	$m_6 = AB\overline{C}$	—
1	1	1	1	$m_7 = ABC$	—

เฉลย Y6.1

ขั้น 1 — แยกแถวเป็นสองกองก่อน เพราะ SOP กับ POS ใช้คนละกองครับ

· แถวที่เอาต์พุตเป็น **1**: 001 (=1), 010 (=2), 011 (=3), 110 (=6), 111 (=7) → **5 แถว**

· แถวที่เอาต์พุตเป็น **0**: 000 (=0), 100 (=4), 101 (=5) → **3 แถว**

· **ตรวจทันที:** $5 + 3 = 8$ ครบ ✓ (ถ้าไม่ครบต้องกลับไปกวาดใหม่)

ขั้น 2 — เขียน SOP จากกอง 1 ใช้กฎ **0 ใส่ขีด · 1 ไม่ใส่**

$m_1 = 001 \to \overline{A}\,\overline{B}C$ · $m_2 = 010 \to \overline{A}B\overline{C}$ · $m_3 = 011 \to \overline{A}BC$ · $m_6 = 110 \to AB\overline{C}$ · $m_7 =$

$111 \rightarrow ABC$

$X = \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + AB\overline{C} + ABC$

ขั้น 3 — เขียน POS จากกอง 0 ใช้กฎกลับค่า: **0 ไม่ใส่ขีด · 1 ใส่ขีด**

$M_0 = 000 \rightarrow (A + B + C) \cdot M_4 = 100 \rightarrow (\overline{A} + B + C) \cdot M_5 = 101 \rightarrow (\overline{A} + B + \overline{C})$

$X = (A + B + C)(\overline{A} + B + C)(\overline{A} + B + \overline{C})$

ขั้น 4 — แทนค่า $ABC = 110$ ในทั้งสองรูป (ตารางบอกว่าแถวนี้ต้องได้ **1**)

ในรูป SOP: ก้อนที่ 4 คือ $AB\overline{C} = 1 \cdot 1 \cdot \overline{0} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ → OR มีสมาชิกเป็น 1 → ได้ **1** ✓

ในรูป POS: $(1 + 1 + 0) = 1 \cdot (\overline{1} + 1 + 0) = (0 + 1 + 0) = 1 \cdot (\overline{1} + 1 + \overline{0}) = (0 + 1 + 1) = 1$ → AND ของ $1 \cdot 1 \cdot 1 = \mathbf{1}$ ✓

ทั้งสองรูปให้ 1 เหมือนกัน — ตรงกับตาราง

ตอบ:

SOP: $\mathbf{X = \sum m(1, 2, 3, 6, 7) = \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + AB\overline{C} + ABC}$

POS: $\mathbf{X = \prod M(0, 4, 5) = (A + B + C)(\overline{A} + B + C)(\overline{A} + B + \overline{C})}$

"X(A,B,C) = Σm(1,2,3,6,7) = ΠM(0,4,5); both forms give the same truth table."

★ กับดักของ POS — 4 อย่างที่ทำให้เสียคะแนน

① **กลับแค่อย่างเดียว** — จำได้ว่าต้องอ่านแถวที่เป็น 0 แต่ลืมกลับตัวอักษร
คำตอบผิดที่จะได้: แถว 100 จะเขียนเป็น $(A + \overline{B} + \overline{C})$ ซึ่งที่จริงคือ maxterm ของแถว **011** — **ผิดแถวไปเลย**
วิธีกัน: ท่องประโยคเดียวว่า **"POS กลับสองอย่าง: กลับแถว และกลับขีด"**

② **ใช้เครื่องหมายผิดชั้น** — เขียนเป็น $(A \cdot B \cdot C) + (\dots)$
POS ต้อง**บวกข้างในวงเล็บ คูณระหว่างวงเล็บ** ครับ ถ้าสลับกันจะกลายเป็น SOP ที่ผิด

③ **ลืมวงเล็บ** — เขียน $A + B + C \cdot \overline{A} + B + C$ ซึ่งอ่านได้เป็น $A + B + (C\overline{A}) + B + C$ คนละเรื่องเลยครับ เพราะ AND ทำก่อน OR

④ **เขียน $\prod M$ ด้วยเลขของแถวที่เป็น 1** — เลขใน $\prod M$ ต้องเป็น**เลขแถวที่เอาต์พุตเป็น 0** เสมอครับ
วิธีกันที่ง่ายที่สุด: เขียน $\sum m$ ก่อนเสมอ แล้วค่อยเอาเลขที่เหลือมาใส่ $\prod M$ — จะไม่มีทางสลับกัน

ศัพท์สอบของหัวข้อนี้

English	แปลว่า	ข้อสอบเขียนมาแบบนี้
product of sums (POS)	ผลคูณของผลบวก	**Write the truth table as a POS Boolean expression.**
complement of the output $\overline{X}$	ค่ากลับของเอาต์พุต	**Begin by constructing a new column for the complement of the output.**

English	แปลว่า	ข้อสอบเขียนมาแบบนี้
involution law	กฎขีดสองชั้นหักล้าง $\overline{\overline{A}} = A$	**Use the involution and De Morgan's laws.**
duality principle	หลักคู่กัน — SOP ของค่ากลับคือ POS ของตัวจริง	**...if a function is in the SOP form, then its complement is in the POS form.**
vice versa	และในทางกลับกัน	**If SOP is long, then POS will be short and vice versa.**

หัวใจของทิศ (2) — ประโยคเดียวที่ต้องท่อง

POS กลับสองอย่างพร้อมกัน: ① อ่านจากแถวที่ได้ 0 ② บิต 1 ใส่ขีด บิต 0 ไม่ใส่ — และที่มันกลับก็เพราะมันคือ minterm ที่โดน De Morgan เล่นงานหนึ่งครั้งครับ

7 ทิศที่ (3) และ (4) — นิพจน์ → ตารางค่าความจริง

ตะขอเกี่ยว

สองหัวข้อที่แล้วเราเดิน**ออกจาก**ตารางครับ
สมมติว่าถ้าโจทย์ให้นิพจน์มาแล้วสั่งว่า **"Construct the truth table"** ละครับ — เดินย้อนกลับยังไง
บางคนจะรีบแทนค่าทีละแถวทั้ง 8 แถว ซึ่งช้าและพลาดง่ายมาก
พี่จะสอนวิธีที่**เร็วกว่าและตรวจง่ายกว่า** คือ **ไล่ทีละพจน์ ไม่ใช่ไล่ทีละแถว** ครับ — วิธีนี้เป็นวิธีเดียวกับที่ Assignment 4 ข้อ 3 ต้องใช้

(3) นิพจน์ SOP → ตารางค่าความจริง (สไลด์หน้า 20)

Boolean Expression to Truth Table — 3 กฎจากสไลด์

(1) Each minterm corresponds to exactly one row in the truth table where the output is 1.

(2) Any non-standard product term will produce more than one row in the truth table where the output is 1.

(3) All other rows will be zero.

ภาษาพี่: ① ถ้าพจน์นั้นมีตัวแปรครบ (เป็น minterm) มันจุด 1 ให้แถวเดียว ② ถ้าตัวแปรขาดไป มันจุด 1 ให้**หลายแถว** ③ แถวที่ไม่ถูกจุดเลย เป็น 0 หมด

ที่มาของกฎข้อ (2) — ทำไมพจน์ที่ขาดตัวแปรถึงติดหลายแถว: ตัวแปรที่หายไปแปลว่า **"ค่ามันเป็นอะไรก็ได้"** ครับ ถ้าหายไป 1 ตัว → มี 2 ทางเลือก → ติด 2 แถว · หายไป 2 ตัว → $2^2 = 4$ แถว

สูตรนับ: พจน์ที่มีตัวแปร k ตัว ในระบบ n ตัวแปร จะติด 2^{n-k} แถวครับ

สไลด์ยกตัวอย่าง $X = \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}C + AB$ ไว้ และเน้นว่า **"the last term is a non-standard product term where A and B must be equal to 1. However, the third variable C is unspecified and therefore can be either 0 or 1. Thus, it corresponds to both minterms $m_6 = AB\overline{C}$ and $m_7 = ABC$."**
พี่ทำเป็นตารางที่มี**คอลัมน์ย่อยของแต่ละพจน์** จะเห็นชัดมากครับว่าพจน์ไหนจุดแถวไหนบ้าง

A	B	C	$\overline{A}B\overline{C}$	$A\overline{B}C$	AB	X
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	1	1

อ่านตารางนี้ยังไง — นี่คือหัวใจของวิธี “ไล่ทีละพจน์”

สามคอลัมน์กลางคือ**ค่าของแต่ละพจน์แยกกัน** ครับ ดูทีละคอลัมน์:

· **คอลัมน์** $\overline{A}B\overline{C}$ — เป็น minterm (ครบ 3 ตัว) → มี 1 **แถวเดียว** คือแถว 010 (m_2)

· **คอลัมน์** $A\overline{B}C$ — เป็น minterm เหมือนกัน → มี 1 แถวเดียว คือแถว 101 (m_5)

· **คอลัมน์** AB — **ไม่ใช่ minterm** เพราะขาด C → มี 1 **สองแถว** คือ 110 และ 111 (m_6 กับ m_7) ตรงกับที่สไลด์อธิบายเป๊ะ

· **คอลัมน์** X — เอาสามคอลัมน์มา OR กัน: แถวไหนมี 1 อยู่สักคอลัมน์ ก็เป็น 1

สรุป: $X = \sum m(2,5,6,7)$ — เลข 1 มี 4 ตัว ตรงกับ $1+1+2=4$ ที่นับจากพจน์ ✓

step card — วิธี “ไล่ทีละพจน์” 5 ขั้น

1

ABC	พจน์	X
000		
001		
010		

ขั้น 1 — วาดตาราง 2^n แถวให้ครบก่อน

เขียนคอลัมน์อินพุตให้ครบทุกแถวเรียงแบบนับเลขฐานสองครับ (000, 001, 010, ...)

เพราะถ้าเขียนแถวไปคิดไป จะเผลอข้ามแถวได้ง่ายมาก

เทคนิคเขียนไม่พลาด: คอลัมน์ขวาสุดสลับทุกแถว · คอลัมน์กลางสลับทุก 2 แถว · คอลัมน์ซ้ายสลับทุก 4 แถว

2



คอลัมน์ย่อยพจน์ละคอลัมน์

ขั้น 2 — เพิ่มคอลัมน์ย่อยให้แต่ละพจน์

เพราะเราจะได้คิดทีละอย่างครับ ไม่ต้องคิดทั้งสูตรพร้อมกัน

ตรงนี้คือความต่างระหว่างคนที่ทำถูกกับคนที่ทำผิด — **คนที่ผิดคือคนที่พยายามคิดทั้งสูตรในหัวทีเดียว**

โจทย์ Assignment ข้อ 3 มี 2–3 พจน์ ก็เพิ่ม 2–3 คอลัมน์ครับ

3

$\overline{A}\,B$

A=1, B=0 · C อะไรก็ได้

100 101

ขั้น 3 — เติมแต่ละคอลัมน์ย่อยด้วยวิธี “จุดแถว” ไม่ใช่แทนค่า

อย่าแทนค่าทีละแถวครับ ให้**อ่านว่าพจน์นี้บังคับตัวแปรไหนเป็นเท่าไร** แล้วไปจุด 1 ที่แถวนั้นเลย

เช่น $A\overline{B}$ บังคับ $A=1, B=0$ ส่วน C ไม่ได้พูดถึง → เป็นได้ทั้ง 0 และ 1 → จุด 1 ที่แถว **100** และ **101**

เพราะวิธีนี้แตะแค่แถวที่เกี่ยว ส่วนแถวที่เหลือเป็น 0 อยู่แล้ว เร็วกว่าแทนค่า 8 รอบมากครับ

4

0 1 0 → **1**

OR ตามแนวนอน

มี 1 สักตัวก็ได้ 1

ขั้น 4 — OR คอลัมน์ย่อยตามแนวนอนเป็นคอลัมน์ X

เพราะนิพจน์ SOP คือการเอาพจน์มา OR กันครับ — แถวไหนมี 1 อยู่ในคอลัมน์ย่อยแม้แต่คอลัมน์เดียว เอาต์พุตเป็น 1

แถวที่ทุกคอลัมน์ย่อยเป็น 0 → เอาต์พุตเป็น 0 (นี่คือกฎข้อ (3) ของสไลด์)

5

พจน์มีตัวแปร k ตัว

ติด 2^{n-k} แถว

เอาไว้ตรวจว่าจุดครบไหม

ขั้น 5 — ตรวจด้วยการนับจำนวน 1 ของแต่ละพจน์

ก่อนจะ OR ให้เช็คคอลัมน์ย่อยทีละอันครับว่าจำนวน 1 ถูกไหม

พจน์ที่มีตัวแปรครบ 3 ตัว → ต้องมี 1 **หนึ่งตัว** · ขาดไป 1 ตัว → **สองตัว** · ขาดไป 2 ตัว → **สี่ตัว**

เพราะถ้าคอลัมน์ย่อยผิดตั้งแต่แรก คอลัมน์ X ก็ผิดตามแน่นอน — ตรวจตรงนี้คุ้มที่สุดครับ

ตัวอย่างจากสไลด์ Example V — 2 ตัวแปร

Example V (สไลด์หน้า 22) EES271 · Lecture 04

> Construct the truth table that is described by the following SOP Boolean expression: $X = \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}B + A\overline{B}$

สามพจน์ ทุกพจน์มีตัวแปรครบ 2 ตัว → เป็น minterm ทั้งหมด → จุดแถวละหนึ่งครับ

A	B	$\overline{A}\,\overline{B}$	$\overline{A}B$	$A\overline{B}$	X
0	0	1	0	0	**1**

เฉลย Example V (2 ตัวแปร)

ขั้น 1 — ดูก่อนว่าพจน์ไหนเป็น minterm

ทั้งสามพจน์มี 2 ตัวอักษรครบ → เป็น minterm หมด → แต่ละอันจุดแถวเดียว

ขั้น 2 — จุดทีละพจน์

$\overline{A}\,\overline{B}$: บังคับ $A=0, B=0$ → จุดแถว **00** (m_0)

A	B	$\overline{A}B$	$\overline{A}B$	$A\overline{B}$	X
0	1	0	1	0	**1**
1	0	0	0	1	**1**
1	1	0	0	0	**0**

$\overline{A}B$: บังคับ $A=0, B=1$ → จุดแถว **01** (m_1)
$A\overline{B}$: บังคับ $A=1, B=0$ → จุดแถว **10** (m_2)

ขั้น 3 — OR ตามแนวนอน → แถว 00, 01, 10 เป็น 1 · แถว 11 ไม่ถูกจุดเลย เป็น 0

ขั้น 4 — ตรวจ 3 พจน์ที่เป็น minterm → 1 อยู่ 3 ตัว ✓ (ไม่ซ้ำแถวกันด้วย)

ตอบ: คอลัมน์ X จากบนลงล่างคือ $\mathbf{1, 1, 1, 0}$ ·

$$\mathbf{X = \sum m(0,1,2) = \prod M(3)}$$

"X(A,B) = Σm(0,1,2); the output is 0 only when A = B = 1."

เกร็ด: นิพจน์นี้คือ NAND พอดีครับ ($X = \overline{AB}$) — ตาราง 1110 ตรงกับ EP05 เป๊ะ

ตัวอย่างจากสไลด์ Example V — 3 ตัวแปร (มีพจน์ที่ไม่ครบตัวแปร)

Example V (สไลด์หน้า 24) EES271 · Lecture 04

> Construct the truth table that is described by the following SOP Boolean expression: $X = A\overline{B} + B\overline{C} + A\overline{B}C + ABC$

คราวนี้มี 4 พจน์ และสองพจน์แรก**ขาดตัวแปรไปตัวหนึ่ง** → จะจุดสองแถวครับ

A	B	C	$A\overline{B}$	$B\overline{C}$	$A\overline{B}C$	ABC	X
0	0	0	0	0	0	0	**0**
0	0	1	0	0	0	0	**0**
0	1	0	0	1	0	0	**1**
0	1	1	0	0	0	0	**0**
1	0	0	1	0	0	0	**1**
1	0	1	1	0	1	0	**1**
1	1	0	0	1	0	0	**1**

A	B	C	$A\overline{B}$	$B\overline{C}$	$A\overline{B}C$	ABC	X
1	1	1	0	0	0	1	**1**

เฉลย Example V (3 ตัวแปร) — ไล่ทีละพจน์

ขั้น 1 — จำแนกพจน์ก่อน ($n = 3$)

· $A\overline{B}$ มี 2 ตัว ขาด C → ติด $2^{3-2} = \mathbf{2}$ แถว

· $B\overline{C}$ มี 2 ตัว ขาด A → ติด **2** แถว

· $A\overline{B}C$ มี 3 ตัวครบ → เป็น minterm → ติด **1** แถว

· ABC มี 3 ตัวครบ → เป็น minterm → ติด **1** แถว

ขั้น 2 — จุดทีละพจน์

· $A\overline{B}$: $A = 1, B = 0, C$ อะไรก็ได้ → แถว **100** และ **101** (คือ 4, 5)

· $B\overline{C}$: $B = 1, C = 0, A$ อะไรก็ได้ → แถว **010** และ **110** (คือ 2, 6)

· $A\overline{B}C$: $A = 1, B = 0, C = 1$ → แถว **101** (คือ 5)

· ABC: ทุกตัวเป็น 1 → แถว **111** (คือ 7)

ขั้น 3 — OR ตามแนวนอน รวมแถวที่ถูกจุด: 2, 4, 5, 6, 7

สังเกต: แถว 5 ถูกจุดสองครั้ง (จาก $A\overline{B}$ และ $A\overline{B}C$) — ไม่เป็นไรครับ OR ของ $1 + 1$ ยังเป็น 1 (กฎ idempotent จาก EP06)

นี่แปลว่าพจน์ $A\overline{B}C$ เป็นพจน์ที่**ไม่ได้เพิ่มอะไรเลย** เพราะถูก $A\overline{B}$ คลุมอยู่แล้ว (absorption จาก EP06 ครับ)

ขั้น 4 — แถวที่เหลือเป็น 0 คือแถว 0, 1, 3

ตอบ: คอลัมน์ X จากบนลงล่างคือ $\mathbf{0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1}$

$\mathbf{X = \sum m(2, 4, 5, 6, 7) = \prod M(0, 1, 3)}$

ตรวจ: $5 + 3 = 8$ ✓

"X(A,B,C) = Σm(2,4,5,6,7) = ΠM(0,1,3)."

(4) นิพจน์ POS → ตารางค่าความจริง (สไลด์หน้า 26)

วิธีของสไลด์ — 3 ขั้นเพิ่มเติม

(1) Obtain the complement of the expression in SOP form (use the involution and De Morgan's laws).

(2) Obtain the truth table of the complement of the output variable.

(3) Invert all values in the truth table of the complement to obtain the actual output.

ภาษาพี่: ① พลิกนิพจน์ POS ให้กลายเป็น SOP ของ $\overline{X}$ ก่อน ② สร้างตารางของ $\overline{X}$ ด้วยวิธีทิศ (3) ที่เพิ่งเรียน ③ พลิกทุกค่ากลับได้ X

ที่มา: เป็นเทคนิคเดียวกับหัวข้อ 6 แค่เดินย้อนทางครับ — เราถนัด SOP มากกว่า POS ก็เลยแปลงให้เป็น SOP ก่อนแล้วค่อยทำ

★ ทางลัดที่พี่แนะนำมากกว่า — ไล่ทีละวงเล็บตรง ๆ

วิธีของสไลด์ถูกต้อง แต่ยาวครับ พี่ขอเสนอวิธีลัดที่ให้ผลเหมือนกันและตรวจง่ายกว่า:

ทำคอลัมน์ย่อยให้แต่ละวงเล็บ แล้ว AND ตามแนวนอน

เติมคอลัมน์ย่อยยังไง: วงเล็บหนึ่งวงเป็น OR — มันเป็น **0 เฉพาะแถวที่ทุกตัวข้างในเป็น 0** ที่เหลือเป็น 1 หมด เพราะฉะนั้น**จุดแค่ 0 ไม่กี่ตัว แล้วเติม 1 ที่เหลือ** เร็วมากครับ

แล้ว AND แนวนอน: แถวไหนมี 0 อยู่สักคอลัมน์ → เอาต์พุตเป็น 0 ทันที

สูตรนับ: วงเล็บที่มี k ตัวแปร จะให้ 0 ทั้งหมด 2^{n-k} แถว (สูตรเดียวกับ SOP แค่นับ 0 แทน 1)

ตัวอย่างจากสไลด์ Example VI — POS → ตาราง

Example VI (สไลด์หน้า 27) EES271 · Lecture 04

> Construct the truth table that is described by the following POS Boolean expression: $X = (A_2 + \overline{A_1} + A_0)(\overline{A_2} + \overline{A_0})$

สังเกตว่าวงเล็บที่สองมีแค่ 2 ตัวแปร (ขาด A_1) → เป็น non-standard sum term → จะให้ 0 มากกว่าหนึ่งแถวครับ

วิธีลัด — ไล่ทีละวงเล็บ

A_2	A_1	A_0	$A_2 + \overline{A_1} + A_0$	$\overline{A_2} + \overline{A_0}$	X
0	0	0	1	1	**1**
0	0	1	1	1	**1**
0	1	0	0	1	**0**
0	1	1	1	1	**1**
1	0	0	1	1	**1**
1	0	1	1	0	**0**
1	1	0	1	1	**1**
1	1	1	1	0	**0**

เฉลย Example VI (วิธีลัด)

ขั้น 1 — จำแนกวงเล็บก่อน ($n = 3$)

· $(A_2 + \overline{A_1} + A_0)$ มี 3 ตัวครบ → เป็น maxterm → ให้ 0 **แถวเดียว**

· $(\overline{A_2} + \overline{A_0})$ มี 2 ตัว ขาด A_1 → ให้ 0 ทั้งหมด $2^{3-2} = \mathbf{2}$ แถว

ขั้น 2 — หาแถวที่แต่ละวงเล็บให้ 0 (วงเล็บเป็น 0 เมื่อทุกตัวข้างในเป็น 0)

· วงเล็บแรก: ต้อง $A_2 = 0$ และ $\overline{A_1} = 0$ (คือ $A_1 = 1$) และ $A_0 = 0$ → แถว **010** (แถวที่ 2) แถวเดียว

· วงเล็บสอง: ต้อง $\overline{A_2} = 0$ (คือ $A_2 = 1$) และ $\overline{A_0} = 0$ (คือ $A_0 = 1$) ส่วน A_1 อะไรก็ได้ → แถว **101** และ **111** (แถวที่ 5 และ 7)

ขั้น 3 — เติม 1 ในช่องที่เหลือของทั้งสองคอลัมน์ เพราะ OR เป็น 1 ในทุกแถวที่ไม่ใช่แถวศูนย์ครับ

ขั้น 4 — AND ตามแนวนอน แถวไหนมี 0 สักคอลัมน์ → $X = 0$
รวมแถวที่เป็น 0 คือ **2, 5, 7** ส่วนแถวที่เหลือเป็น 1

ตอบ: คอลัมน์ X จากบนลงล่างคือ $\mathbf{1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0}$
$\mathbf{X = \prod M(2,5,7) = \sum m(0,1,3,4,6)}$
ตรวจ: $3 + 5 = 8$ ✓ · จำนวน 0 = $1 + 2 = 3$ ตรงกับที่นับจากวงเล็บ ✓
"X(A2,A1,A0) = ΠM(2,5,7) = Σm(0,1,3,4,6)."

ตรวจด้วยวิธีของสไลด์ — พลิกเป็น SOP ของ $\overline{X}$ ก่อน

พี่ทำวิธีของสไลด์ให้ดูด้วย จะได้เห็นว่าสองวิธีให้ผลเหมือนกันเป๊ะครับ

$$\overline{X} = \overline{(A_2 + \overline{A_1} + A_0)(\overline{A_2} + \overline{A_0})}$$

① ใส่ขีดคลุมทั้งนิพจน์

$$\overline{X} = \overline{(A_2 + \overline{A_1} + A_0)} + \overline{(\overline{A_2} + \overline{A_0})}$$

② De Morgan ข้อแรก — ขีดคลุม AND แตกเป็น OR ของขีดสั้น

$$\overline{X} = \overline{A_2}\, A_1\, \overline{A_0} \;+\; A_2 A_0$$

③ De Morgan ข้อสองในแต่ละก้อน แล้ว involution ล้างขีดซ้อน — ได้ SOP ของ $\overline{X}$

A_2	A_1	A_0	$\overline{A_2}A_1\overline{A_0}$	A_2A_0	$\overline{X}$
0	0	0	0	0	**0**
0	0	1	0	0	**0**
0	1	0	1	0	**1**
0	1	1	0	0	**0**
1	0	0	0	0	**0**
1	0	1	0	1	**1**
1	1	0	0	0	**0**
1	1	1	0	1	**1**

เทียบสองวิธี

ตารางของ $\overline{X}$ ข้างบนได้ $\overline{X} = \sum m(2,5,7)$ ครับ
ขั้นสุดท้ายของสไลด์คือ **“invert all values”** — พลิกทุกค่า จะได้ X เป็น 1 ที่แถว 0, 1, 3, 4, 6 และเป็น 0 ที่แถว 2, 5, 7
ตรงกับวิธีลัดข้างบนทุกแถวเป๊ะครับ ✓
สรุปเลือกวิธี: ในห้องสอบพี่แนะนำวิธีลัด (ไล่ทีละวงเล็บ) เพราะสั้นกว่าและไม่ต้องแตะ De Morgan แต่ถ้าอาจารย์สั่งให้แสดงวิธีตามสไลด์ ก็เขียนตามสามบรรทัดข้างบนได้เลยครับ

I DO — พี่ทำให้ดู (โจทย์พี่แต่งเอง)

I DO
SOP ที่ทุกพจน์ขาดตัวแปร → จุดพจน์ละ 2 แถว

I7.1

> Construct the truth table described by $X = \overline{A}B + AC$.

สองพจน์ พจน์ละ 2 ตัวแปร ในระบบ 3 ตัวแปร → จุดพจน์ละ $2^{3-2} = 2$ แถวครับ

A	B	C	$\overline{A}B$	AC	X
0	0	0	0	0	**0**
0	0	1	0	0	**0**
0	1	0	1	0	**1**
0	1	1	1	0	**1**
1	0	0	0	0	**0**
1	0	1	0	1	**1**
1	1	0	0	0	**0**
1	1	1	0	1	**1**

พี่คิดยังไง

ขั้น 1 — จำแนก ทั้งสองพจน์มี 2 ตัวแปร ขาดไปพจน์ละ 1 ตัว → จุดพจน์ละ 2 แถว รวมสูงสุด 4 แถว (ถ้าไม่ซ้ำกัน)

ขั้น 2 — จุดทีละพจน์

· $\overline{A}B$ บังคับ $A=0, B=1$ · C อะไรก็ได้ → แถว **010** และ **011** (2, 3)

· AC บังคับ $A=1, C=1$ · B อะไรก็ได้ → แถว **101** และ **111** (5, 7)

ขั้น 3 — OR ตามแนวนอน แถวที่เป็น 1 คือ 2, 3, 5, 7 · ที่เหลือ (0, 1, 4, 6) เป็น 0

ขั้น 4 — ตรวจสองชั้น

· นับ: $2+2=4$ และไม่มีแถวซ้ำ → คอลัมน์ X ต้องมี 1 อยู่ 4 ตัว ✓

· แทนค่าสุ่มหนึ่งแถว: ที่ $ABC=110$ → $\overline{A}B=0\cdot 1=0$ · $AC=1\cdot 0=0$ → OR ได้ 0 ✓ ตรงกับตาราง

ตอบ: คอลัมน์ X = $\mathbf{0,0,1,1,0,1,0,1}$ · $\mathbf{X=\sum m(2,3,5,7)=\prod M(0,1,4,6)}$

"X(A,B,C) = Σm(2,3,5,7)."

WE DO — ทำด้วยกัน

WE DO

เติม 4 ช่อง แล้วดูเฉลยพร้อมเหตุผลของทุกช่อง

W7.1

> Construct the truth table described by $X=A\overline{C}+\overline{A}BC$, and express the result in $\sum m$ notation.

· พจน์ $A\overline{C}$ ติดกี่แถว .....

· พจน์ $A\overline{C}$ ติดแถวไหนบ้าง .....

· พจน์ $\overline{A}BC$ ติดแถวไหน .....

· ผลรวม $X=\sum m($ ..... $)$

A	B	C	$A\overline{C}$	$\overline{A}BC$	X
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0

เฉลย W7.1 — เติมทุกช่องพร้อมเหตุผล

ช่องที่ 1 — $A\overline{C}$ ติด 2 แถว

ทำไม: พจน์นี้มีตัวแปร 2 ตัว (A กับ C) ในระบบ 3 ตัวแปร ขาด B ไปหนึ่งตัว → $2^{3-2} = 2$ แถวครับ

ช่องที่ 2 — ติดแถว 100 และ 110 (คือ 4 กับ 6)

ทำไม: $A\overline{C}$ บังคับ $A = 1$ และ $\overline{C} = 1$ (คือ $C = 0$) ส่วน B ไม่ได้พูดถึงเลย จึงเป็นได้ทั้ง 0 และ 1

→ $ABC = 1\,\underline{0}\,0$ และ $1\,\underline{1}\,0$ ครับ

ช่องที่ 3 — $\overline{A}BC$ ติดแถว 011 (คือ 3)

ทำไม: พจน์นี้มีตัวแปรครบ 3 ตัว → เป็น minterm → ติดแถวเดียว

บังคับ $A = 0, B = 1, C = 1$ → แถว 011 พอดี

ช่องที่ 4 — $X = \sum m(3, 4, 6)$

ทำไม: OR ทุกคอลัมน์ย่อยตามแนวนอน — แถวที่ถูกจุดคือ 3, 4, 6 ครับ

ตรวจ: จำนวน 1 ทั้งหมด $= 2 + 1 = 3$ ตัว และไม่ซ้ำแถวกัน ✓

เขียนอีกรูปได้ $\prod M(0, 1, 2, 5, 7) \cdot 3 + 5 = 8$ ✓

ตอบ: คอลัมน์ X = $\mathbf{0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0 \cdot X = \sum m(3, 4, 6)}$

"X(A,B,C) = Σm(3,4,6) = ΠM(0,1,2,5,7)."

YOU DO — ตาน้อง

YOU DO

คราวนี้เป็น POS — ลองใช้วิธีลัดไล่ทีละวงเล็บดูครับ

Y7.1

> Construct the truth table described by the POS expression $X = (A + \overline{B})(B + C)$, then express the result in both $\prod M$ and $\sum m$ notation.

ทั้งสองวงเล็บมีแค่ 2 ตัวแปร → แต่ละวงเล็บจะให้ 0 หลายแถวครับ

A	B	C	$A + \overline{B}$	$B + C$	X
0	0	0	1	0	**0**
0	0	1	1	1	**1**
0	1	0	0	1	**0**
0	1	1	0	1	**0**
1	0	0	1	0	**0**
1	0	1	1	1	**1**
1	1	0	1	1	**1**
1	1	1	1	1	**1**

เฉลย Y7.1

ขั้น 1 — จำแนกวงเล็บ เพราะต้องรู้ก่อนว่าแต่ละวงเล็บจะให้ 0 กี่แถว

· $(A + \overline{B})$ มี 2 ตัวแปร ขาด C → ให้ 0 ทั้งหมด $2^{3-2} = 2$ แถว

· $(B + C)$ มี 2 ตัวแปร ขาด A → ให้ 0 ทั้งหมด 2 แถว

ขั้น 2 — หาแถวที่แต่ละวงเล็บเป็น 0 (OR เป็น 0 เมื่อทุกตัวข้างในเป็น 0)

· $(A + \overline{B}) = 0$ ต้องมี $A = 0$ และ $\overline{B} = 0$ (คือ $B = 1$) · C อะไรก็ได้

→ แถว **010** และ **011** (2, 3)

· $(B + C) = 0$ ต้องมี $B = 0$ และ $C = 0$ · A อะไรก็ได้

→ แถว **000** และ **100** (0, 4)

ขั้น 3 — เติม 1 ในแถวที่เหลือของทั้งสองคอลัมน์ แล้ว **AND ตามแนวนอน**

แถวไหนมี 0 อยู่สักคอลัมน์ เอาต์พุตเป็น 0 ทันที (นี่คือกฎของ AND จาก EP05)

รวมแถวที่เป็น 0 คือ **0, 2, 3, 4** — ส่วนแถว 1, 5, 6, 7 ทั้งสองคอลัมน์เป็น 1 หมด จึงได้ 1

ขั้น 4 — ตรวจสามชั้น

· นับ 0: จากวงเล็บได้ $2 + 2 = 4$ แถว และไม่ซ้ำกัน → คอลัมน์ X ต้องมี 0 อยู่ 4 ตัว ✓

· $\prod M$ 4 ตัว + $\sum m$ 4 ตัว = 8 ✓

· แทนค่าตรวจแถวที่ควรได้ 1: ที่ $ABC = 001$ → $(0 + \overline{0})(0 + 1) = (0 + 1)(1) = 1 \cdot 1 = 1$ ✓

· แทนค่าตรวจแถวที่ควรได้ 0: ที่ $ABC = 011$ → $(0 + \overline{1})(1 + 1) = (0 + 0)(1) = 0 \cdot 1 = 0$ ✓

ตอบ: คอลัมน์ X = $\mathbf{0,1,0,0,0,1,1,1}$

$$\mathbf{X = \prod M(0,2,3,4) = \sum m(1,5,6,7)}$$

"X(A,B,C) = ΠM(0,2,3,4) = Σm(1,5,6,7)."

กับดักของทิศ (3) และ (4)

① ลืมว่าพจน์ที่ขาดตัวแปรติดหลายแถว — เห็น AB แล้วจุดแค่แถว 110
คำตอบผิดที่จะได้: แถว 111 จะกลายเป็น 0 ทั้งที่ควรเป็น 1 — ผิด 1 แถวเต็ม ๆ
วิธีกัน: นับตัวอักษรในพจน์ก่อนเสมอ ถ้าน้อยกว่าจำนวนตัวแปร ให้คิด 2^{n-k} ทันที

② เอาวิธีของ SOP ไปใช้กับ POS — เห็น $(A+\overline{B})$ แล้วไปจุด **1** ที่แถว 100/101
ผิดครับ วงเล็บของ POS ต้องหา**แถวที่เป็น 0** ไม่ใช่ 1 และเงื่อนไขคือ**ทุกตัวข้างในต้องเป็น 0**
วิธีกัน: ดูเครื่องหมายข้างในวงเล็บ ถ้าเห็น $+$ แปลว่าเป็น OR → ต้องหาแถวที่ได้ 0

③ OR/AND ผิดชั้นตอนรวมคอลัมน์ — SOP รวมคอลัมน์ย่อยด้วย **OR** · POS รวมด้วย **AND**
วิธีกัน: ดูเครื่องหมายที่คั่นระหว่างก้อนในนิพจน์ต้นฉบับ — คั่นด้วย $+$ ก็ OR · วงเล็บชนกันก็ AND ครับ

④ เขียนแถวไม่ครบ 2^n — โจทย์ 4 ตัวแปรต้องมี 16 แถว
Assignment 4 ข้อ 3(b) เป็น 4 ตัวแปรพอดี ระวังตรงนี้ครับ ถ้าเขียน 8 แถวคือหายไปครึ่งหนึ่ง

หัวใจของทิศ (3) และ (4)

ทำคอลัมน์ย่อยให้แต่ละพจน์ก่อนเสมอ ห้ามกระโดดไปคำตอบ · SOP จุด 1 แล้ว OR แนวนอน · POS จุด 0 แล้ว AND แนวนอน · พจน์ที่มีตัวแปร k ตัวจะแตะ 2^{n-k} แถว

8 เฉลย Assignment 4 ข้อ 1 (a–c)

อ่านตรงนี้ก่อน

สี่หัวข้อสุดท้ายของ EP นี้คือ**เฉลย Assignment #4 ข้อ 1, 2 และ 3** ครับ รวม **10 ข้อย่อย** — พี่ทำครบ 6 ชั้นทุกข้อย่อย ไม่มีการเขียนว่า “ข้อ (b) ทำเหมือน (a)”

6 ชั้นคือ ① โจทย์ต้นฉบับ + สิ่งที่โจทย์ซ่อนไว้ ② เตรียมก่อนลงมือ ③ ไล่ทีละขั้นพร้อมภาพ ④ คำตอบสุดท้าย ⑤ ตรวจด้วยวิธีที่สอง ⑥ กับดักของข้อนั้น

ตารางในโจทย์เป็นรูปภาพล้วน พี่ซูมอ่านที่ 300 dpi ทีละแถวแล้วพิมพ์ใหม่ครับ และตรวจซ้ำทุกตัวด้วย `tools/dig.py` ก่อนเขียนลงชีท

อยากให้น้องลองทำเองก่อนแล้วค่อยเปิดเทียบนะครับ — Assignment เป็นคะแนน 25% ของวิชา

โจทย์ข้อ 1 พูดว่าอะไร

1. Express X and $\overline{X}$ defined by the following truth tables using the minterm notation.

ภาษาพี่: ให้ตารางมา 3 ตาราง แต่ละตารางให้เขียน**สองคำตอบ** คือ ① $X(A,B,C)=\sum m(\dots)$ และ ② $\overline{X}(A,B,C)=\sum m(\dots)$

สิ่งที่โจทย์ซ่อนไว้ (สำคัญมาก): โจทย์บอกว่าให้ใช้ **minterm notation** ทั้งสองอัน — ไม่ได้ให้เขียน $\prod M$ นะครับ

เพราะฉะนั้น $\overline{X}$ ก็ต้องเขียนด้วย $\sum m$ เหมือนกัน แค่ใช้**เลขของแถวที่ X เป็น 0**

ที่มาว่าทำไม $\overline{X}$ ถึงได้จากแถวที่ X เป็น 0 พอดี: $\overline{X}$ คือคอลัมน์ที่พลิกค่าทุกแถวของ X ครับ — แถวที่ X เป็น 0 จะกลายเป็น 1 ในคอลัมน์ $\overline{X}$ พอดีเป๊ะ แล้ว $\sum m$ ก็เก็บเลขแถวที่เป็น 1 ตามนิยาม

ผลที่ตามมา: เลขในสองคำตอบต้อง**รวมกันได้ 0–7 ครบทั้ง 8 ตัว ไม่ซ้ำกันเลย** ใช้ตรวจคำตอบได้ทุกข้อย่อยครับ

ข้อ 1(a)

Assignment #4 · ข้อ 1(a) EES271 · Assignment 4

> a) $X(A,B,C)=$ _____ , $\overline{X}(A,B,C)=$ _____

ตารางในโจทย์: คอลัมน์ A,B,C เรียง 000 ถึง 111 ตามปกติ และคอลัมน์ X จากบนลงล่างคือ **`0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0`**

โจทย์ซ่อนอะไรไว้: ข้อนี้มี 1 ถึง 5 แถว และมี 0 แค่ 3 แถว — ตอนเขียน X ต้องเขียน 5 ก้อน ยาวมาก คนมักเขียนตกไปหนึ่งก้อนครับ

ชั้น ① โจทย์ต้นฉบับ — ตารางที่พิมพ์ใหม่จากรูป

A	B	C	X	minterm
0	0	0	0	—
0	0	1	1	$m_1 = \overline{A}\overline{B}C$
0	1	0	1	$m_2 = \overline{A}B\overline{C}$
0	1	1	1	$m_3 = \overline{A}BC$
1	0	0	1	$m_4 = A\overline{B}\overline{C}$
1	0	1	1	$m_5 = A\overline{B}C$
1	1	0	0	—
1	1	1	0	—

ที่มาของตัวเลขในตารางนี้

ตารางในไฟล์ Assignment เป็น**รูปภาพ**ครับ pdftotext อ่านไม่ได้เลย
พี่เลย render หน้าที่ 1 ของไฟล์เป็น PNG ที่ **300 dpi** แล้วครอปเฉพาะตาราง ซูมอ่านทีละแถว
ได้คอลัมน์ X ว่า **0 1 1 1 1 1 0 0**
แล้วเอาไปใส่ `tools/dig.py` ให้มันสร้างตารางกลับมาเทียบอีกรอบครับ

อ่านคอลัมน์ minterm ยังไง

คอลัมน์ขวาสุดคือ minterm ของ**เฉพาะแถวที่เป็น 1** ครับ แถวที่เป็น 0 พี่ใส่ขีดกลางไว้เพราะแถวนั้นไม่มีส่วนร่วมใน X
แต่มันจะไปมีส่วนร่วมใน $\overline{X}$ แทน — เดี๋ยวเห็นในชั้น ③ ครับ

ชั้น ② เตรียมก่อนลงมือ

เตรียมอะไร	รายละเอียด
ใช้วิธีไหน	ทิศ (1) ตาราง → SOP ครับ เพราะโจทย์ให้ตารางมาแล้วสั่งให้เขียน minterm notation — ไม่ต้องใช้ De Morgan ไม่ต้องย่ออะไรทั้งสิ้น
ทำไมเลือกวิธีนี้	$\sum m$ อ่านจากแถวที่เอาต์พุตเป็น 1 **ตรง ๆ** ไม่ต้องแปลงอะไรเลย เป็นวิธีที่สั้นที่สุดและพลาดยากที่สุดครับ
กฎที่จะใช้	① $\sum m$ = เลขแถวที่เอาต์พุตเป็น 1 ② $\overline{X}$ = เลขแถวที่ X เป็น 0 (เพราะพลิกค่าแล้วมันกลายเป็น 1) ③ เลขทั้งสองกองรวมกันต้องได้ 0–7 ครบ
จำนวนแถว	3 ตัวแปร → $2^3 = 8$ แถว ตรงกับตารางในโจทย์
ต้องกางตัวอักษรไหม	โจทย์เขียนว่า `using the minterm notation` — **ตอบเป็นสัญกรณ์ $\sum m$ ก็พอครับ** แต่พี่จะกางตัวอักษรให้ดูด้วย เผื่ออาจารย์ขอรูปเต็มในข้อสอบ

ชั้น ③ ไล่ทีละขั้นพร้อมภาพ

ข้อ 1(a) — 8 แถวถูกแบ่งเป็นสองกอง กองเขียวเป็นของ X กองแดงเป็นของค่ากลับ

0	1	2	3	4	5	6	7
000	001	010	011	100	101	110	111
X=0	X=1	X=1	X=1	X=1	X=1	X=0	X=0

X = Σm(1, 2, 3, 4, 5)

ค่ากลับของ X = Σm(0, 6, 7)

5 + 3 = 8 ครบพอดี · ไม่มีเลขไหนอยู่สองกอง

ข้อ 1(a) — 8 ช่องถูกแบ่งเป็นสองกอง กองเขียวคือแถวที่ X เป็น 1 กองแดงคือแถวที่ X เป็น 0

ไล่ทีละแถว — ทั้ง 8 แถว ไม่ข้ามแถวไหนเลย

ขั้น 1 — กวาดคอลัมน์ X จากบนลงล่าง ทีละแถว พี่จะอ่านออกเสียงให้ฟังครับ

· แถว 0 ($ABC = 000$) → $X = 0$ → **เข้ากอง $\overline{X}$**

· แถว 1 ($ABC = 001$) → $X = 1$ → เข้ากอง X · minterm คือ $\overline{A}\,\overline{B}C$

· แถว 2 ($ABC = 010$) → $X = 1$ → เข้ากอง X · minterm คือ $\overline{A}B\overline{C}$

· แถว 3 ($ABC = 011$) → $X = 1$ → เข้ากอง X · minterm คือ $\overline{A}BC$

· แถว 4 ($ABC = 100$) → $X = 1$ → เข้ากอง X · minterm คือ $A\overline{B}\,\overline{C}$

· แถว 5 ($ABC = 101$) → $X = 1$ → เข้ากอง X · minterm คือ $A\overline{B}C$

· แถว 6 ($ABC = 110$) → $X = 0$ → **เข้ากอง $\overline{X}$**

· แถว 7 ($ABC = 111$) → $X = 0$ → **เข้ากอง $\overline{X}$**

ขั้น 2 — เขียนคำตอบแรก (X) เอาเลขของกองเขียวมาเรียง: 1, 2, 3, 4, 5

$$X(A,B,C) = \sum m(1,2,3,4,5)$$

ขั้น 3 — เขียนคำตอบที่สอง ($\overline{X}$) เอาเลขของกองแดงมาเรียง: 0, 6, 7

ทำไมถึงใช้กองแดงได้เลย: เพราะคอลัมน์ $\overline{X}$ คือ X ที่พลิกทุกค่า แถวที่ $X = 0$ จะกลายเป็น $\overline{X} = 1$ — และ $\sum m$ เก็บแถวที่เป็น 1 ครับ

$$\overline{X}(A,B,C) = \sum m(0,6,7)$$

ขั้น 4 — กางตัวอักษรทั้งสองอัน (ใช้กฎ 0 ใส่ขีด 1 ไม่ใส่)

$$X = \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C$$

$$\overline{X} = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + AB\overline{C} + ABC$$

พี่ขอกางตารางของ $\overline{X}$ ให้ดูด้วยครับ จะได้เห็นชัด ๆ ว่าแถวเขียวย้ายไปอยู่คนละที่

A	B	C	$\overline{X}$	minterm
0	0	0	1	$m_0 = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$
0	0	1	0	—
0	1	0	0	—
0	1	1	0	—
1	0	0	0	—
1	0	1	0	—
1	1	0	1	$m_6 = A\,B\,\overline{C}$
1	1	1	1	$m_7 = A\,B\,C$

ชั้น ④ คำตอบสุดท้าย

คำตอบที่ต้องเขียนลงกระดาษ — ข้อ 1(a)

$$X(A,B,C) = \sum m(1,2,3,4,5)$$

$$\overline{X}(A,B,C) = \sum m(0,6,7)$$

รูปเต็ม (เผื่ออาจารย์ขอ):

$$X = \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C$$

$$\overline{X} = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + AB\overline{C} + ABC$$

"X(A,B,C) = Σm(1,2,3,4,5) and X'(A,B,C) = Σm(0,6,7)."

ชั้น ⑤ ตรวจคำตอบด้วยวิธีที่สอง

1

5 + 3 = 8

ครบทุกแถว ไม่ซ้ำ

0 1 2 3 4 5 6 7

ตรวจวิธีที่ 1 — สองกองรวมกันต้องครบ 2^n

X มี 5 เลข · $\overline{X}$ มี 3 เลข · รวม $5+3=8=2^3$ ✓

และไล่ดูว่าครบทุกตัวไหม: 0(แดง) 1(เขียว) 2(เขียว) 3(เขียว) 4(เขียว) 5(เขียว) 6(แดง) 7(แดง) — **ครบ 8 ตัว ไม่มีตัวไหนซ้ำและไม่มีตัวไหนหาย** ✓

2

แทน ABC = 011

$\mathrm{AB}\overline{\mathrm{C}} = 1{\cdot}1{\cdot}1 = 1$

ตรงกับตาราง

ตรวจวิธีที่ 2 — แทนค่าลงนิพจน์แล้วเทียบกับตาราง

เลือกแถว $ABC = 011$ ซึ่งตารางบอกว่าต้องได้ 1 ครับ

ก้อนที่ 3 ของ X คือ $\overline{A}BC = \overline{0}\cdot 1\cdot 1 = 1\cdot 1\cdot 1 = 1$ → OR มีสมาชิกเป็น 1 → $X = 1$ ✓

ลองแถวที่ต้องได้ 0 ด้วย: ที่ $ABC = 111$ ทุกก้อนของ X มี $\overline{A}$ หรือ $\overline{B}$ ซึ่งเป็น 0 หมด → $X = 0$ ✓

3

```
minterms(X)
= [1,2,3,4,5]
maxterms(X)=[0,6,7]
```

ตรวจวิธีที่ 3 — รันด้วย tools/dig.py จริง

พี่รัน `minterms()` และ `maxterms()` จริงก่อนพิมพ์ลงชีทครับ และรัน `minterms("~(X)")` เพื่อยืนยันว่า minterm ของ $\overline{X}$ เท่ากับ maxterm ของ X พอดี — ได้ `[0, 6, 7]` ตรงกันครับ

ผลรันจริงจาก tools/dig.py — ข้อ 1(a)

```
Q1a  X bits = 01111100
     X       = sum m[1, 2, 3, 4, 5]
     Xbar    = sum m[0, 6, 7]
     check: minterms(X)=[1, 2, 3, 4, 5]  maxterms(X)=[0, 6, 7]
     check: minterms(~X)=[0, 6, 7]  (must equal maxterms(X))
```

ชั้น ⑥ กับดักของข้อ 1(a)

3 อย่างที่ทำให้เสียคะแนนข้อนี้

① ตอบ $\overline{X}$ ด้วยสัญกรณ์ $\prod M$ — โจทย์สั่งว่า `using the minterm notation` ทั้งสองช่องครับ
คำตอบผิดที่จะได้: เขียน $\overline{X} = \prod M(0,6,7)$ ซึ่ง**ผิดความหมายด้วย** เพราะ $\prod M(0,6,7)$ ที่จริงคือตัว X เอง ไม่ใช่ $\overline{X}$
วิธีกัน: อ่านคำสั่งโจทย์ให้จบก่อนลงมือทุกครั้งครับ

② เขียน 5 ก้อนแล้วตกไปหนึ่งก้อน — ข้อนี้ X ยาวถึง 5 ก้อน คนมักเขียนได้ 4
วิธีกัน: นับจำนวนเลขในวงเล็บกับจำนวนก้อนที่เขียนเสมอ ต้องเท่ากันเป๊ะ และตรวจว่า $5 + 3 = 8$ ครับ

③ อ่านตารางในรูปพลาดที่แถว 6 กับ 7 — สองแถวล่างสุดของข้อนี้เป็น 0 ทั้งคู่ ถ้ามองเร็ว ๆ อาจนึกว่าเป็น 1 เพราะแถวบน ๆ เป็น 1 ติดกันมาห้าแถว
วิธีกัน: อ่านตารางจาก**ล่างขึ้นบน**อีกรอบเพื่อตรวจครับ ถ้าได้ผลเหมือนเดิมแปลว่าอ่านถูก

หัวใจของข้อ 1(a)

X เก็บเลขแถวที่เป็น 1 · $\overline{X}$ เก็บเลขแถวที่เป็น 0 · สองกองรวมกันต้องได้ 0 ถึง 7 ครบพอดี

ข้อ 1(b)

Assignment #4 · ข้อ 1(b) EES271 · Assignment 4

> b) $X(A,B,C) =$ _____ , $\overline{X}(A,B,C) =$ _____

คอลัมน์ X จากบนลงล่างคือ **0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1**

โจทย์ซ่อนอะไรไว้: ข้อนี้ 1 กับ 0 มีอย่างละ 4 ตัวพอดี — ทั้งสองคำตอบยาวเท่ากัน เป็นข้อที่ต้องระวังการอ่านสลับแถวมากที่สุด เพราะ 0 กับ 1 สลับกันไปมาเกือบทุกแถวครับ

ชั้น ① โจทย์ต้นฉบับ — ตารางที่พิมพ์ใหม่จากรูป

A	B	C	X	minterm
0	0	0	0	—
0	0	1	0	—
0	1	0	1	$m_2 = \overline{A}B\overline{C}$
0	1	1	1	$m_3 = \overline{A}BC$
1	0	0	0	—
1	0	1	1	$m_5 = A\overline{B}C$
1	1	0	0	—
1	1	1	1	$m_7 = ABC$

ที่มาของตัวเลข

ครอปตารางที่สองของหน้า 1 จากไฟล์ PDF ที่ 300 dpi แล้วอ่านทีละแถวครับ ได้ **0 0 1 1 0 1 0 1**

ข้อสังเกตช่วยจำ: ค่าสองแถวแรกเป็น 0 ทั้งคู่ แล้วสองแถวถัดมาเป็น 1 ทั้งคู่ จากนั้นสลับ 0-1-0-1 ครับ

ทำไมข้อนี้ต้องอ่านช้าเป็นพิเศษ

เพราะครึ่งล่างของตารางค่าสลับทุกแถว (0, 1, 0, 1) การกวาดสายตาเร็ว ๆ จะเผลอเลื่อนบรรทัดได้ง่ายมาก พี่แนะนำให้**ใช้นิ้วหรือปากกาชี้ทีละแถว**ตอนอ่านตารางแบบนี้ครับ

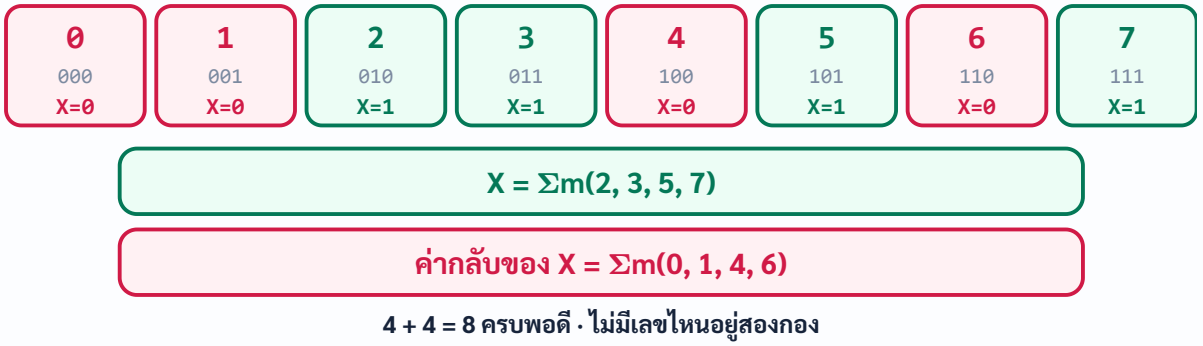
ชั้น ② เตรียมก่อนลงมือ

เตรียมอะไร	รายละเอียด
ใช้วิธีไหน	เหมือนข้อ (a) ครับ — ทิศ (1) ตาราง → $\sum m$ แต่ข้อนี้ต้องอ่านตารางระวังกว่า เพราะค่าสลับไปมา
ทำไมเลือกวิธีนี้	โจทย์ให้ตารางมาตรง ๆ และขอ minterm notation — ไม่มีเหตุผลจะไปทำอย่างอื่นครับ
กฎที่จะใช้	$\sum m$ ของ X = แถวที่ได้ 1 · $\sum m$ ของ $\overline{X}$ = แถวที่ได้ 0 · สองกองรวมกัน = 0–7

เตรียมอะไร	รายละเอียด
คาดคะเนคำตอบล่วงหน้า	นับ 1 ในคอลัมน์ได้ 4 ตัว → คำตอบแรกต้องมี **4 เลข** · คำตอบที่สองต้องมี **4 เลข** เช่นกัน (เพราะ $8-4=4$) ทำแบบนี้ก่อนลงมือช่วยจับผิดตัวเองได้ทันทีครับ

ชั้น ③ ไล่ทีละขั้นพร้อมภาพ

ข้อ 1(b) — 8 แถวถูกแบ่งเป็นสองกอง กองเขียวเป็นของ X กองแดงเป็นของค่ากลับ



ข้อ 1(b) — สองกองมีขนาดเท่ากันพอดี กองละ 4 แถว

ไล่ทีละแถว — ทั้ง 8 แถว

ขั้น 1 — กวาดคอลัมน์ X ทีละแถว

· แถว 0 (000) → $X=0$ → กอง $\overline{X}$

· แถว 1 (001) → $X=0$ → กอง $\overline{X}$

· แถว 2 (010) → $X=1$ → กอง X · minterm $\overline{A}B\overline{C}$

· แถว 3 (011) → $X=1$ → กอง X · minterm $\overline{A}BC$

· แถว 4 (100) → $X=0$ → กอง $\overline{X}$

· แถว 5 (101) → $X=1$ → กอง X · minterm $A\overline{B}C$

· แถว 6 (110) → $X=0$ → กอง $\overline{X}$

· แถว 7 (111) → $X=1$ → กอง X · minterm ABC

ขั้น 2 — คำตอบแรก กองเขียวคือ 2, 3, 5, 7 → $X(A,B,C)=\sum m(2,3,5,7)$

ขั้น 3 — คำตอบที่สอง กองแดงคือ 0, 1, 4, 6 → $\overline{X}(A,B,C)=\sum m(0,1,4,6)$

ทำไมไม่ต้องกวาดตารางใหม่: เพราะเลขที่เหลือจาก 0–7 หลังเอา 2, 3, 5, 7 ออก ก็คือ 0, 1, 4, 6 พอดีครับ — ประหยัดเวลาและลดโอกาสอ่านผิดรอบที่สอง

ขั้น 4 — กางตัวอักษร

$$X=\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}BC+A\overline{B}C+ABC$$

$$\overline{X}=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C+A\overline{B}\,\overline{C}+AB\overline{C}$$

A	B	C	$\overline{X}$	minterm
0	0	0	1	$m_0 = \overline{A}\overline{B}\overline{C}$
0	0	1	1	$m_1 = \overline{A}\overline{B}C$
0	1	0	0	—
0	1	1	0	—
1	0	0	1	$m_4 = A\overline{B}\overline{C}$
1	0	1	0	—
1	1	0	1	$m_6 = AB\overline{C}$
1	1	1	0	—

ชั้น ④ คำตอบสุดท้าย

คำตอบที่ต้องเขียนลงกระดาษ — ข้อ 1(b)

$$X(A,B,C) = \sum m(2,3,5,7)$$
$$\overline{X}(A,B,C) = \sum m(0,1,4,6)$$

รูปเต็ม:

$$X = \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}C + ABC$$
$$\overline{X} = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + A\overline{B}\,\overline{C} + AB\overline{C}$$

“X(A,B,C) = Σm(2,3,5,7) and X'(A,B,C) = Σm(0,1,4,6).”

ชั้น ⑤ ตรวจคำตอบด้วยวิธีที่สอง

1

4 + 4 = 8

สองกองเท่ากันพอดี
ตรงกับที่คาดคะเนไว้

ตรวจวิธีที่ 1 — เทียบกับที่คาดคะเนไว้ในชั้น ②

ชั้น ② พี่คาดไว้ว่าคำตอบแรกต้องมี 4 เลข คำตอบที่สองต้องมี 4 เลข ได้ $\{2,3,5,7\}$ 4 ตัว และ $\{0,1,4,6\}$ 4 ตัว ✓

ไล่ตรวจว่าครบไหม: 0(แดง) 1(แดง) 2(เขียว) 3(เขียว) 4(แดง) 5(เขียว) 6(แดง) 7(เขียว) — ครบ 8 ตัว ไม่ซ้ำ ✓

2

แทน ABC = 101

$\mathrm{AB}\overline{\mathrm{C}} = 1{\cdot}1{\cdot}\overline{1} = 1$

ตรงกับตาราง

ตรวจวิธีที่ 2 — แทนค่าแถวที่สลับค่ากันบ่อย

พี่เลือกแถว $ABC = 101$ เพราะเป็นแถวที่อยู่ในโซนที่ค่าสลับไปมา เสี่ยงอ่านผิดที่สุดครับ

ก้อน $A\overline{B}C = 1 \cdot \overline{0} \cdot 1 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \rightarrow X = 1$ ✓

แล้วเช็คแถวข้าง ๆ ด้วย: ที่ $ABC = 100$ ทุกก้อนของ X เป็น 0 (ก้อน $A\overline{B}C$ มี $C = 0$) $\rightarrow X = 0$ ✓ — สองแถวติดกันให้ค่าต่างกันจริง

3

```
minterms(X)
= [2,3,5,7]
minterms(~X)=[0,1,4,6]
```

ตรวจวิธีที่ 3 — รันด้วย tools/dig.py จริง

รัน `minterms()` กับนิพจน์ที่สร้างจากบิต `00110101` ที่อ่านมาจากรูป แล้วให้ dig สร้างตารางกลับ ได้บิตชุดเดิมเป๊ะครับ — ยืนยันว่าอ่านรูปไม่ผิด

ผลรันจริงจาก tools/dig.py — ข้อ 1(b)

```
Q1b  X bits = 00110101
     X       = sum m[2, 3, 5, 7]
     Xbar    = sum m[0, 1, 4, 6]
     check: minterms(X)=[2, 3, 5, 7]  maxterms(X)=[0, 1, 4, 6]
     check: minterms(~X)=[0, 1, 4, 6]  (must equal maxterms(X))
```

ชั้น ⑥ กับดักของข้อ 1(b)

3 อย่างที่ทำให้เสียคะแนนข้อนี้

① เลื่อนบรรทัดตอนอ่านตาราง — ข้อนี้ครึ่งล่างเป็น 0, 1, 0, 1 สลับกัน ถ้าอ่านเลื่อนไปหนึ่งบรรทัดจะได้ $\sum m(2,3,4,6)$ ซึ่ง**ผิดสองเลข**
วิธีกัน: อ่านคู่กับคอลัมน์ ABC เสมอ อย่าอ่านคอลัมน์ X ลอย ๆ ครับ ให้พูดในใจว่า “หนึ่ง-ศูนย์-หนึ่ง คือแถว 101 ได้ 1”

② เขียน $\overline{X}$ โดยเอาเลขเดิมมาใส่ขีดบน — บางคนเขียน $\overline{X} = \sum \overline{m}(2,3,5,7)$ ซึ่งไม่มีสัญกรณ์แบบนี้ครับ **ที่ถูกคือเปลี่ยนตัวเลข ไม่ใช่ใส่ขีด** — $\overline{X}$ ใช้เลขคนละชุดกันเลย

③ ลืมว่าแถว 0 ก็นับ — บางคนเริ่มนับแถวจาก 1 ทำให้ทุกเลขเลื่อนไปหมด
วิธีกัน: แถวแรกสุด ($ABC = 000$) คือแถวที่ **0** เสมอ เพราะ $000_2 = 0_{10}$ ครับ

หัวใจของข้อ 1(b)

ตารางที่ค่าสลับไปมาต้องอ่านคู่กับคอลัมน์อินพุตเสมอ — และเมื่อได้กองหนึ่งแล้ว อีกกองคือเลขที่เหลือ ไม่ต้องกวาดตารางซ้ำ

ข้อ 1(c)

Assignment #4 · ข้อ 1(c) EES271 · Assignment 4

> c) $X(A,B,C) =$ _____ , $\overline{X}(A,B,C) =$ _____

คอลัมน์ X จากบนลงล่างคือ **`1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0`**

โจทย์ซ่อนอะไรไว้: ข้อนี้**แถวแรกสุดเป็น 1** ครับ ซึ่งต่างจาก (a) และ (b) ที่แถวแรกเป็น 0 — คนที่ทำสามข้อติดกันมักเผลอลอกนิสัยเดิมมาแล้วข้ามแถว 0 ไป

ชั้น ① โจทย์ต้นฉบับ — ตารางที่พิมพ์ใหม่จากรูป

A	B	C	X	minterm
0	0	0	**1**	$m_0 = \overline{A}\overline{B}\overline{C}$
0	0	1	**0**	—
0	1	0	**0**	—
0	1	1	**0**	—
1	0	0	**0**	—
1	0	1	**1**	$m_5 = A\overline{B}C$
1	1	0	**1**	$m_6 = AB\overline{C}$
1	1	1	**0**	—

ที่มาของตัวเลข

ตารางนี้อยู่บน**หน้า 2** ของไฟล์ Assignment ครับ (ไม่ใช่หน้า 1 เหมือนสองข้อแรก) พี่ render หน้า 2 ที่ 300 dpi แล้วครอปอ่านได้ **`1 0 0 0 0 1 1 0`**

ข้อสังเกต: มี 1 อยู่แค่ 3 ตัว และเป็นตัวแรกสุดหนึ่งตัว แล้วอีกสองตัวติดกันตรงกลางค่อนล่างครับ

ข้อนี้ต่างจากสองข้อแรกยังไง

(a) มี 1 ห้าตัว · (b) มี 1 สี่ตัว · (c) มี 1 **สามตัว**

แปลว่าข้อนี้คำตอบของ X จะ**สั้นที่สุด** ในสามข้อ แต่คำตอบของ $\overline{X}$ จะ**ยาวที่สุด** (5 เลข) ครับ

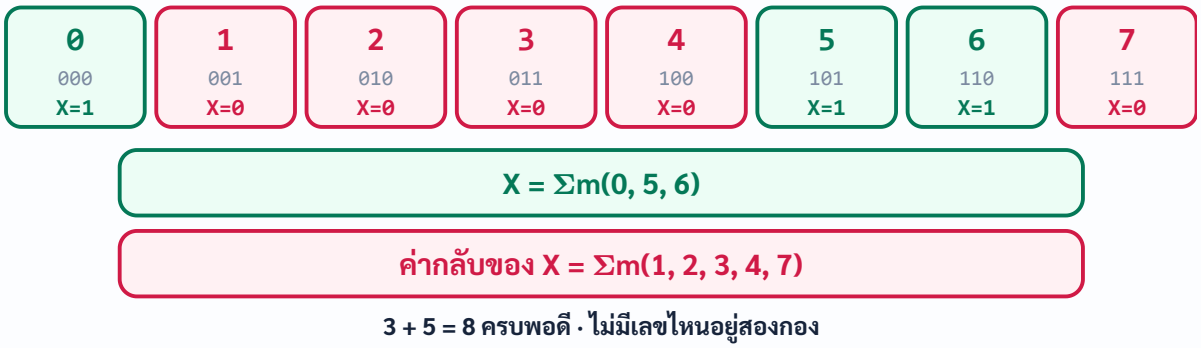
ชั้น ② เตรียมก่อนลงมือ

เตรียมอะไร	รายละเอียด
ใช้วิธีไหน	ทิศ (1) เหมือนเดิมครับ — แต่ข้อนี้พี่จะกวาดหา**เลข 1** เป็นหลัก เพราะมีแค่ 3 ตัว หาง่ายกว่ากวาดหา 0 ที่มีถึง 5 ตัว
ทำไมเลือกวิธีนี้	หลักการคือ**กวาดหาของที่มีน้อยกว่าเสมอ** เพราะโอกาสพลาดน้อยกว่า แล้วอีกกองใช้วิธี “เลขที่เหลือ” ครับ
กฎที่จะใช้	$\sum m$ ของ X = แถวที่ได้ 1 · $\sum m$ ของ $\overline{X}$ = เลขที่เหลือ

เตรียมอะไร	รายละเอียด
คาดคะเนคำตอบล่วงหน้า	1 มี 3 ตัว → คำตอบแรกมี **3 เลข** · คำตอบที่สองมี **5 เลข** ($8-3=5$)

ชั้น ③ ไล่ทีละขั้นพร้อมภาพ

ข้อ 1(c) — 8 แถวถูกแบ่งเป็นสองกอง กองเขียวเป็นของ X กองแดงเป็นของค่ากลับ



ข้อ 1(c) — กองเขียวเล็กที่สุดในสามข้อ (3 แถว) กองแดงใหญ่ที่สุด (5 แถว)

ไล่ทีละแถว — ทั้ง 8 แถว

ขั้น 1 — กวาดคอลัมน์ X ทีละแถว

· แถว 0 (000) → $X=1$ → **กอง** X · minterm $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ (ระวังตรงนี้! แถวแรกเป็น 1 ไม่ใช่ 0)

· แถว 1 (001) → $X=0$ → กอง $\overline{X}$

· แถว 2 (010) → $X=0$ → กอง $\overline{X}$

· แถว 3 (011) → $X=0$ → กอง $\overline{X}$

· แถว 4 (100) → $X=0$ → กอง $\overline{X}$

· แถว 5 (101) → $X=1$ → **กอง** X · minterm $A\overline{B}C$

· แถว 6 (110) → $X=1$ → **กอง** X · minterm $AB\overline{C}$

· แถว 7 (111) → $X=0$ → กอง $\overline{X}$

ขั้น 2 — คำตอบแรก กองเขียวคือ 0, 5, 6 → $X(A,B,C)=\sum m(0,5,6)$

ตรงกับที่คาดคะเนไว้: 3 เลข ✓

ขั้น 3 — คำตอบที่สอง เลขที่เหลือจาก 0–7 คือ 1, 2, 3, 4, 7

$\overline{X}(A,B,C)=\sum m(1,2,3,4,7)$ — 5 เลข ✓

ขั้น 4 — กางตัวอักษร

$$X=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+A\overline{B}C+AB\overline{C}$$

$$\overline{X}=\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}BC+A\overline{B}\,\overline{C}+ABC$$

A	B	C	$\overline{X}$	minterm
0	0	0	0	—
0	0	1	1	$m_1 = \overline{A}\overline{B}C$
0	1	0	1	$m_2 = \overline{A}B\overline{C}$
0	1	1	1	$m_3 = \overline{A}BC$
1	0	0	1	$m_4 = A\overline{B}\overline{C}$
1	0	1	0	—
1	1	0	0	—
1	1	1	1	$m_7 = ABC$

ชั้น ④ คำตอบสุดท้าย

คำตอบที่ต้องเขียนลงกระดาษ — ข้อ 1(c)

$$X(A,B,C) = \sum m(0,5,6)$$

$$\overline{X}(A,B,C) = \sum m(1,2,3,4,7)$$

รูปเต็ม:

$$X = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C + AB\overline{C}$$

$$\overline{X} = \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}\,\overline{C} + ABC$$

"X(A,B,C) = Σm(0,5,6) and X'(A,B,C) = Σm(1,2,3,4,7)."

ชั้น ⑤ ตรวจคำตอบด้วยวิธีที่สอง

1

3 + 5 = 8

ครบพอดี

ตรงกับที่คาดไว้

ตรวจวิธีที่ 1 — นับจำนวนแล้วไล่ตรวจเลขทีละตัว

$\{0,5,6\}$ 3 ตัว + $\{1,2,3,4,7\}$ 5 ตัว = 8 ✓

ไล่: 0(เขียว) 1(แดง) 2(แดง) 3(แดง) 4(แดง) 5(เขียว) 6(เขียว) 7(แดง) — ครบ 8 ไม่ซ้ำ ✓

2

แทน ABC = 000

$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} = 1{\cdot}1{\cdot}1 = 1$

แถวแรกเป็น 1 จริง

ตรวจวิธีที่ 2 — แทนค่าที่แถวแรก (แถวที่เสี่ยงพลาดที่สุด)

ที่ $ABC = 000$: ก้อนแรกคือ $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} = \overline{0}\cdot\overline{0}\cdot\overline{0} = 1\cdot1\cdot1 = 1 \rightarrow X = 1$ ✓

ตรงกับตารางที่แถวแรกเป็น 1 ครับ — ยืนยันว่าไม่ได้ข้ามแถวแรกไป

ลองแถวสุดท้ายด้วย: ที่ $ABC = 111$ ก้อนที่ 2 มี $\overline{B} = 0\cdot$ ก้อนที่ 3 มี $\overline{C} = 0\cdot$ ก้อนแรกมี $\overline{A} = 0 \rightarrow$ ทุกก้อนเป็น 0 $\rightarrow X = 0$ ✓

3

```
minterms(X)
= [0,5,6]
minterms(~X)=[1,2,3,4,7]
```

ตรวจวิธีที่ 3 — รันด้วย tools/dig.py จริง

พี่ยืนยันด้วยสคริปต์ว่า `minterms(~X)` เท่ากับ `maxterms(X)` พอดีทุกข้อย่อยครับ ซึ่งเป็นการพิสูจน์ว่าความสัมพันธ์ที่พี่ใช้ตอบข้อนี้ถูกต้องจริง ไม่ใช่แค่จำมา

ผลรันจริงจาก tools/dig.py — ข้อ 1(c)

```
Q1c  X bits = 10000110
     X       = sum m[0, 5, 6]
     Xbar    = sum m[1, 2, 3, 4, 7]
     check: minterms(X)=[0, 5, 6]  maxterms(X)=[1, 2, 3, 4, 7]
     check: minterms(~X)=[1, 2, 3, 4, 7]  (must equal maxterms(X))
```

ชั้น ⑥ กับดักของข้อ 1(c)

3 อย่างที่ทำให้เสียคะแนนข้อนี้

① ข้ามแถว 0 เพราะติดนิสัยจากสองข้อก่อน — ข้อ (a) และ (b) แถวแรกเป็น 0 ทั้งคู่ พอมาข้อ (c) ที่แถวแรกเป็น 1 คนมักไม่ทันสังเกต
คำตอบผิดที่จะได้: $\sum m(5,6)$ แทนที่จะเป็น $\sum m(0,5,6)$ — **ตกไปหนึ่งก้อนเต็ม ๆ**
วิธีกัน: อ่านแถวแรกออกเสียงเสมอครับ “แถวศูนย์ ได้หนึ่ง”

② เขียน m_0 ผิดเป็น ABC — แถว 000 ต้องใส่ขีดบน**ครบทั้งสามตัว**
คำตอบผิดที่จะได้: เขียน ABC ซึ่งที่จริงคือ m_7 — ผิดไปคนละมุมของตารางเลยครับ
วิธีกัน: ท่องว่า “m_0 ขีดครบ · m_7 ไม่มีขีดเลย” สองตัวนี้จำง่ายที่สุดและใช้เช็คตัวอื่นได้

③ อ่านตารางผิดหน้า — ข้อ (c) อยู่หน้า 2 ของไฟล์ Assignment ส่วน (a) กับ (b) อยู่หน้า 1 ครับ ตอนทำอย่าลืมเลื่อนหน้า
และหน้า 2 ยังมีตารางของข้อ 2(a) กับ 2(b) อยู่ใต้ลงไปอีก — **อย่าหยิบตารางผิดข้อ**

หัวใจของข้อ 1 ทั้งสามข้อย่อย

อ่านตารางทีละแถวคู่กับคอลัมน์อินพุต → เลขแถวที่ได้ 1 คือ X → เลขที่เหลือคือ $\overline{X}$ → ตรวจว่าสองกองรวมกันได้ 0 ถึง 7 ครบทุกครั้ง

9 เฉลย Assignment 4 ข้อ 2 (a–c)

โจทย์ข้อ 2 พูดว่าอะไร

2. Convert the following truth tables to Boolean expressions in both SOP and POS forms.

ภาษาพี่: ให้ตารางมา 3 ตาราง แต่ละตารางต้องเขียน**สองนิพจน์** คือรูป SOP และรูป POS

สิ่งที่โจทย์ซ่อนไว้ 3 อย่าง:

① คำว่า both แปลว่า**ต้องเขียนตัวอักษรจริงทั้งสองรูป** ไม่ใช่แค่เขียนสัญกรณ์ $\sum m$ กับ $\prod M$ ครับ (ถ้าอยากเขียนสัญกรณ์ด้วยก็ดี แต่ต้องมีรูปกางด้วย)

② POS ต้อง**กลับค่าตัวแปร** ด้วย ไม่ใช่แค่เปลี่ยนไปอ่านแถวที่เป็น 0 — นี่คือจุดที่คนเสียคะแนนมากที่สุดของ Assignment ชุดนี้

③ สองรูปที่ได้ต้อง**ให้ตารางค่าความจริงเดียวกันเป๊ะ** — ถ้าไม่ตรงแปลว่ามีรูปหนึ่งผิด พี่จะตรวจด้วย same_logic() ทุกข้อย่อยครับ

ลำดับการทำที่พี่แนะนำ — ใช้ได้ทั้งสามข้อย่อย

ขั้น 1 แยกแถวเป็นสองกองก่อน (กอง 1 กับ กอง 0) แล้ว**ตรวจว่ารวมกันได้ 8**

ขั้น 2 เขียน SOP จากกอง 1 ด้วยกฎ **0 ใส่ขีด · 1 ไม่ใส่**

ขั้น 3 เขียน POS จากกอง 0 ด้วยกฎ**กลับค่า: 0 ไม่ใส่ขีด · 1 ใส่ขีด**

ขั้น 4 แทนค่าอย่างน้อย 2 แถว (แถวที่ควรได้ 1 หนึ่งแถว และแถวที่ควรได้ 0 หนึ่งแถว) ลงทั้งสองรูปแล้วดูว่าตรงกัน

ทำสี่ขั้นนี้ทุกข้อ ไม่ต้องคิดใหม่ ครับ

ข้อ 2(a)

Assignment #4 · ข้อ 2(a) EES271 · Assignment 4

> 2. Convert the following truth tables to Boolean expressions in both SOP and POS forms. — a)

คอลัมน์ X จากบนลงล่างคือ **0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0**

โจทย์ซ่อนอะไรไว้: ข้อนี้มี 1 แค่ **2 แถว** แต่มี 0 ถึง **6 แถว** — แปลว่า SOP จะสั้นมาก (2 ก้อน) แต่ **POS จะยาวถึง 6 วงเล็บ** คนมักเขียน POS ตกไปหนึ่งถึงสองวงเล็บครับ

ชั้น ① โจทย์ต้นฉบับ — ตารางที่พิมพ์ใหม่จากรูป

A	B	C	X	minterm	maxterm
0	0	0	0	—	$M_0 = (A + B + C)$
0	0	1	1	$m_1 = \overline{A}\overline{B}C$	—

A	B	C	X	minterm	maxterm
0	1	0	0	—	$M_2 = (A + \overline{B} + C)$
0	1	1	0	—	$M_3 = (A + \overline{B} + \overline{C})$
1	0	0	0	—	$M_4 = (\overline{A} + B + C)$
1	0	1	0	—	$M_5 = (\overline{A} + B + \overline{C})$
1	1	0	1	$m_6 = AB\overline{C}$	—
1	1	1	0	—	$M_7 = (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})$

อ่านตารางนี้ยังไง

พี่ใส่**ทั้งคอลัมน์ minterm และคอลัมน์ maxterm** ไว้ในตารางเดียวเลยครับ

· **แถวเขียว** (เอาต์พุตเป็น 1) → มี minterm · ช่อง maxterm เป็นขีดกลาง

· **แถวขาว** (เอาต์พุตเป็น 0) → มี maxterm · ช่อง minterm เป็นขีดกลาง

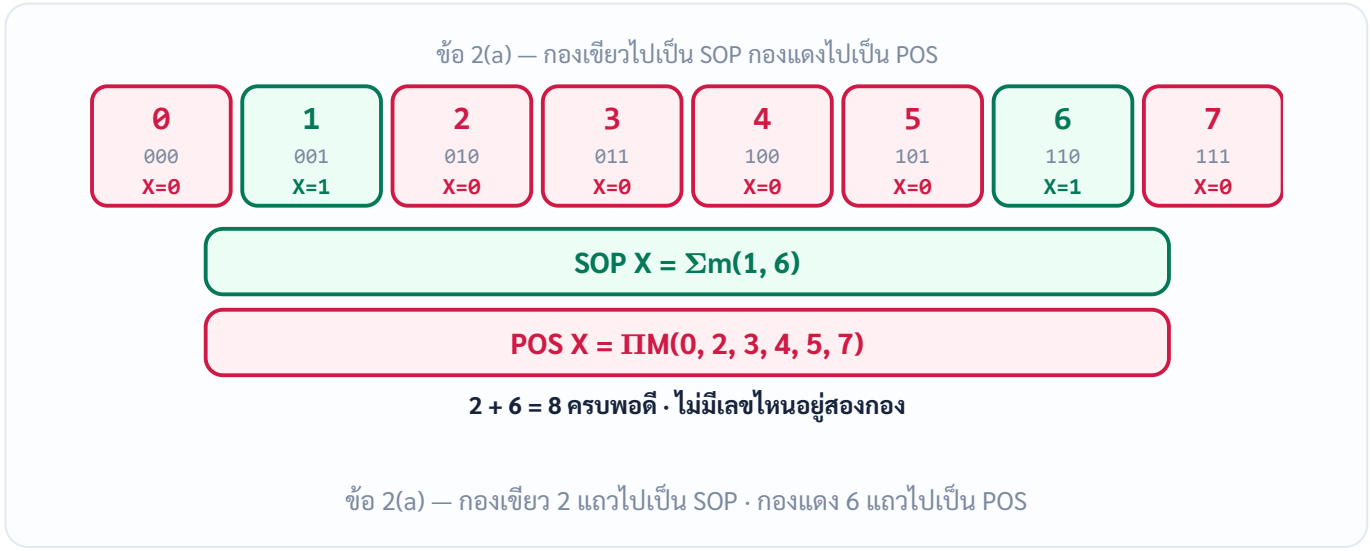
สังเกตให้ดี: ไม่มีแถวไหนที่มีทั้งสองอย่าง และไม่มีแถวไหนที่ไม่มีอะไรเลย — นี่คือภาพของ “เลขแบ่งสองกอง” จากหัวข้อ 4 ที่กลายเป็นตารางจริงครับ

ที่มาของตัวเลข: ครอปจากหน้า 2 ของไฟล์ Assignment ที่ 300 dpi อ่านทีละแถว ได้ `0 1 0 0 0 0 1 0` แล้วตรวจซ้ำด้วย dig.py

ชั้น ② เตรียมก่อนลงมือ

เตรียมอะไร	รายละเอียด
ใช้วิธีไหน	ใช้ทั้งทิศ (1) และทิศ (2) ครับ — SOP จากทิศ (1) และ POS จากทิศ (2) เพราะโจทย์สั่งว่า in both SOP and POS forms
ทำไมต้องทำสองรูป	เพราะเป็นการฝึกว่า**ตารางเดียวกันเขียนได้สองหน้าตา** และทั้งสองหน้าตาถูกต้องเท่ากัน — วงจรที่สร้างจากสองรูปนี้ทำงานเหมือนกันเป๊ะ (จะเห็นชัดใน EP08)
กฎที่จะใช้	SOP: อ่านแถว 1 · **0 ใส่ขีด 1 ไม่ใส่** · ต่อด้วย + POS: อ่านแถว 0 · **0 ไม่ใส่ขีด 1 ใส่ขีด** · วงเล็บชนกัน
คาดคะเนล่วงหน้า	นับ 1 ได้ 2 ตัว → SOP มี **2 ก้อน** · นับ 0 ได้ 6 ตัว → POS มี **6 วงเล็บ** ทุกก้อนและทุกวงเล็บต้องมีตัวอักษร **3 ตัว** ครบ

ชั้น ③ ไล่ทีละขั้นพร้อมภาพ



ขั้นที่ 1 กับ 2 — แยกกองแล้วเขียน SOP

ขั้น 1 — แยกสองกอง ไล่ทีละแถวครับ

· แถว 0 (000) $X = 0$ → กอง POS · แถว 1 (001) $X = 1$ → **กอง SOP**

· แถว 2 (010) $X = 0$ → กอง POS · แถว 3 (011) $X = 0$ → กอง POS

· แถว 4 (100) $X = 0$ → กอง POS · แถว 5 (101) $X = 0$ → กอง POS

· แถว 6 (110) $X = 1$ → **กอง SOP** · แถว 7 (111) $X = 0$ → กอง POS

ตรวจทันที: กอง SOP มี 2 · กอง POS มี $6 \cdot 2 + 6 = 8$ ✓ ตรงกับที่คาดไว้

ขั้น 2 — เขียน SOP จากกอง 1 ใช้กฎ **0 ใส่ขีด · 1 ไม่ใส่**

· แถว 1 = 001 → A เป็น 0 ใส่ขีด · B เป็น 0 ใส่ขีด · C เป็น 1 ไม่ใส่ → $m_1 = \overline{A}\,\overline{B}C$

· แถว 6 = 110 → A เป็น 1 ไม่ใส่ · B เป็น 1 ไม่ใส่ · C เป็น 0 ใส่ขีด → $m_6 = AB\overline{C}$

ต่อกันด้วย OR: $X = \overline{A}\,\overline{B}C + AB\overline{C}$

ขั้นที่ 3 — เขียน POS จากกอง 0 (กลับค่าทุกตัว)

ตรงนี้ต้องช้าครับ ทุกแถวใช้กฎ**กลับค่า: บิต 0 ไม่ใส่ขีด · บิต 1 ใส่ขีด**

· **แถว 0 =** 000 → ทั้งสามบิตเป็น 0 → **ไม่ใส่ขีดเลย** → $M_0 = (A + B + C)$

· **แถว 2 =** 010 → $A = 0$ ไม่ใส่ · $B = 1$ **ใส่ขีด** · $C = 0$ ไม่ใส่ → $M_2 = (A + \overline{B} + C)$

· **แถว 3 =** 011 → $A = 0$ ไม่ใส่ · $B = 1$ ใส่ขีด · $C = 1$ ใส่ขีด → $M_3 = (A + \overline{B} + \overline{C})$

· **แถว 4 =** 100 → $A = 1$ **ใส่ขีด** · $B = 0$ ไม่ใส่ · $C = 0$ ไม่ใส่ → $M_4 = (\overline{A} + B + C)$

· **แถว 5 =** 101 → $A = 1$ ใส่ขีด · $B = 0$ ไม่ใส่ · $C = 1$ ใส่ขีด → $M_5 = (\overline{A} + B + \overline{C})$

· **แถว 7 =** 111 → ทั้งสามบิตเป็น 1 → **ใส่ขีดครบทั้งสามตัว** → $M_7 = (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})$

เอามาคูณกันทั้งหมด 6 วงเล็บ (วงเล็บเขียนชนกัน = AND)

$$X = (A + B + C)(A + \overline{B} + C)(A + \overline{B} + \overline{C})(\overline{A} + B + C)(\overline{A} + B + \overline{C})(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})$$

ชั้น ④ คำตอบสุดท้าย

คำตอบที่ต้องเขียนลงกระดาษ — ข้อ 2(a)

รูป SOP:

$$X = \overline{A}\,\overline{B}C + AB\overline{C} \;=\; \sum m(1,6)$$

รูป POS:

$$X = (A+B+C)(A+\overline{B}+C)(A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+B+C)(\overline{A}+B+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$$

$$= \prod M(0,2,3,4,5,7)$$

“SOP: X = A'B'C + ABC' = Σm(1,6); POS: X = ΠM(0,2,3,4,5,7).”

ชั้น ⑤ ตรวจคำตอบด้วยวิธีที่สอง — พิสูจน์ว่าสองรูปให้ตารางเดียวกัน

ข้อนี้ต้องตรวจให้แน่นเป็นพิเศษครับ เพราะโจทย์ให้เขียนสองรูป ถ้ารูปใดรูปหนึ่งผิดจะเสียคะแนน พี่กางตารางของ**รูป POS** มาเทียบกับ**รูป SOP** ทีละแถวเลย

A	B	C	X จาก SOP	X จาก POS
0	0	0	0	**0**
0	0	1	1	**1**
0	1	0	0	**0**
0	1	1	0	**0**
1	0	0	0	**0**
1	0	1	0	**0**
1	1	0	1	**1**
1	1	1	0	**0**

อ่านตารางตรวจนี้ยังไง

คอลัมน์แรกที่เพิ่มมาคือค่าที่คำนวณจาก**นิพจน์ SOP** ส่วนคอลัมน์เอาต์พุตคือค่าที่คำนวณจาก**นิพจน์ POS** ครับ
ทั้งสองคอลัมน์ตรงกันครบทั้ง 8 แถว → พิสูจน์แล้วว่าสองรูปเป็นฟังก์ชันเดียวกันจริง ✓
และตรงกับคอลัมน์ X ในโจทย์ด้วย $(0\,1\,0\,0\,0\,0\,1\,0)$ ✓

1

2 + 6 = 8

2 ก้อน · 6 วงเล็บ

ตรงกับที่คาดไว้

ตรวจวิธีที่ 1 — นับจำนวนก้อน

SOP มี 2 ก้อน (เท่ากับจำนวนแถวที่เป็น 1) · POS มี 6 วงเล็บ (เท่ากับจำนวนแถวที่เป็น 0) ✓

และทุกก้อน ทุกวงเล็บ มีตัวอักษรครบ 3 ตัว ✓

ถ้านับวงเล็บได้ 5 แปลว่าเขียนตกไปหนึ่งแถว — ข้อนี้ POS ยาว ต้องนับให้ดีครับ

2

ที่ ABC = 110

SOP = 1

POS = 1

ตรงกัน

ตรวจวิธีที่ 2 — แทนค่าแถวที่ควรได้ 1

เลือกแถว $ABC = 110$ ครับ ตารางบอกว่าต้องได้ 1

รูป SOP: ก้อนที่ 2 คือ $AB\overline{C} = 1 \cdot 1 \cdot \overline{0} = 1 \rightarrow X = 1$ ✓

รูป POS: ต้องเช็คทั้ง 6 วงเล็บว่าไม่มีวงไหนเป็น 0

$(1+1+0) = 1 \cdot (1+\overline{1}+0) = (1+0+0) = 1 \cdot (1+0+\overline{0}) = 1 \cdot (\overline{1}+1+0) = (0+1+0) = 1 \cdot (0+1+1) = 1 \cdot (0+0+1) = 1$

ทุกวงเล็บเป็น 1 → AND ได้ **1** ✓ ตรงกัน

3

ที่ ABC = 011

SOP = 0

POS = 0

ตรงกัน

ตรวจวิธีที่ 3 — แทนค่าแถวที่ควรได้ 0

เลือกแถว $ABC = 011$ ครับ ตารางบอกว่าต้องได้ 0

รูป SOP: ก้อนแรก $\overline{A}\,\overline{B}C$ มี $\overline{B} = \overline{1} = 0$ → ตก · ก้อนสอง $AB\overline{C}$ มี $A = 0$ → ตก → OR ได้ **0** ✓

รูป POS: วงเล็บ $M_3 = (A + \overline{B} + \overline{C}) = (0 + 0 + 0) = \mathbf{0}$ → AND เจอ 0 ก็เป็น 0 ทันที ✓

สังเกต: วงเล็บที่ทำให้เป็น 0 คือ M_3 พอดี — ตรงกับแถวที่เรากำลังแทนค่า นี่คือลายเซ็นของ maxterm ที่พิสูจน์ในหัวข้อ 3 ครับ

4

```
same_logic(
 SOP, POS, ABC)
 -> True
```

ตรวจวิธีที่ 4 — รัน same_logic() จริง

พี่รัน `same_logic(SOP, POS, ["A","B","C"])` จริงก่อนพิมพ์ลงชีทครับ ได้ `True`

ฟังก์ชันนี้เทียบตารางค่าความจริงของทั้งสองนิพจน์ทีละแถวทั้ง 8 แถว ถ้ามีแถวไหนไม่ตรงจะคืน `False` ทันทีครับ

ผลรันจริงจาก tools/dig.py — ข้อ 2(a)

```
Q2a  X bits = 01000010
     SOP  = A'B'C + ABC'
     POS  = (A+B+C)(A+B'+C)(A+B'+C')(A'+B+C)(A'+B+C')(A'+B'+C')
     sum m[1, 6]   prod M[0, 2, 3, 4, 5, 7]
     same_logic(SOP, POS) = True
```

ชั้น ⑥ กับดักของข้อ 2(a)

3 อย่างที่ทำให้เสียคะแนนข้อนี้

① เขียน POS โดยไม่กลับค่าตัวแปร — กับดักอันดับหนึ่งของทั้ง Assignment ครับ
คำตอบผิดที่จะได้: แถว 0 (000) จะเขียนเป็น $(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$ ซึ่งที่จริงคือ M_7 ไม่ใช่ M_0 — **ผิดไปคนละแถวสุดขั้ว**
ลองแทนค่า $ABC=000$ ดู: $(\overline{0}+\overline{0}+\overline{0})=(1+1+1)=1$ ซึ่งไม่ได้ทำให้เอาต์พุตเป็น 0 เลย — พลาดเป้าหมายทั้งหมด
วิธีกัน: ท่องว่า **"POS กลับสองอย่าง"** แล้วเช็คว่าแถว 000 ต้องได้ $(A+B+C)$ เสมอ

② เขียน POS ตก 1–2 วงเล็บ — ข้อนี้มีถึง 6 วงเล็บ ยาวและน่าเบื่อ คนมักเขียนได้ 4–5
วิธีกัน: เขียน**เลขแถว**ลงกระดาษก่อน (0, 2, 3, 4, 5, 7) แล้วค่อยแปลงทีละตัว ขีดฆ่าไปทีละเลข — จะไม่มีทางตกครับ

③ ใส่เครื่องหมาย $+$ ระหว่างวงเล็บ — เขียนเป็น $(A+B+C)+(A+\overline{B}+C)+\ldots$
ผิดครับ นั่นกลายเป็น OR ยักษ์ตัวเดียว ซึ่งจะเป็น 1 เกือบทุกแถว
POS ต้องคูณระหว่างวงเล็บ — เขียนวงเล็บชนกันไปเลย ไม่ต้องมีเครื่องหมายคั่น

หัวใจของข้อ 2(a)

ตารางที่มี 1 น้อย → SOP สั้น POS ยาว · เขียน POS ให้ครบทุกแถวที่เป็น 0 และอย่าลืมกลับค่าตัวแปรทุกตัว

ข้อ 2(b)

Assignment #4 · ข้อ 2(b) EES271 · Assignment 4

> 2. Convert the following truth tables to Boolean expressions in both SOP and POS forms. — b)

คอลัมน์ X จากบนลงล่างคือ **`1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0`**
โจทย์ซ่อนอะไรไว้: ข้อนี้แถวแรกเป็น **1** และมี 1 ติดกันสองแถวตรงกลาง (แถว 4 กับ 5)
สองแถวที่ติดกันแบบนี้เป็นสัญญาณว่า**ย่อได้** ($A\overline{B}\,\overline{C}+A\overline{B}C=A\overline{B}$) แต่โจทย์ไม่ได้สั่งให้ย่อ — **อย่าย่อโดยไม่ได้สั่ง** เพราะโจทย์ขอรูป SOP จากตารางครับ

ชั้น ① โจทย์ต้นฉบับ — ตารางที่พิมพ์ใหม่จากรูป

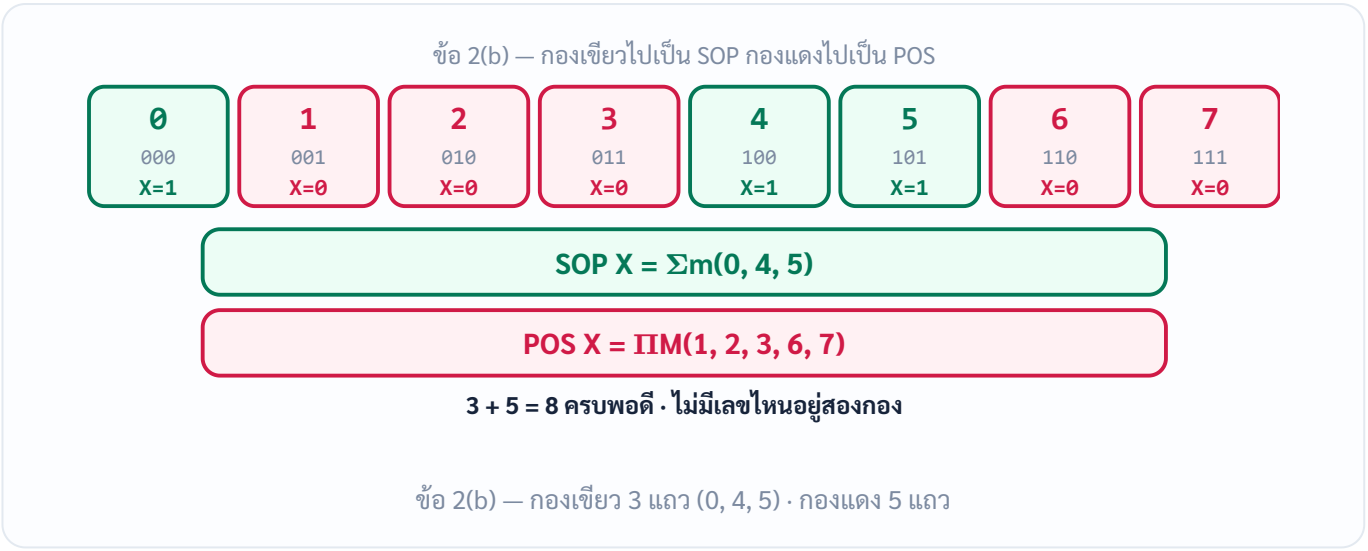
A	B	C	X	minterm	maxterm
0	0	0	1	$m_0=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$	—
0	0	1	0	—	$M_1=(A+B+\overline{C})$

A	B	C	X	minterm	maxterm
0	1	0	0	—	$M_2 = (A + \overline{B} + C)$
0	1	1	0	—	$M_3 = (A + \overline{B} + \overline{C})$
1	0	0	1	$m_4 = A\overline{B}\overline{C}$	—
1	0	1	1	$m_5 = A\overline{B}C$	—
1	1	0	0	—	$M_6 = (\overline{A} + \overline{B} + C)$
1	1	1	0	—	$M_7 = (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})$

ชั้น ② เตรียมก่อนลงมือ

เตรียมอะไร	รายละเอียด
ใช้วิธีไหน	ลำดับ 4 ขั้นเดิมครับ — แยกกอง → SOP → POS → แทนค่าตรวจ
ทำไมเลือกวิธีนี้	เพราะเป็นวิธีที่ตรวจตัวเองได้ทุกขั้น ไม่ต้องรอถึงตอนจบถึงจะรู้ว่าผิด
กฎที่จะใช้	SOP: **0 ใส่ขีด** · POS: **1 ใส่ขีด** (กลับกัน)
คาดคะเนล่วงหน้า	นับ 1 ได้ **3 ตัว** → SOP มี 3 ก้อน · นับ 0 ได้ **5 ตัว** → POS มี 5 วงเล็บ $3 + 5 = 8$ ✓
ต้องย่อไหม	**ไม่ต้องครับ** โจทย์ให้ convert to Boolean expressions in SOP and POS forms — ต้องการรูปมาตรฐานที่ได้จากตาราง ไม่ได้ขอรูปย่อ ถ้าอยากโชว์ก็เขียนเพิ่มต่อท้ายได้ แต่ **คำตอบหลักต้องเป็นรูปเต็ม**

ชั้น ③ ไล่ทีละขั้นพร้อมภาพ



ขั้นที่ 1 กับ 2 — แยกกองแล้วเขียน SOP

ขั้น 1 — แยกสองกอง

· แถว 0 (000) $X = 1$ → **กอง SOP** · แถว 1 (001) $X = 0$ → กอง POS

· แถว 2 (010) $X = 0$ → กอง POS · แถว 3 (011) $X = 0$ → กอง POS

· แถว 4 (100) $X = 1$ → **กอง SOP** · แถว 5 (101) $X = 1$ → **กอง SOP**

· แถว 6 (110) $X = 0$ → กอง POS · แถว 7 (111) $X = 0$ → กอง POS

ตรวจ: 3 + 5 = 8 ✓

ขั้น 2 — เขียน SOP (0 ใส่ขีด · 1 ไม่ใส่)

· แถว 0 = 000 → ใส่ขีดครบสามตัว → $m_0 = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$

· แถว 4 = 100 → $A = 1$ ไม่ใส่ · $B = 0$ ใส่ขีด · $C = 0$ ใส่ขีด → $m_4 = A\overline{B}\,\overline{C}$

· แถว 5 = 101 → $A = 1$ ไม่ใส่ · $B = 0$ ใส่ขีด · $C = 1$ ไม่ใส่ → $m_5 = A\overline{B}C$

$$X = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C$$

ขั้นที่ 3 — เขียน POS (กลับค่าทุกตัว)

ห้าแถว ทำทีละแถวช้า ๆ ครับ กฎคือ **บิต 0 ไม่ใส่ขีด · บิต 1 ใส่ขีด**

· **แถว 1 =** 001 → $A = 0$ ไม่ใส่ · $B = 0$ ไม่ใส่ · $C = 1$ **ใส่ขีด** → $M_1 = (A + B + \overline{C})$

· **แถว 2 =** 010 → $A = 0$ ไม่ใส่ · $B = 1$ ใส่ขีด · $C = 0$ ไม่ใส่ → $M_2 = (A + \overline{B} + C)$

· **แถว 3 =** 011 → $A = 0$ ไม่ใส่ · $B = 1$ ใส่ขีด · $C = 1$ ใส่ขีด → $M_3 = (A + \overline{B} + \overline{C})$

· **แถว 6 =** 110 → $A = 1$ ใส่ขีด · $B = 1$ ใส่ขีด · $C = 0$ ไม่ใส่ → $M_6 = (\overline{A} + \overline{B} + C)$

· **แถว 7 =** 111 → ใส่ขีดครบสามตัว → $M_7 = (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})$

คูณกัน 5 วงเล็บ

$$X = (A + B + \overline{C})(A + \overline{B} + C)(A + \overline{B} + \overline{C})(\overline{A} + \overline{B} + C)(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})$$

ชั้น ④ คำตอบสุดท้าย

คำตอบที่ต้องเขียนลงกระดาษ — ข้อ 2(b)

รูป SOP:

$$X = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C \;=\; \sum m(0, 4, 5)$$

รูป POS:

$$X = (A + B + \overline{C})(A + \overline{B} + C)(A + \overline{B} + \overline{C})(\overline{A} + \overline{B} + C)(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}) \;=\; \prod M(1, 2, 3, 6, 7)$$

“SOP: X = A'B'C' + AB'C' + AB'C = Σm(0,4,5); POS: X = ΠM(1,2,3,6,7).”

เกร็ด (ไม่ต้องเขียนถ้าโจทย์ไม่ขอ): รูปย่อของข้อนี้คือ $X = \overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}$ ได้จากกฎ distributive + complement ของ EP06 ครับ — พี่ตรวจด้วย `same_logic()` แล้วว่าเท่ากันจริง แต่**ไม่ใช่คำตอบของข้อนี้**

ชั้น ⑤ ตรวจคำตอบด้วยวิธีที่สอง

A	B	C	X จาก SOP	X จาก POS
0	0	0	1	**1**
0	0	1	0	**0**
0	1	0	0	**0**
0	1	1	0	**0**
1	0	0	1	**1**
1	0	1	1	**1**
1	1	0	0	**0**
1	1	1	0	**0**

1

3 + 5 = 8

3 ก้อน · 5 วงเล็บ

ตรวจวิธีที่ 1 — นับก้อนและนับตัวอักษร

SOP 3 ก้อน · POS 5 วงเล็บ · รวม 8 ✓

ทุกก้อนมี 3 ตัวอักษร · ทุกวงเล็บมี 3 ตัวอักษรและมี $+$ สองตัว ✓

คอลัมน์เทียบข้างบนตรงกันครบ 8 แถว ✓

2

ที่ ABC = 101

SOP = 1

POS = 1

ตรวจวิธีที่ 2 — แทนค่าแถวที่ควรได้ 1

ที่ $ABC = 101$ ตารางบอกว่าต้องได้ 1

SOP: ก้อนที่ 3 คือ $A\overline{B}C = 1 \cdot \overline{0} \cdot 1 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ → OR ได้ **1** ✓

POS: ไล่ทั้ง 5 วงเล็บ — $(1{+}0{+}\overline{1}) = (1{+}0{+}0) = 1 \cdot (1{+}1{+}1) = 1 \cdot (1{+}1{+}0) = 1 \cdot (0{+}1{+}1) = 1 \cdot (0{+}1{+}0) = 1$

ไม่มีวงไหนเป็น 0 → AND ได้ **1** ✓ ตรงกัน

3

ที่ ABC = 111

SOP = 0

POS = 0

ตรวจวิธีที่ 3 — แทนค่าแถวที่ควรได้ 0

ที่ $ABC = 111$ ตารางบอกว่าต้องได้ 0

SOP: ทุกก้อนมี $\overline{B}$ หรือ $\overline{A}$ ซึ่งเป็น 0 หมด → OR ได้ **0** ✓

POS: วงเล็บสุดท้าย $M_7 = (\overline{1} + \overline{1} + \overline{1}) = (0 + 0 + 0) = \mathbf{0}$ → AND ได้ **0** ทันที ✓

4

```
same_logic(
 SOP, POS)
 -> True
```

ตรวจวิธีที่ 4 — รัน same_logic() จริง

ได้ True ครับ

และรันเทียบกับรูปย่อ $\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}$ ก็ได้ True เหมือนกัน — ยืนยันว่าทั้งสามรูปเป็นฟังก์ชันเดียวกัน

ผลรันจริงจาก tools/dig.py — ข้อ 2(b)

```
Q2b  X bits = 10001100
     SOP  = A'B'C' + AB'C' + AB'C
     POS  = (A+B+C')(A+B'+C)(A+B'+C')(A'+B'+C)(A'+B'+C')
     sum m[0, 4, 5]   prod M[1, 2, 3, 6, 7]
     same_logic(SOP, POS) = True
```

ชั้น ⑥ กับดักของข้อ 2(b)

3 อย่างที่ทำให้เสียคะแนนข้อนี้

① เผลอย่อทั้งที่โจทย์ไม่ได้สั่ง — เห็นแถว 4 กับ 5 ติดกันแล้วอยากรวมเป็น $A\overline{B}$
ปัญหา: ถ้าตอบแค่ $A\overline{B} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ อาจารย์อาจหักคะแนน เพราะโจทย์ขอ**รูปที่แปลงมาจากตาราง** ซึ่งควรเป็น standard form
วิธีกัน: เขียนรูปเต็มเป็นคำตอบหลักก่อน แล้วค่อยเขียนรูปย่อต่อท้ายว่า **"which simplifies to ..."** ครับ ปลอดภัยที่สุด

② เขียน M_1 ผิดเป็น $(A+B+C)$ — แถว 1 คือ 001 มี $C=1$ ต้องใส่ขีดที่ C
คำตอบผิดที่จะได้: $(A+B+C)$ ซึ่งคือ M_0 — ไปดักแถว 000 ที่ควรได้ 1 แทน ทำให้เอาต์พุตแถวแรกกลายเป็น 0 ผิดทันที
วิธีกัน: เช็คทุกวงเล็บว่า "ถ้าแทนค่าแถวนี้ ทุกตัวต้องเป็น 0" ครับ

③ สลับ SOP กับ POS ทั้งข้อ — เขียน SOP จากแถวที่เป็น 0 และ POS จากแถวที่เป็น 1
คำตอบผิดที่จะได้: ได้นิพจน์ของ $\overline{X}$ ทั้งสองรูป — ผิดทั้งข้อ
วิธีกัน: เขียนคำว่า "SOP = แถว 1" กับ "POS = แถว 0" ไว้มุมกระดาษก่อนเริ่มทำครับ

หัวใจของข้อ 2(b)

โจทย์ขอรูปที่แปลงมาจากตาราง ไม่ได้ขอรูปย่อ — เขียนรูปมาตรฐานให้ครบทุกแถวก่อนเสมอ แล้วค่อยเสนอรูปย่อเป็นของแถม

ข้อ 2(c)

Assignment #4 · ข้อ 2(c) EES271 · Assignment 4

> 2. Convert the following truth tables to Boolean expressions in both SOP and POS forms. — c)

คอลัมน์ X จากบนลงล่างคือ **`0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0`**

โจทย์ซ่อนอะไรไว้: ข้อนี้มี 1 อยู่ 3 แถว คือ 1, 2, 4 — สังเกตว่าทั้งสามแถว **มีเลข 1 อยู่บิตเดียว** ในอินพุต (001, 010, 100)

นี่คือฟังก์ชัน “มีอินพุตที่เป็น HIGH เพียงตัวเดียว” ซึ่งเป็นวงจรที่ใช้จริงในการตรวจสัญญาณครับ แต่โจทย์ไม่ได้บอก ต้องสังเกตเอง (ช่วยตรวจคำตอบได้ดีมาก)

ชั้น ① โจทย์ต้นฉบับ — ตารางที่พิมพ์ใหม่จากรูป

A	B	C	X	minterm	maxterm
0	0	0	0	—	$M_0 = (A + B + C)$
0	0	1	1	$m_1 = \overline{A}\overline{B}C$	—
0	1	0	1	$m_2 = \overline{A}B\overline{C}$	—
0	1	1	0	—	$M_3 = (A + \overline{B} + \overline{C})$
1	0	0	1	$m_4 = A\overline{B}\overline{C}$	—
1	0	1	0	—	$M_5 = (\overline{A} + B + \overline{C})$
1	1	0	0	—	$M_6 = (\overline{A} + \overline{B} + C)$
1	1	1	0	—	$M_7 = (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})$

ชั้น ② เตรียมก่อนลงมือ

เตรียมอะไร	รายละเอียด
ใช้วิธีไหน	ลำดับ 4 ขั้นเดิมครับ
ทำไมเลือกวิธีนี้	สม่ำเสมอกับสองข้อก่อน และมีจุดตรวจในตัวทุกขั้น
กฎที่จะใช้	SOP: **0 ใส่ขีด** · POS: **1 ใส่ขีด**
คาดคะเนล่วงหน้า	นับ 1 ได้ **3 ตัว** → SOP 3 ก้อน · นับ 0 ได้ **5 ตัว** → POS 5 วงเล็บ
ความหมายของฟังก์ชัน	แถวที่เป็น 1 คือแถวที่**มีอินพุตเป็น 1 เพียงหนึ่งตัวพอดี** ใช้ตรวจคำตอบได้: ทุก minterm ต้องมีตัวอักษร**ที่ไม่มีขีดบนเพียงตัวเดียว** และอีกสองตัวมีขีดบนครับ

ชั้น ③ ไล่ทีละขั้นพร้อมภาพ

ข้อ 2(c) — กองเขียวไปเป็น SOP กองแดงไปเป็น POS

0	1	2	3	4	5	6	7
000	001	010	011	100	101	110	111
X=0	X=1	X=1	X=0	X=1	X=0	X=0	X=0

SOP X = Σm(1, 2, 4)

POS X = ΠM(0, 3, 5, 6, 7)

3 + 5 = 8 ครบพอดี · ไม่มีเลขไหนอยู่สองกอง

ข้อ 2(c) — กองเขียวคือแถว 1, 2, 4 ซึ่งเป็นแถวที่อินพุตมีเลข 1 อยู่บิตเดียว

ขั้นที่ 1 กับ 2 — แยกกองแล้วเขียน SOP

ขั้น 1 — แยกสองกอง

· แถว 0 (000) $X = 0$ → กอง POS · แถว 1 (001) $X = 1$ → **กอง SOP**

· แถว 2 (010) $X = 1$ → **กอง SOP** · แถว 3 (011) $X = 0$ → กอง POS

· แถว 4 (100) $X = 1$ → **กอง SOP** · แถว 5 (101) $X = 0$ → กอง POS

· แถว 6 (110) $X = 0$ → กอง POS · แถว 7 (111) $X = 0$ → กอง POS

ตรวจ: 3 + 5 = 8 ✓

ขั้น 2 — เขียน SOP (0 ใส่ขีด · 1 ไม่ใส่)

· แถว 1 = 001 → $\overline{A}, \overline{B}, C \rightarrow m_1 = \overline{A}\,\overline{B}C$

· แถว 2 = 010 → $\overline{A}, B, \overline{C} \rightarrow m_2 = \overline{A}B\overline{C}$

· แถว 4 = 100 → $A, \overline{B}, \overline{C} \rightarrow m_4 = A\overline{B}\,\overline{C}$

$$X = \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C}$$

ตรวจกับความหมาย: ทุกก้อนมีตัวอักษรที่ไม่มีขีดบน**ตัวเดียว** ✓ ตรงกับ “มีอินพุตเป็น 1 บิตเดียว” พอดี

ขั้นที่ 3 — เขียน POS (กลับค่าทุกตัว)

· **แถว 0 =** 000 → ทั้งสามเป็น 0 → ไม่ใส่ขีดเลย → $M_0 = (A + B + C)$

· **แถว 3 =** 011 → $A = 0$ ไม่ใส่ · $B = 1$ **ใส่ขีด** · $C = 1$ **ใส่ขีด** → $M_3 = (A + \overline{B} + \overline{C})$

· **แถว 5 =** 101 → $A = 1$ ใส่ขีด · $B = 0$ ไม่ใส่ · $C = 1$ ใส่ขีด → $M_5 = (\overline{A} + B + \overline{C})$

· **แถว 6 =** 110 → $A = 1$ ใส่ขีด · $B = 1$ ใส่ขีด · $C = 0$ ไม่ใส่ → $M_6 = (\overline{A} + \overline{B} + C)$

· **แถว 7 =** 111 → ใส่ขีดครบสามตัว → $M_7 = (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})$

คูณกัน 5 วงเล็บ

$$X = (A + B + C)(A + \overline{B} + \overline{C})(\overline{A} + B + \overline{C})(\overline{A} + \overline{B} + C)(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})$$

ชั้น ④ คำตอบสุดท้าย

คำตอบที่ต้องเขียนลงกระดาษ — ข้อ 2(c)

รูป SOP:

$$X = \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} = \sum m(1,2,4)$$

รูป POS:

$$X = (A+B+C)(A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+B+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+C)(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}) = \prod M(0,3,5,6,7)$$

"SOP: X = A'B'C + A'BC' + AB'C' = Σm(1,2,4); POS: X = ΠM(0,3,5,6,7)."

ชั้น ⑤ ตรวจคำตอบด้วยวิธีที่สอง

A	B	C	X จาก SOP	X จาก POS
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	0	0

1

001
010
100
มีเลข 1 บิตเดียวทุกแถว

ตรวจวิธีที่ 1 — เทียบกับความหมายของฟังก์ชัน

แถวที่เอาต์พุตเป็น 1 คือ 001, 010, 100 ครับ ทุกแถวมีเลข 1 อยู่**บิตเดียว** ใน SOP ทุกก้อนจึงต้องมีตัวอักษรที่**ไม่มีขีด**เพียงตัวเดียว — เช็คแล้ว: $\overline{A}\,\overline{B}\underline{C} \cdot \overline{A}\underline{B}\overline{C} \cdot \underline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ ✓

การตรวจแบบนี้ดีมาก เพราะจับผิดได้ทันทีถ้าเขียนขีดบนสลับครับ

2

ที่ ABC = 010
SOP = 1
POS = 1

ตรวจวิธีที่ 2 — แทนค่าแถวที่ควรได้ 1

ที่ $ABC = 010$

SOP: ก้อนที่ 2 คือ $\overline{A}B\overline{C} = \overline{0} \cdot 1 \cdot \overline{0} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ → OR ได้ **1** ✓

POS: $(0{+}1{+}0) = 1 \cdot (0{+}\overline{1}{+}\overline{0}) = (0{+}0{+}1) = 1 \cdot (\overline{0}{+}1{+}\overline{0}) = (1{+}1{+}1) = 1 \cdot (1{+}0{+}0) = 1 \cdot (1{+}0{+}1) = 1$

ไม่มีวงไหนเป็น 0 → AND ได้ **1** ✓

3

ที่ ABC = 110
SOP = 0
POS = 0

ตรวจวิธีที่ 3 — แทนค่าแถวที่ควรได้ 0

ที่ $ABC = 110$ (มีเลข 1 สองบิต จึงต้องได้ 0 ตามความหมายของฟังก์ชัน)

SOP: ก้อน 1 มี $\overline{A} = 0$ · ก้อน 2 มี $\overline{A} = 0$ · ก้อน 3 มี $\overline{B} = 0$ → ทุกก้อนตก → **0** ✓

POS: วงเล็บที่ 4 คือ $M_6 = (\overline{1} + \overline{1} + 0) = (0 + 0 + 0) = \mathbf{0}$ → AND ได้ **0** ✓ — และเป็นวงเล็บของแถว 6 พอดีตามที่ควรเป็น

4

```
same_logic(
 SOP, POS)
 -> True
```

ตรวจวิธีที่ 4 — รัน same_logic() จริง

ได้ True ครับ และตารางที่ dig สร้างจาก POS ตรงกับบิตที่อ่านจากรูปโจทย์ (01101000) ทุกแถว ✓

ผลรันจริงจาก tools/dig.py — ข้อ 2(c)

```
Q2c  X bits = 01101000
     SOP  = A'B'C + A'BC' + AB'C'
     POS  = (A+B+C)(A+B'+C')(A'+B+C')(A'+B'+C)(A'+B'+C')
     sum m[1, 2, 4]   prod M[0, 3, 5, 6, 7]
     same_logic(SOP, POS) = True
```

ชั้น ⑥ กับดักของข้อ 2(c)

3 อย่างที่ทำให้เสียคะแนนข้อนี้

① สับสนระหว่างแถว 3, 5, 6 — สามแถวนี้เป็น 0 และมีเลข 1 อยู่สองบิตเหมือนกันหมด (011, 101, 110) ตำแหน่งของ 0 ต่างกันแค่บิตเดียว

คำตอบผิดที่จะได้: เขียน M_5 เป็น $(\overline{A} + \overline{B} + C)$ ซึ่งที่จริงคือ M_6

วิธีกัน: ในวงเล็บของ POS ตัวที่**ไม่มีขีดบน**คือบิตที่เป็น 0 ในแถวนั้น — $M_5 = 101$ มี 0 อยู่ที่ B เพราะฉะนั้น B ต้องไม่มีขีดครับ

② ตอบ SOP ถูกแต่ลืมทำ POS — โจทย์ใช้คำว่า `both` ซึ่งแปลว่าต้องมีสองคำตอบต่อหนึ่งตาราง

วิธีกัน: เขียนหัวข้อ “SOP:” และ “POS:” ลงกระดาษก่อนเริ่มทำ จะได้ไม่ลืม

③ นับแถวผิดเพราะแถว 0 กับ 7 อยู่คนละมุม — ข้อนี้กอง POS มีทั้ง M_0 (ขีดครบศูนย์ตัว) และ M_7 (ขีดครบสามตัว) ซึ่งเป็นสองสุดขั้ว คนมักเขียนสลับกัน

วิธีกัน: ท่องคู่นี้ให้แม่นครับ — $M_0 = (A + B + C)$ **ไม่มีขีดเลย** · $M_7 = (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})$ **ขีดครบทุกตัว**

หัวใจของข้อ 2 ทั้งสามข้อย่อย

ตารางเดียวให้สองคำตอบเสมอ · SOP จากแถว 1 (0 ใส่ขีด) · POS จากแถว 0 (1 ใส่ขีด) · แล้วแทนค่าอย่างน้อยสองแถวเพื่อพิสูจน์ว่าทั้งสองรูปให้ตารางเดียวกัน

10 เฉลย Assignment 4 ข้อ 3 (a–b)

โจทย์ข้อ 3 พูดว่าอะไร

3. Construct the truth tables that are described by the following Boolean expressions.

ภาษาพี่: คราวนี้กลับทิศครับ — โจทย์**ให้นิพจน์มา** แล้วให้สร้างตารางค่าความจริง เป็นทิศที่ (3) และ (4) จากหัวข้อ 7

สิ่งที่โจทย์ซ่อนไว้ 3 อย่าง:

① **ขีดบนคลุมตัวไหนบ้าง** — ต้องอ่านให้ชัด ทุกข้อในชุดนี้ขีดบนคลุม**ตัวเดียว** ไม่มีขีดยาวคลุมทั้งก้อน พี่ซูมดูที่ 400 dpi ยืนยันแล้วทุกข้อ

② **บางพจน์ไม่มีตัวแปรครบ** → จะจุด 1 หลายแถว (กฎข้อ (2) ของสไลด์หน้า 20)

③ **ข้อ (b) มี 4 ตัวแปร** → ต้องเขียน **16 แถว** ไม่ใช่ 8

วิธีที่ต้องใช้: ไล่**ทีละพจน์** ทำคอลัมน์ย่อยให้แต่ละพจน์ก่อน แล้วค่อย OR รวม — ห้ามกระโดดไปคำตอบครับ

ข้อ 3(a)

Assignment #4 · ข้อ 3(a) EES271 · Assignment 4

> a) $X = A\overline{B}C + B\overline{C} + ABC$

โจทย์ให้ตารางเปล่า 8 แถว (คอลัมน์ A, B, C, X) มาให้เติมครับ

อ่านขีดบนให้ชัด: พจน์ที่ 1 ขีดคลุม B ตัวเดียว ($A\overline{B}C$) · พจน์ที่ 2 ขีดคลุม C ตัวเดียว ($B\overline{C}$) · พจน์ที่ 3 ไม่มีขีดเลย (ABC)

โจทย์ซ่อนอะไรไว้: พจน์ที่ 2 มีแค่ 2 ตัวแปร (ขาด A) → จะจุด 1 ให้ **2 แถว** ไม่ใช่แถวเดียว

ชั้น ① โจทย์ต้นฉบับ — สิ่งที่ต้องสังเกตก่อนลงมือ

$$X = A\overline{B}C + B\overline{C} + ABC$$

นิพจน์ต้นฉบับจาก Assignment #4 ข้อ 3(a) — คัดมาเป๊ะรวมตำแหน่งขีดบน

พจน์	มีตัวแปรกี่ตัว	เป็น minterm ไหม	จะจุดกี่แถว · ทำไม
$A\overline{B}C$	3 ตัว	**ใช่**	ครบทุกตัวแปร → เป็น minterm → จุด **1 แถว** ($2^{3-3} = 1$)
$B\overline{C}$	2 ตัว	**ไม่ใช่**	ขาด A → A เป็นอะไรก็ได้ → จุด **2 แถว** ($2^{3-2} = 2$)
ABC	3 ตัว	**ใช่**	ครบทุกตัวแปร → จุด **1 แถว**

ชั้น ② เตรียมก่อนลงมือ

เตรียมอะไร	รายละเอียด
ใช้วิธีไหน	ทิศ (3) — ไล่ทีละพจน์ ทำคอลัมน์ย่อย 3 คอลัมน์ แล้ว OR รวม
ทำไมเลือกวิธีนี้	เพราะแทนค่าทีละแถว 8 รอบ ต้องคิด 24 ครั้ง (3 พจน์ × 8 แถว) ช้าและพลาดง่าย ส่วนวิธีไล่ทีละพจน์ คิดแค่ 3 ครั้ง แล้วเติมช่องว่างที่เหลือเป็น 0 ครับ
กฎที่จะใช้	① พจน์บังคับค่าตัวแปรที่มันมี · ตัวแปรที่ไม่มีคือ “อะไรก็ได้” ② ตัวที่มีขีดบนแปลว่าบิตนั้นต้องเป็น **0** · ตัวที่ไม่มีขีดต้องเป็น **1** ③ OR ตามแนวนอน
จำนวนแถว	3 ตัวแปร → $2^3 = 8$ แถว
คาดคะเนล่วงหน้า	จำนวน 1 สูงสุด $= 1 + 2 + 1 = 4$ แถว (ถ้าไม่มีแถวซ้ำกัน) ต้องเช็คตอนท้ายว่าซ้ำกันหรือเปล่าครับ

ชั้น ③ ไล่ทีละขั้นพร้อมภาพ

1



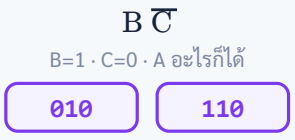
พจน์ที่ 1 — $A\overline{B}C$ จุดแถว 101

เพราะพจน์นี้เป็น AND ล้วน ต้องให้ทุกชิ้นเป็น 1 ครับ

A ไม่มีขีด → ต้องเป็น **1** · $\overline{B}$ มีขีด → B ต้องเป็น **0** · C ไม่มีขีด → ต้องเป็น **1**

ได้ $ABC = 101$ = แถวที่ **5** แถวเดียว (เพราะเป็น minterm)

2



พจน์ที่ 2 — $B\overline{C}$ จุด 2 แถว

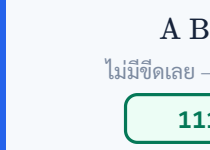
เพราะพจน์นี้พูดถึงแค่ B กับ C ครับ ไม่ได้พูดถึง A เลย

B ไม่มีขีด → ต้องเป็น **1** · $\overline{C}$ มีขีด → C ต้องเป็น **0** · A **ไม่ถูกบังคับ → เป็นได้ทั้ง 0 และ 1**

ได้ $ABC = \underline{0}10$ และ $\underline{1}10$ = แถวที่ **2** และ **6**

นี่คือกฎข้อ (2) ของสไลด์หน้า 20 ที่บอกว่า `non-standard product term will produce more than one row` ครับ

3



พจน์ที่ 3 — ABC จุดแถว 111

เพราะไม่มีตัวไหนมีขีดบนเลย → ทุกตัวต้องเป็น 1

ได้ $ABC = 111$ = แถวที่ **7** แถวเดียว

นี่คือ m_7 ซึ่งเป็น minterm ที่จำง่ายที่สุดครับ (ไม่มีขีด = 1 หมด)

4

0 1 0 → **1**

OR แนวนอน

2, 5, 6, 7

รวมทุกคอลัมน์ย่อยด้วย OR ตามแนวนอน

แถวที่ถูกจุดคือ **5** (จากพจน์ 1) · **2, 6** (จากพจน์ 2) · **7** (จากพจน์ 3)

รวมเป็น **2, 5, 6, 7** — ไม่มีแถวไหนซ้ำกันเลย ตรงกับที่คาดไว้ว่า $1 + 2 + 1 = 4$ แถว

แถวที่เหลือ (0, 1, 3, 4) ไม่ถูกจุดเลย → เป็น 0 (กฎข้อ (3) ของสไลด์)

ตารางเต็มพร้อมคอลัมน์ย่อยของทั้งสามพจน์ครับ — นี่คือสิ่งที่ควรเขียนลงกระดาษคำตอบ

A	B	C	$A\overline{B}C$	$B\overline{C}$	ABC	X	minterm
0	0	0	0	0	0	**0**	—
0	0	1	0	0	0	**0**	—
0	1	0	0	1	0	**1**	$m_2 = \overline{A}B\overline{C}$
0	1	1	0	0	0	**0**	—
1	0	0	0	0	0	**0**	—
1	0	1	1	0	0	**1**	$m_5 = A\overline{B}C$
1	1	0	0	1	0	**1**	$m_6 = AB\overline{C}$
1	1	1	0	0	1	**1**	$m_7 = ABC$

ข้อ 3(a) — ผลลัพธ์ที่ได้จากการไล่ทีละพจน์

0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
000	001	010	011	100	101	110	111
X=0	X=0	X=1	X=0	X=0	X=1	X=1	X=1

SOP X = Σm(2, 5, 6, 7)

POS X = ΠM(0, 1, 3, 4)

4 + 4 = 8 ครบพอดี · ไม่มีเลขไหนอยู่สองกอง

ข้อ 3(a) — ผลลัพธ์ที่ได้: 1 ที่แถว 2, 5, 6, 7 และ 0 ที่แถว 0, 1, 3, 4

ชั้น ④ คำตอบสุดท้าย

คำตอบที่ต้องเขียนลงกระดาษ — ข้อ 3(a)

คอลัมน์ X จากบนลงล่าง (แถว 000 ถึง 111):

0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1

เขียนเป็นสัญกรณ์ได้ว่า $\mathbf{X = \sum m(2,5,6,7) = \prod M(0,1,3,4)}$

"X(A,B,C) = Σm(2,5,6,7); the output is 1 for ABC = 010, 101, 110 and 111."

ชั้น ⑤ ตรวจคำตอบด้วยวิธีที่สอง

1

1 + 2 + 1 = 4

นับ 1 ในคอลัมน์ X ได้ 4
ไม่มีแถวซ้ำ

ตรวจวิธีที่ 1 — นับ 1 ของแต่ละคอลัมน์ย่อย

คอลัมน์ $A\overline{B}C$ ต้องมี 1 **หนึ่งตัว** (เป็น minterm) ✓
คอลัมน์ $B\overline{C}$ ต้องมี 1 **สองตัว** (ขาดตัวแปรหนึ่งตัว) ✓
คอลัมน์ ABC ต้องมี 1 **หนึ่งตัว** ✓
รวม $1 + 2 + 1 = 4$ และไม่มีแถวไหนถูกจุดซ้ำ → คอลัมน์ X ต้องมี 1 อยู่ 4 ตัว ✓

2

แทน ABC = 110
$B\,\overline{C} = 1 \cdot \overline{1} = 1$
X = 1 ตรงกับตาราง

ตรวจวิธีที่ 2 — แทนค่ากลับลงนิพจน์เดิม

ที่ $ABC = 110$: พจน์ 1 $A\overline{B}C = 1 \cdot 0 \cdot 0 = 0$ · พจน์ 2 $B\overline{C} = 1 \cdot \overline{0} = 1 \cdot 1 = 1$ · พจน์ 3 $ABC = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$
OR ได้ $0 + 1 + 0 = \mathbf{1}$ ✓ ตรงกับตาราง
ลองแถวที่ควรได้ 0 ด้วย: ที่ $ABC = 011 \rightarrow 0 \cdot \overline{1} \cdot 1 = 0 \cdot 1 \cdot \overline{1} = 0 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 1 = 0$ → OR ได้ **0** ✓

3

```
truth_table(
 "A&~B&C|B&~C|A&B&C")
 -> 00100111
```

ตรวจวิธีที่ 3 — รันด้วย tools/dig.py จริง

พี่แปลงนิพจน์เป็นรูป Python (`~` คือขีดบน · `&` คือ AND · `|` คือ OR) แล้วรัน `truth_table()` จริงครับ
ได้ `00100111` และ `minterms()` คืน `[2,5,6,7]` ตรงกับที่ทำมือทุกแถว ✓
พี่รันคอลัมน์ย่อยของแต่ละพจน์แยกด้วย เพื่อยืนยันว่า $B\overline{C}$ จุด 2 แถวจริง

ผลรันจริงจาก tools/dig.py — ข้อ 3(a)

```
Q3a        (A & ~B & C) | (B & ~C) | (A & B & C)          -> 00100111
           minterms=[2, 5, 6, 7]  maxterms=[0, 1, 3, 4]
     per-term:
       (A & ~B & C)      -> 00000100   rows=[5]
       (B & ~C)          -> 00100010   rows=[2, 6]
       (A & B & C)       -> 00000001   rows=[7]
```

ชั้น ⑥ กับดักของข้อ 3(a)

3 อย่างที่ทำให้เสียคะแนนข้อนี้

① คิดว่า $B\overline{C}$ จุดแถวเดียว — กับดักหลักของข้อนี้ครับ
คำตอบผิดที่จะได้: ถ้าจุดแค่แถว 010 จะได้ $X = \sum m(2,5,7)$ ทำให้**แถว 110 กลายเป็น 0 ทั้งที่ควรเป็น 1** — ผิด 1 แถว
วิธีกัน: นับตัวอักษรในพจน์ก่อนเสมอ — $B\overline{C}$ มี 2 ตัวในระบบ 3 ตัวแปร → $2^{3-2} = 2$ แถวครับ

② อ่านขีดบนผิดตำแหน่ง — ถ้าอ่าน $B\overline{C}$ เป็น $\overline{B}C$ จะไปจุดแถว 001 กับ 101 แทน
คำตอบผิดที่จะได้: $X = \sum m(1,5,7)$ — **ผิด 3 แถว**
วิธีกัน: ดูว่าขีดอยู่**เหนือตัวอักษรตัวไหน** ให้ชัด ๆ ก่อนลงมือครับ ในข้อนี้ขีดอยู่เหนือ C ไม่ใช่ B

③ ลืมว่าพจน์ที่ 3 ซ้ำซ้อนกับพจน์อื่นได้ — ข้อนี้ ABC (แถว 7) ไม่ซ้ำกับใคร แต่ถ้าโจทย์เปลี่ยนนิดเดียวก็อาจซ้ำได้
ถ้าซ้ำจะเป็นยังไง: ไม่เป็นไรครับ OR ของ $1 + 1$ ยังเป็น 1 (กฎ idempotent จาก EP06) แต่**จำนวน 1 ในคอลัมน์ X จะน้อยกว่าผลบวกที่คาดไว้** — ต้องตรวจตรงนี้ด้วย

หัวใจของข้อ 3(a)

นับตัวอักษรในแต่ละพจน์ก่อนเสมอ — พจน์ที่มีตัวแปรไม่ครบจะจุดหลายแถว และตัวแปรที่หายไปคือตัวที่ “เป็นอะไรก็ได้”

ข้อ 3(b) — ข้อ 4 ตัวแปร 16 แถว

Assignment #4 · ข้อ 3(b) EES271 · Assignment 4

> b) $X = EF + \overline{E}FG\overline{H} + H$

โจทย์ให้ตารางเปล่า **16 แถว** (คอลัมน์ E, F, G, H, X) มาให้เติมครับ

อ่านขีดบนให้ชัด: พจน์ที่ 2 มีขีดบน 2 ที่ คือเหนือ E และเหนือ H ($\overline{E}FG\overline{H}$) — พี่ซูมดูที่ 400 dpi ยืนยันว่าเป็นขีดสั้นสองอัน **ไม่ใช่**ขีดยาวคลุมทั้งก้อน

โจทย์ซ่อนอะไรไว้ 3 อย่าง: ① 4 ตัวแปร → **16 แถว** ② พจน์ H มีตัวแปรตัวเดียว → จุดถึง **8 แถว** ③ พจน์ EF กับ H จะจุด**ซ้ำ**กันบางแถว

ชั้น ① โจทย์ต้นฉบับ — สิ่งที่ต้องสังเกตก่อนลงมือ

$$X = EF + \overline{E}FG\overline{H} + H$$

นิพจน์ต้นฉบับจาก Assignment #4 ข้อ 3(b) — ตัวแปรคือ E, F, G, H ($n = 4$)

พจน์	มีตัวแปรกี่ตัว	เป็น minterm ไหม	จะจุดกี่แถว · ทำไม
EF	2 ตัว	**ไม่ใช่**	ขาด G กับ H → สองตัวนี้เป็นอะไรก็ได้ → จุด $2^{4-2} = \mathbf{4}$ แถว
$\overline{E}FG\overline{H}$	4 ตัว	**ใช่**	ครบทุกตัวแปร → จุด $2^{4-4} = \mathbf{1}$ แถว
H	1 ตัว	**ไม่ใช่**	ขาด E, F, G → สามตัวนี้เป็นอะไรก็ได้ → จุด $2^{4-1} = \mathbf{8}$ แถว

พจน์ที่มีตัวแปรตัวเดียวก็เป็น product term ได้

สไลด์หน้า 2 เขียนไว้ชัดเจนครับว่า **“A single literal is also a product term.”**
เพราะฉะนั้น H ตัวเดียวโดด ๆ ก็เป็นพจน์ที่ถูกต้อง ไม่ใช่ความผิดพลาดในโจทย์

ความหมายของมัน: “ถ้า $H = 1$ ให้เอาต์พุตเป็น 1 ทันที ไม่ต้องสนใจตัวอื่นเลย” ซึ่งกินไปครึ่งตาราง (8 แถว) เลยครับ

ชั้น ② เตรียมก่อนลงมือ

เตรียมอะไร	รายละเอียด
ใช้วิธีไหน	ไล่ทีละพจน์เหมือนข้อ (a) ครับ — แต่ข้อนี้**จำเป็นกว่า** เพราะ 16 แถว ถ้าแทนค่าทีละแถวต้องคิด 48 ครั้ง
ทำไมเลือกวิธีนี้	ไล่ทีละพจน์คิดแค่ 3 ครั้ง แล้วเติมช่องที่เหลือเป็น 0 — เร็วกว่ามากและตรวจง่ายครับ

เตรียมอะไร	รายละเอียด
ลำดับบิต	E เป็นบิตซ้ายสุด (MSB) · H เป็นบิตขวาสุด (LSB) ตามหัวคอลัมน์ในโจทย์ เลขแถว $= 8E + 4F + 2G + H$ (positional จาก EP01)
จำนวนแถว	4 ตัวแปร → $2^4 = \mathbf{16}$ แถว — **ห้ามเขียนแค่ 8**
คาดคะเนล่วงหน้า	ผลบวกดิบ $= 4 + 1 + 8 = 13$ แต่**ต้องมีแถวซ้ำแน่นอน** เพราะ EF กับ H ทับกันได้ → จำนวน 1 จริงจะ**น้อยกว่า 13** ครับ

ชั้น ③ ไล่ทีละขั้นพร้อมภาพ

1

E F

E=1 · F=1 · G,H อะไรก็ได้

1100 1101 1110 1111

แถว 12, 13, 14, 15

พจน์ที่ 1 — EF จุด 4 แถว

เพราะบังคับแค่ $E = 1$ และ $F = 1$ ครับ ส่วน G กับ H ไม่ถูกพูดถึงเลย G เป็นได้ 2 อย่าง × H เป็นได้ 2 อย่าง = **4 ชุด**

ได้ $EFGH = 1100, 1101, 1110, 1111$ → แถวที่ **12, 13, 14, 15**

(เลขแถวมาจาก $8\times1 + 4\times1 + 2G + H$ ครับ)

2

$\overline{\text{E}}$ F G $\overline{\text{H}}$

E=0 · F=1 · G=1 · H=0

0110

พจน์ที่ 2 — $\overline{E}FG\overline{H}$ จุดแถว 6 แถวเดียว

เพราะมีตัวแปรครบทั้ง 4 ตัว → เป็น minterm → จุดแถวเดียวแน่นอน

$\overline{E}$ มีขีด → $E = 0$ · F ไม่มีขีด → $F = 1$ · G ไม่มีขีด → $G = 1$ · $\overline{H}$ มีขีด → $H = 0$

ได้ $EFGH = 0110$ → เลขแถว $= 0 + 4 + 2 + 0 = \mathbf{6}$

3

H

H=1 · E,F,G อะไรก็ได้

1 3 5 7 9 11

และ 13, 15 — เลขคี่ทั้งหมด 8 ตัว

พจน์ที่ 3 — H จุด 8 แถว (ครึ่งตาราง)

เพราะบังคับแค่ $H = 1$ ตัวเดียว อีกสามตัวเป็นอะไรก็ได้ → $2^3 = 8$ แถว

H เป็นบิตขวาสุด (LSB) เพราะฉะนั้น **แถวที่ $H = 1$ คือแถวที่มีเลขเป็นจำนวนคี่**

ได้แถว **1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15** ครับ

เทคนิคจำ: คอลัมน์ขวาสุดของตารางสลับ 0-1 ทุกแถว → แถวคี่คือแถวที่ $H = 1$ เสมอ

4

4 + 1 + 8 = 13 (ดิบ)

แถว 13, 15 ซ้ำ

เหลือ 11 แถว

รวมด้วย OR แล้วตัดแถวซ้ำ

รวมสามกอง: $\{12, 13, 14, 15\} \cup \{6\} \cup \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$

แถว 13 กับ 15 ถูกจุดสองครั้ง (อยู่ทั้งในกอง EF และกอง H) ครับ — เพราะแถวพวกนี้มี $E = 1, F = 1$ และ $H = 1$ พร้อมกัน

OR ของ $1 + 1$ ยังเป็น 1 (idempotent จาก EP06) → นับเป็นแถวเดียว

ได้ทั้งหมด **11 แถว**: 1, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 14, 15

แถวที่เหลือ **0, 2, 4, 8, 10** เป็น 0

ตารางเต็ม 16 แถวพร้อมคอลัมน์ย่อยของทั้งสามพจน์ครับ

E	F	G	H	EF	$\overline{E}FG\overline{H}$	H	X
0	0	0	0	0	0	0	**0**
0	0	0	1	0	0	1	**1**
0	0	1	0	0	0	0	**0**
0	0	1	1	0	0	1	**1**
0	1	0	0	0	0	0	**0**
0	1	0	1	0	0	1	**1**
0	1	1	0	0	1	0	**1**
0	1	1	1	0	0	1	**1**
1	0	0	0	0	0	0	**0**
1	0	0	1	0	0	1	**1**
1	0	1	0	0	0	0	**0**
1	0	1	1	0	0	1	**1**
1	1	0	0	1	0	0	**1**
1	1	0	1	1	0	1	**1**
1	1	1	0	1	0	0	**1**
1	1	1	1	1	0	1	**1**

ชั้น ④ คำตอบสุดท้าย

คำตอบที่ต้องเขียนลงกระดาษ — ข้อ 3(b)

คอลัมน์ X จากบนลงล่าง (แถว 0000 ถึง 1111):

0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1

เขียนเป็นสัญกรณ์ได้ว่า

$$X = \sum m(1, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 14, 15)$$

$$X = \prod M(0, 2, 4, 8, 10)$$

ตรวจ: $11 + 5 = 16 = 2^4$ ✓

“X(E,F,G,H) = Σm(1,3,5,6,7,9,11,12,13,14,15) = ΠM(0,2,4,8,10).”

ชั้น ⑤ ตรวจคำตอบด้วยวิธีที่สอง

1

แถวที่เป็น 0

0, 2, 4, 8, 10

เลขคู่ทั้งหมด

ตรวจวิธีที่ 1 — ตรวจจากตรรกะของสูตร ไม่ใช่จากตาราง

คิดกลับด้านครับ: X จะเป็น 0 ก็ต่อเมื่อ**ทุกพจน์เป็น 0 พร้อมกัน**

· H ต้องเป็น 0 → **แถวต้องเป็นเลขคู่** (ตัดไป 8 แถว)

· EF ต้องเป็น 0 → ห้าม E กับ F เป็น 1 พร้อมกัน → ตัดแถว 12, 14 ออก

· $\overline{E}FG\overline{H}$ ต้องเป็น 0 → ตัดแถว 6 ออก

เหลือแถวคู่ที่ไม่ถูกตัด: 0, 2, 4, 8, 10 — **5 แถว ตรงกับตาราง** ✓

2

แทน EFGH = 0110

$\mathrm{EF{=}0 \cdot EFGH{=}1 \cdot H{=}0}$

X = 1 ตรงกับตาราง

ตรวจวิธีที่ 2 — แทนค่าแถว 6 (แถวที่มีพจน์เดียวรับผิดชอบ)

พี่เลือกแถว 6 ($EFGH = 0110$) เพราะเป็นแถวที่**มีแค่พจน์ที่ 2 พจน์เดียว**ที่ทำให้เป็น 1 ถ้าเขียนพจน์นี้ผิด จะจับได้ทันทีครับ

· $EF = 0 \cdot 1 = 0$

· $\overline{E}FG\overline{H} = \overline{0} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \overline{0} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = \mathbf{1}$

· $H = 0$

OR ได้ $0 + 1 + 0 = \mathbf{1}$ ✓ ตรงกับตาราง

3

แทน EFGH = 1010

ทุกพจน์เป็น 0

X = 0 ตรงกับตาราง

ตรวจวิธีที่ 3 — แทนค่าแถวที่ควรได้ 0

ที่ $EFGH = 1010$ (แถวที่ 10)

· $EF = 1 \cdot 0 = 0$ (เพราะ $F = 0$)

· $\overline{E}FG\overline{H} = \overline{1} \cdot 0 \cdot 1 \cdot \overline{0} = 0$ (ตกสองที่: $\overline{E} = 0$ และ $F = 0$)

· $H = 0$

OR ได้ $0 + 0 + 0 = \mathbf{0}$ ✓

4

```
truth_table(
 "E&F|~E&F&G&~H|H")
 -> 0101011101011111
```

ตรวจวิธีที่ 4 — รันด้วย tools/dig.py จริง

ได้ 16 บิต `0101011101011111` และ `minterms()` คืน `[1,3,5,6,7,9,11,12,13,14,15]` ครับ

ตรงกับตารางที่ทำมือทุกแถว ✓ และพี่รันคอลัมน์ย่อยแยกด้วยเพื่อยืนยันว่า H จุด 8 แถวจริง และ EF จุด 4 แถวจริง

ผลรันจริงจาก tools/dig.py — ข้อ 3(b)

```
Q3b        (E & F) | (~E & F & G & ~H) | H              -> 0101011101011111
           minterms=[1, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 14, 15]  maxterms=[0, 2, 4, 8, 10]
     per-term:
       (E & F)              -> 0000000000001111  rows=[12, 13, 14, 15]
       (~E & F & G & ~H)    -> 0000001000000000  rows=[6]
       H                    -> 0101010101010101  rows=[1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15]
```

ชั้น ⑥ กับดักของข้อ 3(b)

4 อย่างที่ทำให้เสียคะแนนข้อนี้

① เขียนแค่ 8 แถว — ข้อ (a) มี 3 ตัวแปร (8 แถว) พอมาข้อ (b) เป็น 4 ตัวแปร ต้องเป็น **16 แถว** ครับ
คำตอบผิดที่จะได้: ตารางหายไปครึ่งหนึ่ง เสียคะแนนเต็ม ๆ
วิธีกัน: นับชื่อตัวแปรที่ไม่ซ้ำกันก่อนเสมอ — ข้อนี้มี E, F, G, H = 4 ตัว → $2^4 = 16$ แถว (โจทย์ก็ให้ช่องมา 16 ช่องอยู่แล้ว ให้ดูจำนวนช่องด้วย)

② คิดว่า H ตัวเดียวไม่ใช่พจน์ — บางคนคิดว่าเขียนผิดแล้วเติม $\overline{H}$ เข้าไปเอง
สไลด์บอกชัดว่า a single literal is also a product term ครับ
คำตอบผิดที่จะได้: ถ้ามองข้ามพจน์ H ไปจะได้ $\sum m(6, 12, 13, 14, 15)$ แค่ 5 แถว แทนที่จะเป็น 11 แถว — **ผิด 6 แถว**

③ อ่านขีดบนของ $\overline{E}FG\overline{H}$ ผิด — ถ้าเผลออ่านเป็นขีดยาวคลุมทั้งก้อน $\overline{EFGH}$ จะกลายเป็นคนละเรื่องเลย (จะเป็น 1 ถึง 15 แถว)
วิธีกัน: ดูความยาวของขีดครับ ขีดที่คลุมตัวเดียวจะสั้นและอยู่เหนือตัวอักษรตัวนั้นพอดี ในโจทย์นี้มีขีดสั้นสองอันแยกกัน คือเหนือ E และเหนือ H

④ นับจำนวน 1 ได้ 13 แล้วคิดว่าถูก — ผลบวกดิบคือ $4 + 1 + 8 = 13$ แต่คำตอบจริงคือ 11 เพราะแถว 13 กับ 15 ถูกจุดซ้ำ
วิธีกัน: พอผลบวกดิบเกินจำนวนแถวหรือเข้าใกล้มาก ให้**สงสัยไว้ก่อนว่ามีซ้ำ** แล้วไล่ดูว่ากองไหนทับกันครับ

หัวใจของข้อ 3(b)

4 ตัวแปรต้องมี 16 แถว · พจน์ที่มีตัวแปรตัวเดียวจุดครึ่งตาราง · ผลบวกดิบของแต่ละพจน์อาจมากกว่าจำนวน 1 จริง เพราะแถวซ้ำกันได้

11 เฉลย Assignment 4 ข้อ 3 (c–d)

สองข้อสุดท้ายของ Assignment ชุดนี้

คำสั่งเดิมครับ **"Construct the truth tables that are described by the following Boolean expressions."**
สองข้อนี้กลับมาเป็น **3 ตัวแปร 8 แถว** แต่ชื่อตัวแปรเปลี่ยนเป็น I, J, K และ L, M, N ครับ
ทำไมอาจารย์ถึงเปลี่ยนชื่อตัวแปร: เพื่อทดสอบว่านักศึกษา**เข้าใจหลักการ** หรือแค่ท่องตำแหน่งของ A, B, C มา — วิธีทำเหมือนกันเป๊ะ ขอแค่ยึด**ลำดับตามหัวคอลัมน์ในตาราง**ครับ

ข้อ 3(c)

Assignment #4 · ข้อ 3(c) EES271 · Assignment 4

> c) $X = \overline{I}JK + IJ$

โจทย์ให้ตารางเปล่า 8 แถว (คอลัมน์ I, J, K, X) มาให้เติมครับ
อ่านขีดบนให้ชัด: ขีดคลุม I ตัวเดียวในพจน์แรก ($\overline{I}JK$) · พจน์ที่สองไม่มีขีดเลย (IJ)
โจทย์ซ่อนอะไรไว้: ① พจน์ที่สองมีแค่ 2 ตัวแปร (ขาด K) → จุด 2 แถว ② **ตัวอักษร I ตัวใหญ่หน้าตาคล้ายเลข 1 และคล้ายตัว l** ต้องอ่านให้ดี ๆ ③ ทั้งสองพจน์มี J ที่ไม่มีขีดเหมือนกัน → แปลว่า J ต้องเป็น 1 เสมอถึงจะได้เอาต์พุต 1

ชั้น ① โจทย์ต้นฉบับ — สิ่งที่ต้องสังเกตก่อนลงมือ

$$X = \overline{I}JK + IJ$$

นิพจน์ต้นฉบับจาก Assignment #4 ข้อ 3(c) — ตัวแปรคือ I, J, K ($n = 3$)

พจน์	มีตัวแปรกี่ตัว	เป็น minterm ไหม	จะจุดกี่แถว · ทำไม
$\overline{I}JK$	3 ตัว	**ใช่**	ครบทุกตัวแปร → จุด $2^{3-3} = \mathbf{1}$ แถว
IJ	2 ตัว	**ไม่ใช่**	ขาด K → K เป็นอะไรก็ได้ → จุด $2^{3-2} = \mathbf{2}$ แถว

ข้อสังเกตที่ช่วยตรวจคำตอบข้อนี้

ทั้งสองพจน์มี J **ที่ไม่มีขีดบน** อยู่ด้วยกันทั้งคู่ครับ
แปลว่า**ถ้า** $J = 0$ **ทั้งสองพจน์จะเป็น 0 แน่นอน** → เอาต์พุตต้องเป็น 0
ผลที่ใช้ตรวจได้: ทุกแถวที่ $J = 0$ (คือแถว 000, 001, 100, 101 = แถว 0, 1, 4, 5) **ต้องเป็น 0 หมด** ครับ ถ้าคำตอบมี 1 โผล่ในแถวพวกนี้ แปลว่าทำผิดแน่นอน
เหลือแค่ 4 แถวที่ $J = 1$ ให้พิจารณา — งานเบาลงครึ่งหนึ่งทันที

ชั้น ② เตรียมก่อนลงมือ

เตรียมอะไร	รายละเอียด
ใช้วิธีไหน	ไล่ทีละพจน์ ทำคอลัมน์ย่อย 2 คอลัมน์ แล้ว OR รวม (ทิศ (3))
ทำไมเลือกวิธีนี้	สม่ำเสมอกับข้อ (a) และ (b) และตรวจตัวเองได้ทุกขั้น ข้อนี้มีแค่ 2 พจน์ ยิ่งเร็วครับ
ลำดับบิต	I ซ้ายสุด · J กลาง · K ขวาสุด ตามหัวคอลัมน์ในโจทย์ เลขแถว $= 4I + 2J + K$
จำนวนแถว	3 ตัวแปร → $2^3 = \mathbf{8}$ แถว
คาดคะเนล่วงหน้า	ผลบวกดิบ $= 1 + 2 = 3$ แถว ต้องเช็คว่าซ้ำกันไหม: พจน์แรกบังคับ $I = 0$ · พจน์สองบังคับ $I = 1$ — **ขัดกัน จึงซ้ำกันไม่ได้เลย** → จำนวน 1 จะเป็น 3 แน่นอน

ชั้น ③ ไล่ทีละขั้นพร้อมภาพ

1

$\overline{\text{I}}\,\text{J}\,\text{K}$

I=0 · J=1 · K=1

`011`

พจน์ที่ 1 — $\overline{I}JK$ จุดแถว 011

เพราะมีตัวแปรครบ 3 ตัว → เป็น minterm → จุดแถวเดียว

$\overline{I}$ มีขีด → I ต้องเป็น **0** · J ไม่มีขีด → ต้องเป็น **1** · K ไม่มีขีด → ต้องเป็น **1**

ได้ $IJK = 011$ → เลขแถว $= 0 + 2 + 1 = \mathbf{3}$

2

$\text{I}\,\text{J}$

I=1 · J=1 · K อะไรก็ได้

`110` `111`

พจน์ที่ 2 — IJ จุด 2 แถว

เพราะพูดถึงแค่ I กับ J ครับ ไม่ได้พูดถึง K เลย → K เป็นได้ทั้ง 0 และ 1

I ไม่มีขีด → ต้องเป็น **1** · J ไม่มีขีด → ต้องเป็น **1**

ได้ $IJK = 11\underline{0}$ และ $11\underline{1}$ → แถวที่ **6** และ **7**

3

พจน์ 1 ต้อง I=0 · พจน์ 2 ต้อง I=1

ขัดกัน → ซ้ำกันไม่ได้

`3, 6, 7`

รวมด้วย OR — ไม่มีแถวซ้ำแน่นอน

พจน์แรกบังคับ $I = 0$ ส่วนพจน์ที่สองบังคับ $I = 1$ ครับ — **ตัวแปรเดียวกันจะเป็นทั้ง 0 และ 1 พร้อมกันไม่ได้**

เพราะฉะนั้นสองกองนี้**ไม่มีทางทับกัน** → จำนวน 1 = $1 + 2 = 3$ พอดี

แถวที่เป็น 1 คือ **3, 6, 7** · แถวที่เหลือ (0, 1, 2, 4, 5) เป็น 0

I	J	K	$\overline{I}JK$	IJ	X	minterm
0	0	0	0	0	**0**	—
0	0	1	0	0	**0**	—
0	1	0	0	0	**0**	—
0	1	1	1	0	**1**	$m_3 = \overline{I}JK$
1	0	0	0	0	**0**	—
1	0	1	0	0	**0**	—
1	1	0	0	1	**1**	$m_6 = IJ\overline{K}$
1	1	1	0	1	**1**	$m_7 = IJK$

ข้อ 3(c) — ผลลัพธ์ที่ได้จากการไล่ทีละพจน์

0	1	2	3	4	5	6	7
000	001	010	011	100	101	110	111
X=0	X=0	X=0	X=1	X=0	X=0	X=1	X=1

SOP X = Σm(3, 6, 7)

POS X = ΠM(0, 1, 2, 4, 5)

3 + 5 = 8 ครบพอดี · ไม่มีเลขไหนอยู่สองกอง

ข้อ 3(c) — 1 ที่แถว 3, 6, 7 และ 0 ที่แถว 0, 1, 2, 4, 5

ชั้น ④ คำตอบสุดท้าย

คำตอบที่ต้องเขียนลงกระดาษ — ข้อ 3(c)

คอลัมน์ X จากบนลงล่าง (แถว 000 ถึง 111):

0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1

เขียนเป็นสัญกรณ์ได้ว่า $\mathbf{X = \sum m(3,6,7) = \prod M(0,1,2,4,5)}$

ตรวจ: $3 + 5 = 8$ ✓

“X(I,J,K) = Σm(3,6,7); the output is 1 for IJK = 011, 110 and 111.”

ชั้น ⑤ ตรวจคำตอบด้วยวิธีที่สอง

1

000 001 100 101

ทุกแถวที่ J = 0

ต้องเป็น 0 หมด

ตรวจวิธีที่ 1 — ใช้ข้อสังเกตเรื่อง J

ทั้งสองพจน์มี J ที่ไม่มีขีดบน → ถ้า $J = 0$ ทั้งสองพจน์เป็น 0 → เอาต์พุตเป็น 0

แถวที่ $J = 0$ คือ 000, 001, 100, 101 (แถว 0, 1, 4, 5)

ดูคำตอบ: แถว 0, 1, 4, 5 เป็น 0 ทั้งหมด ✓ **ตรงตามที่ทำนาย**

และแถวที่ $J = 1$ (2, 3, 6, 7) มีที่เป็น 1 อยู่ 3 แถว เป็น 0 อยู่ 1 แถว (แถว 2) — แถว 2 คือ $IJK = 010$ ซึ่ง $K = 0$ ทำให้พจน์แรกตก และ $I = 0$ ทำให้พจน์สองตก ✓

2

แทน IJK = 110

IJ = 1 · 1 = 1

X = 1 ตรงกับตาราง

ตรวจวิธีที่ 2 — แทนค่าแถวที่ควรได้ 1

ที่ $IJK = 110$:

· $\overline{I}JK = \overline{1} \cdot 1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 \cdot 0 = 0$ (ตกสองที่)

· $IJ = 1 \cdot 1 = \mathbf{1}$

OR ได้ $0 + 1 = \mathbf{1}$ ✓ ตรงกับตาราง

ข้อสังเกต: แถวนี้ $K = 0$ แต่ก็ยังได้ 1 เพราะพจน์ IJ ไม่สนใจ K เลย — นี่คือหลักฐานว่าพจน์ที่ขาดตัวแปรจุดหลายแถวจริงครับ

3

แทน IJK = 010

ทั้งสองพจน์เป็น 0

X = 0 ตรงกับตาราง

ตรวจวิธีที่ 3 — แทนค่าแถวที่ควรได้ 0 (แถวที่ใกล้เคียงที่สุด)

พี่เลือกแถว $IJK = 010$ เพราะมันใกล้เคียงกับแถว 011 ที่เป็น 1 มากต่างกันแค่บิตเดียว

· $\overline{I}JK = \overline{0} \cdot 1 \cdot 0 = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$ (ตกเพราะ $K = 0$)

· $IJ = 0 \cdot 1 = 0$ (ตกเพราะ $I = 0$)

OR ได้ $0 + 0 = \mathbf{0}$ ✓ — ยืนยันว่าแถว 2 เป็น 0 จริง ไม่ได้เผลอจุดเกิน

4

```
truth_table(
 "~I&J&K | I&J")
 -> 00010011
```

ตรวจวิธีที่ 4 — รันด้วย tools/dig.py จริง

ได้ `00010011` และ **minterms()** คืน `[3,6,7]` ครับ

รันคอลัมน์ย่อยแยกด้วย: $\overline{I}JK$ ได้ rows=[3] และ IJ ได้ rows=[6,7] ตรงกับที่ทำมือทุกแถว ✓

ผลรันจริงจาก tools/dig.py — ข้อ 3(c)

```
Q3c        (~I & J & K) | (I & J)                    -> 00010011
           minterms=[3, 6, 7]  maxterms=[0, 1, 2, 4, 5]
     per-term:
       (~I & J & K)      -> 00010000   rows=[3]
       (I & J)           -> 00000011   rows=[6, 7]
```

ชั้น ⑥ กับดักของข้อ 3(c)

3 อย่างที่ทำให้เสียคะแนนข้อนี้

① อ่าน I เป็นเลข 1 — ตัวอักษร I ตัวใหญ่ในฟอนต์ของข้อสอบหน้าตาคล้ายเลข 1 มากครับ
วิธีกัน: ดูหัวคอลัมน์ของตารางที่โจทย์ให้มา — เขียนว่า I, J, K ชัดเจน เพราะฉะนั้นตัวที่คล้ายเลข 1 ในนิพจน์ต้องเป็นตัวแปร I แน่นอน

② คิดว่า IJ จุดแค่แถว 110 — ลืมว่า K เป็นอะไรก็ได้
คำตอบผิดที่จะได้: $X = \sum m(3,6)$ ทำให้**แถว 111 กลายเป็น 0** ทั้งที่ควรเป็น 1
วิธีกัน: นับตัวอักษร — IJ มี 2 ตัวในระบบ 3 ตัวแปร → $2^{3-2} = 2$ แถวครับ

③ เผลอย่อนิพจน์ก่อนทำตาราง — บางคนเห็นแล้วอยากย่อเป็น $J(\overline{I}K + I)$ แล้วใช้กฎ absorption ต่อ
ไม่ผิดครับ แต่เสี่ยง — ถ้าย่อผิดจะทำให้ตารางผิดทั้งตาราง และเสียเวลาโดยไม่จำเป็น
วิธีที่ปลอดภัย: สร้างตารางจากรูปเดิมก่อน แล้วถ้าอยากย่อค่อยย่อทีหลังแล้วเทียบตารางกัน (ที่จริงข้อนี้ย่อได้เป็น $X = J(I + K)$ ครับ พี่ตรวจด้วย `same_logic()` แล้วว่าเท่ากันจริง)

หัวใจของข้อ 3(c)

สองพจน์ที่บังคับตัวแปรเดียวกันเป็นคนละค่า จะไม่มีทางจุดแถวซ้ำกัน · และตัวแปรที่ไม่มีขีดในทุกพจน์ (ข้อนี้คือ J) คือกุญแจตรวจคำตอบที่เร็วที่สุด

ข้อ 3(d)

Assignment #4 · ข้อ 3(d) EES271 · Assignment 4

> d) $X = LMN + L\overline{M}\,\overline{N} + \overline{L}M\overline{N}$

โจทย์ให้ตารางเปล่า 8 แถว (คอลัมน์ L, M, N, X) มาให้เติมครับ
อ่านขีดบนให้ชัด: พี่ซูมที่ 400 dpi แล้วยืนยันว่า พจน์ที่ 1 ไม่มีขีดเลย (LMN) · พจน์ที่ 2 มีขีดบน M และ N ($L\overline{M}\,\overline{N}$) · พจน์ที่ 3 มีขีดบน L และ N ($\overline{L}M\overline{N}$)
โจทย์ซ่อนอะไรไว้: ทั้งสามพจน์**มีตัวแปรครบ 3 ตัวทุกพจน์** → เป็น minterm ทั้งหมด → จุดพจน์ละแถวเดียว — ข้อนี้ง่ายที่สุดในสี่ข้อ แต่**ต้องอ่านขีดบนให้ถูกทุกตัว** เพราะพลาดขีดเดียวคือผิดแถว

ชั้น ① โจทย์ต้นฉบับ — สิ่งที่ต้องสังเกตก่อนลงมือ

$$X = LMN + L\overline{M}\,\overline{N} + \overline{L}M\overline{N}$$

นิพจน์ต้นฉบับจาก Assignment #4 ข้อ 3(d) — ตัวแปรคือ L, M, N ($n = 3$)

พจน์	มีตัวแปรกี่ตัว	เป็น minterm ไหม	บังคับค่าอะไร · จุดแถวไหน
LMN	3 ตัว	**ใช่**	ไม่มีขีดเลย → $L=1, M=1, N=1$ → แถว **111** (แถวที่ 7)
$L\overline{M}\,\overline{N}$	3 ตัว	**ใช่**	ขีดที่ M กับ N → $L=1, M=0, N=0$ → แถว **100** (แถวที่ 4)
$\overline{L}M\overline{N}$	3 ตัว	**ใช่**	ขีดที่ L กับ N → $L=0, M=1, N=0$ → แถว **010** (แถวที่ 2)

ชั้น ② เตรียมก่อนลงมือ

เตรียมอะไร	รายละเอียด
ใช้วิธีไหน	ไล่ทีละพจน์ครับ — แต่ข้อนี้ง่ายเป็นพิเศษเพราะทุกพจน์เป็น minterm แปลง**ตัวอักษรเป็นเลขฐานสอง**ตรง ๆ ได้เลย
ทำไมเลือกวิธีนี้	เมื่อทุกพจน์เป็น minterm วิธีนี้กลายเป็น “ทางลัด” ของหัวข้อ 2 พอดี — **มีขีด = บิต 0 · ไม่มีขีด = บิต 1**
กฎที่จะใช้	อ่านทีละตัวอักษรจากซ้ายไปขวา ตัวไหนมีขีดเขียน 0 ตัวไหนไม่มีเขียน 1 แล้วแปลงเลขฐานสองเป็นฐานสิบด้วย positional (EP01)
จำนวนแถว	3 ตัวแปร → $2^3 = 8$ แถว
คาดคะเนล่วงหน้า	3 พจน์ × 1 แถว = **3 แถว** ที่เป็น 1 · อีก **5 แถว** เป็น 0 และเนื่องจากทุกพจน์เป็น minterm ที่**ต่างกันคนละแถว** จึงไม่มีทางซ้ำเลย

ชั้น ③ ไล่ทีละขั้นพร้อมภาพ

1

L M N

ไม่มีขีดเลย → 1 ทั้งสามตัว

111 = แถว 7

พจน์ที่ 1 — LMN จุดแถว 7

เพราะเป็น AND ล้วนที่ต้องให้ทุกชิ้นเป็น 1 และไม่มีตัวไหนมีขีดบน → ต้องให้ L, M, N เป็น 1 หมด

$LMN = 111$ → เลขแถว $= 4 + 2 + 1 =$ **7**

นี่คือ m_7 ซึ่งเป็น minterm ที่จำง่ายที่สุดครับ (แถวสุดท้ายเสมอ)

2

L $\overline{\text{M}}$ $\overline{\text{N}}$

ขีดที่ M และ N → 0, 0

100 = แถว 4

พจน์ที่ 2 — $L\overline{M}\,\overline{N}$ จุดแถว 4

เพราะL ไม่มีขีด → $L = 1 \cdot \overline{M}$ มีขีด → $M = 0 \cdot \overline{N}$ มีขีด → $N = 0$

$LMN = 100$ → เลขแถว $= 4 + 0 + 0 =$ **4**

ระวังตรงนี้: ขีดบนสองอันอยู่ติดกัน ต้องดูให้ชัดว่ามัน**คลุมคนละตัว** ไม่ใช่ขีดยาวอันเดียวคลุมทั้ง MN — พี่ซูมเช็คแล้วเป็นขีดสั้นสองอันครับ

3

$\overline{L}\,M\,\overline{N}$

ขีดที่ L และ N → 0, 0

010 = แถว 2

พจน์ที่ 3 — $\overline{L}M\overline{N}$ จุดแถว 2

เพราะ$\overline{L}$ มีขีด → $L = 0 \cdot M$ ไม่มีขีด → $M = 1 \cdot \overline{N}$ มีขีด → $N = 0$

$LMN = 010$ → เลขแถว $= 0 + 2 + 0 =$ **2**

ระวังตรงนี้: ขีดสองอันของพจน์นี้อยู่**คนละที่**กับพจน์ที่ 2 (พจน์ 2 ขีดที่ตัวที่ 2 กับ 3 · พจน์ 3 ขีดที่ตัวที่ 1 กับ 3) ครับ

4

ทุกพจน์เป็น minterm

1 + 1 + 1 = 3 แถว

2, 4, 7

รวมด้วย OR — แถวที่เป็น 1 คือ 2, 4, 7

ทุกพจน์เป็น minterm ที่จุดคนละแถว → ไม่มีการซ้ำ → จำนวน 1 = 3 พอดี

เรียงจากน้อยไปมาก: **2, 4, 7**

แถวที่เหลือ (0, 1, 3, 5, 6) เป็น 0 ตามกฎข้อ (3) ของสไลด์ครับ

L	M	N	LMN	$L\overline{M}\,\overline{N}$	$\overline{L}M\overline{N}$	X	minterm
0	0	0	0	0	0	0	—
0	0	1	0	0	0	0	—
0	1	0	0	0	1	1	$m_2 = \overline{L}M\overline{N}$
0	1	1	0	0	0	0	—
1	0	0	0	1	0	1	$m_4 = L\overline{M}\overline{N}$
1	0	1	0	0	0	0	—
1	1	0	0	0	0	0	—
1	1	1	1	0	0	1	$m_7 = LMN$

ข้อ 3(d) — ผลลัพธ์ที่ได้จากการไล่ทีละพจน์

0	1	2	3	4	5	6	7
000	001	010	011	100	101	110	111
X=0	X=0	X=1	X=0	X=1	X=0	X=0	X=1

SOP X = Σm(2, 4, 7)

POS X = ΠM(0, 1, 3, 5, 6)

3 + 5 = 8 ครบพอดี · ไม่มีเลขไหนอยู่สองกอง

ข้อ 3(d) — 1 ที่แถว 2, 4, 7 และ 0 ที่แถว 0, 1, 3, 5, 6

ชั้น ④ คำตอบสุดท้าย

คำตอบที่ต้องเขียนลงกระดาษ — ข้อ 3(d)

คอลัมน์ X จากบนลงล่าง (แถว 000 ถึง 111):

0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1

เขียนเป็นสัญกรณ์ได้ว่า $\mathbf{X = \sum m(2,4,7) = \prod M(0,1,3,5,6)}$

ตรวจ: $3 + 5 = 8$ ✓

"X(L,M,N) = Σm(2,4,7); the output is 1 for LMN = 010, 100 and 111."

ชั้น ⑤ ตรวจคำตอบด้วยวิธีที่สอง

1

010 100 111

2 4 7

แปลงกลับเป็นตัวอักษรได้เหมือนเดิม

ตรวจวิธีที่ 1 — แปลงกลับจากเลขเป็นตัวอักษร

วิธีตรวจที่ดีที่สุดของข้อนี้คือ**เดินย้อนกลับ** ครับ — เอาเลขแถวที่ได้มาแปลงกลับเป็น minterm แล้วดูว่าตรงกับโจทย์ไหม

· แถว 2 = 010 → 0 ใส่ขีด 1 ไม่ใส่ → $\overline{L}M\overline{N}$ ✓ ตรงกับพจน์ที่ 3

· แถว 4 = 100 → $L\overline{M}\,\overline{N}$ ✓ ตรงกับพจน์ที่ 2

· แถว 7 = 111 → LMN ✓ ตรงกับพจน์ที่ 1

ครบทั้งสามพจน์ ไม่มีตัวไหนหาย ไม่มีตัวไหนเกิน ✓

2

แทน LMN = 100

$L\overline{M}\,\overline{N} = 1{\cdot}1{\cdot}1 = 1$

X = 1 ตรงกับตาราง

ตรวจวิธีที่ 2 — แทนค่าแถวที่ควรได้ 1

ที่ $LMN = 100$:

· $LMN = 1 \cdot 0 \cdot 0 = 0$

· $L\overline{M}\,\overline{N} = 1 \cdot \overline{0} \cdot \overline{0} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = \mathbf{1}$

· $\overline{L}M\overline{N} = \overline{1} \cdot 0 \cdot \overline{0} = 0 \cdot 0 \cdot 1 = 0$

OR ได้ $0 + 1 + 0 = \mathbf{1}$ ✓ ตรงกับตาราง

3

แทน LMN = 110

ทุกพจน์เป็น 0

X = 0 ตรงกับตาราง

ตรวจวิธีที่ 3 — แทนค่าแถวที่ควรได้ 0

พี่เลือกแถว $LMN = 110$ เพราะมีเลข 1 อยู่สองตัว ดูเผิน ๆ เหมือนน่าจะติดพจน์ไหนสักพจน์

· $LMN = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$ (ตกเพราะ $N = 0$)

· $L\overline{M}\,\overline{N} = 1 \cdot \overline{1} \cdot \overline{0} = 1 \cdot 0 \cdot 1 = 0$ (ตกเพราะ $M = 1$ ทำให้ $\overline{M} = 0$)

· $\overline{L}M\overline{N} = \overline{1} \cdot 1 \cdot \overline{0} = 0 \cdot 1 \cdot 1 = 0$ (ตกเพราะ $L = 1$ ทำให้ $\overline{L} = 0$)

OR ได้ $\mathbf{0}$ ✓ — ทุกพจน์ตกด้วยเหตุผลคนละอย่างกัน

4

```
truth_table(
 "L&M&N|L&~M&~N|~L&M&~N")
 -> 00101001
```

ตรวจวิธีที่ 4 — รันด้วย tools/dig.py จริง

ได้ `00101001` และ `minterms()` คืน `[2,4,7]` ครับ

รันคอลัมน์ย่อยแยกด้วย: แต่ละพจน์ให้ rows=[7], [4], [2] ตามลำดับ — ยืนยันว่าทุกพจน์เป็น minterm จริง จุดพจน์ละแถวเดียว ✓

ผลรันจริงจาก tools/dig.py — ข้อ 3(d)

```
Q3d        (L & M & N) | (L & ~M & ~N) | (~L & M & ~N)    -> 00101001
           minterms=[2, 4, 7]  maxterms=[0, 1, 3, 5, 6]
     per-term:
       (L & M & N)      -> 00000001   rows=[7]
       (L & ~M & ~N)    -> 00001000   rows=[4]
       (~L & M & ~N)    -> 00100000   rows=[2]
```

ชั้น ⑥ กับดักของข้อ 3(d)

3 อย่างที่ทำให้เสียคะแนนข้อนี้

① อ่านขีดบนสองอันติดกันเป็นขีดยาวอันเดียว — พจน์ $L\overline{M}\,\overline{N}$ มีขีดสั้นสองอันติดกัน ถ้าอ่านเป็น $L\overline{MN}$ จะกลายเป็นคนละเรื่องเลยครับ

คำตอบผิดที่จะได้: $L\overline{MN}$ เป็น 1 เมื่อ $L=1$ และ $MN \neq 11$ → จุดถึง **3 แถว** (100, 101, 110) แทนที่จะเป็นแถวเดียว — ผิด 2 แถว

วิธีกัน: ดูว่าขีดมี**ช่องว่างคั่น**หรือเปล่า ขีดสั้นสองอันจะมีรอยแยกตรงกลาง ส่วนขีดยาวจะต่อเนื่องกันไม่ขาด — ซูมดูก่อนทำเสมอครับ

② สลับพจน์ที่ 2 กับพจน์ที่ 3 — สองพจน์นี้หน้าตาคล้ายกันมาก ($L\overline{M}\,\overline{N}$ กับ $\overline{L}M\overline{N}$) ต่างกันแค่ว่าขีดอยู่ที่ตัวแรกหรือตัวที่สอง

คำตอบผิดที่จะได้: ถ้าสลับ จะได้แถว 2 กับ 4 สลับกัน — บังเอิญ**คำตอบรวมยังถูก** เพราะ OR ไม่สนใจลำดับ แต่ถ้าโจทย์ให้อธิบายว่าพจน์ไหนมาจากแถวไหน จะตอบผิดครับ

วิธีกัน: เขียนบิตกำกับใต้ตัวอักษรทุกตัวก่อนแปลง

③ คิดว่าทั้งสามพจน์ต้องจุดแถวที่ต่างกันเสมอ — ข้อนี้บังเอิญไม่ซ้ำ แต่**ไม่ใช่กฎ** ครับ

ถ้าโจทย์เขียนพจน์ซ้ำกันสองครั้ง (เช่น $LMN + LMN$) มันก็จุดแถวเดียวกัน และคำตอบยังถูก แค่จำนวน 1 จะน้อยกว่าจำนวนพจน์

วิธีกัน: ตรวจเสมอว่าเลขแถวที่ได้**ไม่ซ้ำกัน**ก่อนสรุปจำนวน 1 ครับ

หัวใจของข้อ 3(d) และของ Assignment ข้อ 3 ทั้งหมด

อ่านขีดบนให้ถูกตัวก่อนทุกครั้ง → นับตัวแปรในพจน์เพื่อรู้ว่าจุดกี่แถว → ทำคอลัมน์ย่อยทีละพจน์ → OR รวมแล้วเช็คว่าเลขแถวไม่ซ้ำ

สรุปเฉลย Assignment 4 ทั้ง 10 ข้อย่อย

น้องผ่าน Assignment 4 ส่วนที่ EP นี้รับผิดชอบครบแล้วครับ:

ข้อ 1 (a–c) ตาราง → minterm notation ของ X และ $\overline{X}$

ข้อ 2 (a–c) ตาราง → SOP และ POS ทั้งสองรูป

ข้อ 3 (a–d) นิพจน์ → ตารางค่าความจริง

ที่เหลือคือข้อ 4, 5 และ 6 ซึ่งต้องใช้เรื่องวงจรและ universal gate — เก็บไว้ให้ EP08 ครับ

12 กับดักรวม · สรุปหน้าเดียว · เช็คลิสต์ก่อนสอบ

กับดักรวมของทั้ง EP — 8 ข้อที่ทำให้เสียคะแนนบ่อยที่สุด

กับดัก 1–4

① เขียน POS โดยกลับแค่อย่างเดียว

นี่คือกับดักอันดับหนึ่งของ EP ครับ จำได้ว่า “อ่านแถวที่เป็น 0” แต่ลืมกลับตัวอักษร

แถว 100 ที่ควรได้ $(\overline{A}+B+C)$ จะกลายเป็น $(A+\overline{B}+\overline{C})$ ซึ่งที่จริงคือ maxterm ของแถว 011 — **ผิดไปคนละแถว**

วิธีกัน: ท่องว่า **“POS กลับสองอย่าง: กลับแถว และกลับขีด”**

② สลับกฎขีดบนของ minterm

ถ้าจำสลับเป็น “1 ใส่ขีด 0 ไม่ใส่” คำตอบจะกลับด้านทุกตัวอักษร

วิธีกัน: ย้อนไปที่เหตุผล — AND ต้องการให้ทุก literal เป็น 1 ตัวที่มีค่า 0 จึงต้องใส่ขีดให้กลายเป็น 1 → **0 ใส่ขีดเสมอ**

หรือจำสองสุดขั้ว: m_0 ขีดครบทุกตัว · m_7 ไม่มีขีดเลย

③ ลืมว่าพจน์ที่ตัวแปรไม่ครบจะจุดหลายแถว

เห็น AB ในระบบ 3 ตัวแปร แล้วจุดแค่แถว 110 — ที่ถูกคือจุดทั้ง 110 และ 111

วิธีกัน: นับตัวอักษรก่อนเสมอ พจน์ที่มี k ตัวจะจุด 2^{n-k} แถว

④ เขียนแถวไม่ครบ 2^n

Assignment ข้อ 3(b) มี 4 ตัวแปร ต้องมี **16 แถว** ไม่ใช่ 8

วิธีกัน: นับ**ชื่อ**ตัวแปรที่ไม่ซ้ำกันก่อนลงมือ แล้วคิด 2^n ทุกครั้ง

กับดัก 5–8

⑤ สับสน $\sum m$ กับ $\prod M$

$\sum$ คู่กับ m ตัวเล็ก (แถวที่ได้ 1) · $\prod$ คู่กับ M ตัวใหญ่ (แถวที่ได้ 0) เสมอ ไม่มีการสลับคู่ครับ

วิธีกัน: เขียน $\sum m$ ก่อนทุกครั้ง แล้วค่อยเอา**เลขที่เหลือ**ไปใส่ $\prod M$ — จะไม่มีทางสลับ

⑥ ลืมวงเล็บใน POS

เขียน $A+B+C\cdot\overline{A}+B+C$ ซึ่งอ่านได้เป็น $A+B+(C\overline{A})+B+C$ คนละเรื่องเลย เพราะ AND ทำก่อน OR

วิธีกัน: POS ต้องมีวงเล็บทุกก้อน และ**ห้ามมีเครื่องหมาย $+$ ระหว่างวงเล็บ**

⑦ อ่านขีดบนผิดตำแหน่งหรือผิดความยาว

$L\overline{M}\,\overline{N}$ (ขีดสั้นสองอัน) ต่างจาก $L\overline{MN}$ (ขีดยาวอันเดียว) มาก — อันแรกจุด 1 แถว อันหลังจุด 3 แถว

วิธีกัน: ดูว่ามี**รอยแยก**ระหว่างขีดหรือเปล่า และดูว่าขีดคลุมถึงตัวไหน ถ้าโจทย์เป็นรูปให้ซูมดูก่อนเสมอ

⑧ ตอบ SOP แล้วลืม POS (หรือกลับกัน)

โจทย์ Assignment ข้อ 2 ใช้คำว่า `both` ซึ่งแปลว่าต้องมีสองคำตอบต่อหนึ่งตาราง

วิธีกัน: อ่านคำสั่งให้จบก่อนลงมือ แล้วเขียนหัวข้อ “SOP:” และ “POS:” ลงกระดาษไว้ก่อนทำครับ

สรุปหน้าเดียว — อ่านก่อนเข้าห้องสอบ

EP07 · Minterm + ตารางค่าความจริง ↔ SOP / POS

1 · ศัพท์ 5 คำที่ต้องแยกออก

literal = ตัวแปรหนึ่งตัวที่โผล่หนึ่งครั้ง (มีขีดก็นับ) | **product term** = literal ที่ AND กัน | **sum term** = literal ที่ OR กัน

minterm = product term ที่มีตัวแปร**ครบทุกตัว** — เป็น 1 ได้แถวเดียว | **maxterm** = sum term ที่มีตัวแปรครบทุกตัว — เป็น 0 ได้แถวเดียว

n ตัวแปร → มี minterm 2^n ตัว (m_0 ถึง m_{2^n-1}) และ maxterm 2^n ตัวเช่นกัน

2 · ★ กฎการเขียน — ท่องสองบรรทัดนี้ให้ได้

SOP อ่านแถวที่ได้ **1** · บิต **0 ใส่ขีดบน** · บิต 1 ไม่ใส่ · ภายในก้อนคูณ ระหว่างก้อนบวก · **ไม่มีวงเล็บ**

POS อ่านแถวที่ได้ **0** · บิต **1 ใส่ขีดบน** · บิต 0 ไม่ใส่ · ภายในก้อนบวก ระหว่างก้อนคูณ · **มีวงเล็บทุกก้อน**

ตัวอย่างแถว 011 → minterm $\overline{A}BC$ · maxterm $(A+\overline{B}+\overline{C})$

3 · ทำไมถึงกลับด้าน (ไม่ต้องท่อง — เข้าใจแล้วจำเอง)

$M_i = \overline{m_i}$ ครับ — maxterm คือ minterm ที่โดนขีดบนคลุมทั้งก้อน

De Morgan พลิก**สองอย่างพร้อมกัน**: AND กลายเป็น OR และขีดบนของทุกตัวแปรสลับ

$\overline{A}\overline{B}\overline{C} = A + \overline{B} + C$ — นั่นคือทั้งหมดของเหตุผลครับ

4 · สัญกรณ์ย่อ และกฎแบ่งสองกอง

$X = \sum m(\text{เลขแถวที่ได้ } 1) = \prod M(\text{เลขแถวที่ได้ } 0)$

กฎทอง เลขที่ไม่อยู่ใน $\sum m$ จะอยู่ใน $\prod M$ พอดี — สองกองรวมกันได้ 2^n เสมอ ไม่ทับกันและไม่มีเศษ

เขียนกองหนึ่งเสร็จ อีกกอง**ได้ฟรี** · และใช้**ตรวจคำตอบ**ได้ทุกข้อ

5 · 4 ทิศการแปลง — ทำอะไรก่อน

(1) ตาราง → SOP ระบายแถวที่ได้ 1 → แปลงบิตเป็นตัวอักษร → ต่อด้วย $+$

(2) ตาราง → POS ระบายแถวที่ได้ 0 → แปลงบิต**กลับค่า** → วงเล็บชนกัน

(3) SOP → ตาราง ทำคอลัมน์ย่อยพจน์ละคอลัมน์ → จุด 1 → **OR** แนวนอน

(4) POS → ตาราง ทำคอลัมน์ย่อยวงเล็บละคอลัมน์ → จุด 0 → **AND** แนวนอน

6 · สูตรนับที่ใช้ตรวจคำตอบได้ทุกข้อ

พจน์/วงเล็บที่มีตัวแปร k ตัว ในระบบ n ตัวแปร จะแตะ $\mathbf{2^{n-k}}$ แถว

ครบทุกตัว ($k = n$) → 1 แถว · ขาด 1 ตัว → 2 แถว · ขาด 2 ตัว → 4 แถว · ขาด 3 ตัว → 8 แถว

ระวัง: ผลบวกของทุกพจน์อาจ**มากกว่า**จำนวน 1 จริง ถ้ามีแถวถูกจุดซ้ำ (idempotent)

7 · ตารางอ้างอิงเร็ว 3 ตัวแปร

$m_0 = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ · $m_1 = \overline{A}\,\overline{B}C$ · $m_2 = \overline{A}B\overline{C}$ · $m_3 = \overline{A}BC$

$m_4 = A\overline{B}\,\overline{C}$ · $m_5 = A\overline{B}C$ · $m_6 = AB\overline{C}$ · $m_7 = ABC$

maxterm = เอา m_i มาสลับขีดทุกตัวแล้วเปลี่ยน · เป็น $+$ ครับ เช่น $M_5 = (\overline{A} + B + \overline{C})$

8 · ประโยคภาษาอังกฤษที่ลอกลงข้อสอบได้เลย

"X(A,B,C) = Σm(1,4,6) = ΠM(0,2,3,5,7)."

"The SOP expression is formed by ORing the minterms corresponding to the rows where the output is 1."

"The POS expression is formed by ANDing the maxterms corresponding to the rows where the output is 0, with each variable complemented when its bit is 1."

"A non-standard product term produces more than one row where the output is 1."

ตัวอย่างสรุปหนึ่งตาราง — เห็นทุกอย่างของ EP ในที่เดียว

A	B	X	minterm	maxterm
0	0	0	—	$M_0 = (A + B)$
0	1	1	$m_1 = \overline{A}B$	—
1	0	1	$m_2 = A\overline{B}$	—
1	1	0	—	$M_3 = (\overline{A} + \overline{B})$

ตารางเดียว เขียนได้สองหน้าตา

SOP (อ่านแถวเขียว 01 กับ 10 · 0 ใส่ขีด):
$X = \overline{A}B + A\overline{B} = \sum m(1, 2)$
POS (อ่านแถวขาว 00 กับ 11 · 1 ใส่ขีด):
$X = (A + B)(\overline{A} + \overline{B}) = \prod M(0, 3)$
ตรวจ: $2 + 2 = 4 = 2^2$ ✓
เกร็ด: ฟังก์ชันนี้คือ **XOR** ครับ ($X = A \oplus B$) — วนกลับมาเจอเกตจาก EP05 อีกครั้ง

ทดสอบตัวเองใน 30 วินาที

ปิดตารางแล้วตอบว่า:
① m_2 ของ 2 ตัวแปรคืออะไร ② M_3 คืออะไร
③ ถ้า $\sum m(1, 2)$ แล้ว $\prod M$ คืออะไร
เฉลย: ① $A\overline{B}$ ② $(\overline{A} + \overline{B})$ ③ $\prod M(0, 3)$

เช็คลิสต์ก่อนสอบ — ติ๊กให้ครบก่อนเข้าห้อง

ติ๊ก	ทำได้หรือยัง
☐	บอกได้ว่า **literal / product term / sum term** ต่างกันยังไง และนับได้จากนิพจน์
☐	อธิบายได้ว่า**ทำไม** minterm ถึงเป็น 1 ได้แถวเดียว (ไม่ใช่ท่องนิยาม)
☐	อธิบายได้ว่า**ทำไม** maxterm ถึงเป็น 0 ได้แถวเดียว และทำไมตัวอักษรกลับด้าน (De Morgan)
☐	เขียนตาราง minterm/maxterm ของ 3 ตัวแปรจากศูนย์ได้ภายใน 1 นาที
☐	แปลง **ตาราง** → **SOP** ได้ และนับก้อนตรวจตัวเองเป็น
☐	แปลง **ตาราง** → **POS** ได้ โดย**กลับทั้งสองอย่าง**ไม่พลาด
☐	แปลง **SOP** → **ตาราง** ได้ด้วยวิธีคอลัมน์ย่อย และรู้ว่าพจน์ไหนจุดกี่แถว
☐	แปลง **POS** → **ตาราง** ได้ (จุด 0 แล้ว AND แนวนอน)
☐	เขียน $\sum m$ แล้วได้ $\prod M$ ทันทีโดยไม่ต้องกวาดตารางซ้ำ
☐	ใช้สูตร 2^{n-k} ตรวจจำนวนคอลัมน์ย่อยของแต่ละพจน์มี 1 กี่ตัว
☐	ทำ Assignment 4 ข้อ 1(a–c), 2(a–c), 3(a–d) ได้เองโดยไม่เปิดเฉลย

ติ๊ก	ทำได้หรือยัง
☐	ตรวจคำตอบเป็นอย่างน้อย 2 วิธี (นับจำนวน + แทนค่ากลับ) ทุกครั้ง

EP ต่อไปเจออะไร

ตอนนี้น้องแปลงไปมาระหว่างตารางกับนิพจน์ได้แล้วครับ ทั้ง 4 ทิศ
แต่พี่ขอถามต่อว่า — **ถ้าโรงงานมีแต่เกต NAND อย่างเดียวล่ะครับ จะสร้างวงจรทั้งวงจากเกตชนิดเดียวได้ไหม**
ฟังดูเหมือนเป็นไปไม่ได้ แต่คำตอบคือ**ได้ครับ** และนั่นคือเหตุผลที่ NAND ถูกเรียกว่า `universal gate`
EP08 จะเจอ: การไล่นิพจน์จากวงจร (combinational logic analysis) · AND-OR และ AND-OR-Invert · การสร้าง NOT / AND / OR / NOR จาก NAND ล้วน · การเขียนวงจร SOP ด้วย NAND ล้วน และ POS ด้วย NOR ล้วน · และ dual symbol ช่วยอ่านวงจรยังไง
พร้อมเฉลย **Assignment 4 ข้อ 4, 5 และ 6 (a–b)** ที่ยังเหลืออยู่ครับ

แหล่งอ้างอิง

แหล่ง	ใช้ตรงไหนของ EP นี้
EES 271 Lecture 04 Combinational Circuits (หน้า 1–19)	หน้า 2 ศัพท์ literal / product term · หน้า 3–4 นิยาม minterm และเลข m_i · หน้า 5 สัญกรณ์ $\sum m$ · หน้า 6 Example I · หน้า 8 Example II · หน้า 10 หัวข้อ (1) ตาราง → SOP · หน้า 11, 13 Example III · หน้า 15 หัวข้อ (2) ตาราง → POS + duality principle · หน้า 16, 18 Example IV · หน้า 20–21 หัวข้อ (3) SOP → ตาราง · หน้า 22, 24 Example V · หน้า 26 หัวข้อ (4) POS → ตาราง · หน้า 27 Example VI
EES 271 Assignment #4 ข้อ 1, 2, 3	เฉลยเต็ม 6 ชั้นในหัวข้อ 8–11 — ข้อ 1(a–c), 2(a–c), 3(a–d) รวม 10 ข้อย่อย ตารางในโจทย์เป็นรูปภาพ อ่านจาก PNG ที่ 300–400 dpi แล้วพิมพ์ใหม่
Floyd, *Digital Fundamentals* 10th ed.	บทที่ 4 — Boolean Algebra and Logic Simplification (หัวข้อ Standard Forms of Boolean Expressions และ Boolean Expressions and Truth Tables)
EP ก่อนหน้าของชีทชุดนี้	EP01 positional numbering (แปลงเลขแถวฐานสอง → ฐานสิบ) · EP05 กฎของ AND กับ OR และตาราง XOR · EP06 De Morgan · involution · idempotent · absorption
เครื่องมือตรวจคำตอบ `build/tools/dig.py`	`truth_table()` · `minterms()` · `maxterms()` · `same_logic()` — ทุกตารางและทุกนิพจน์ในชีทนี้ถูกสร้างและตรวจด้วยสคริปต์จริง ไม่มีการพิมพ์ 0/1 ด้วยมือ

ประโยคเดียวที่อยากให้จำจาก EP นี้

ตารางค่าความจริงคือภาษากลางของวิชานี้ครับ — นิพจน์เขียนได้หลายหน้าตา แต่ตารางมีได้หน้าตาเดียว เพราะฉะนั้นเวลาไม่แน่ใจว่านิพจน์สองอันเท่ากันไหม ให้แปลงเป็นตารางแล้วเทียบเสมอ